Una presentazione dei Quaternioni

Franco EUGENI, Daniela TONDINI, Annamaria VICECONTE

Department of Communication Science,Univeristy of Teramo.

e-mail : {eugeni, dtondini}@unite.it

Sia í il campo ordinato dei numeri reali e ï uno spazio vettoriale 3–dimensionale reale.
Denotiamo con

$$\text{q} := \text{í} + \text{ï} = \text{í} \times \text{ï}$$

L'INSIEME DELLE "SOMME FINALI" DI UN NUMERO REALE CON UN VETTORE, OVVERO UN'ESPRESSIONE FORMALE DEL TIPO

$$a+\vec{u} \qquad \text{con } a \in \text{í},\ \vec{u} \in \text{ï}$$

ovvero una "coppia ordinata" $\left(a,\ \vec{u}\right)$ del prodotto cartesiano í × ï.

Se, per ogni coppia ordinata $a+\vec{u},\ b+\vec{v} \in$ q, definiamo un'operazione (+) in q ponendo:

$$\left(a+\vec{u}\right)+\left(b+\vec{v}\right):=\left(a+b\right)+\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$$

la struttura algebrica (q, +) risulta essere un <u>gruppo abeliano</u>.
Una seconda operazione (∗) può essere definita $\forall\, a+\vec{u},\ b+\vec{v} \in$ q ponendo:

$$\left(a+\vec{u}\right)*\left(b+\vec{v}\right):=ab+b\vec{u}+a\vec{v}+\left(\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$$

Si prova con facilità che la struttura (q, +, ∗) è un <u>corpo</u>, non valendo la proprietà commutativa della seconda operazione.

Gli elementi di q, nella sopraindicata struttura algebrica, si dicono <u>quaternioni</u> ed il corpo costruito si dice <u>corpo dei quaternioni</u>. Se introduciamo ancora l'operazione "esterna" definita ponendo:

$$k\cdot\left(a+\vec{u}\right):=k\cdot a+k\cdot\vec{u}=ka+k\vec{u} \qquad \forall\ k\in\mathbb{R},\ \forall\ a+\vec{u}\in\mathbb{H}$$

la struttura algebrica ($\mathbb{H}$, +, $*$, $\cdot$) prende il nome di <u>algebra dei quaternioni</u>.

È IMPORTANTE INTRODURRE ORA LA NOZIONE DI NORMA.

Quale che sia $a+\vec{u}\in\mathbb{H}$, si chiama <u>norma</u> l'applicazione

$$\|\quad\|:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$$

definita ponendo:

$$\left\|a+\vec{u}\right\|^2=a^2+u^2$$

essendo u la norma di $\vec{u}$ in $\mathbb{R}^3$.
Si chiama inoltre <u>quaternione coniugato</u> di $a+\vec{u}$ il quaternione

$$\overline{a+\vec{u}}:=a-\vec{u}$$

È IMMEDIATO PROVARE CHE:

$$(1)\qquad \left(a+\vec{u}\right)*\left(a-\vec{u}\right)=\left(a-\vec{u}\right)*\left(a+\vec{u}\right)=\left\|a^2+u^2\right\|$$

$$(2)\qquad (a+\vec{u})^{-1}=\frac{1}{a^2+u^2}\left(a-\vec{u}\right)$$

Spesso è utile scrivere

$$a+\vec{u}=a+b\vec{r}$$

essendo $\vec{r}$ un versore parallelo ad $\vec{u}$, ed anche:

$$a+\vec{u}=a+u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$$

essendo $\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\}$ una base di versori di $\mathbb{R}^3$.

SI PROVA FACILMENTE CHE:

(3) $\quad i^2 = j^2 = k^2 = r^2 = -1$

(4) $\quad ij = -ji = k\,;\; jk = -kj = i\,;\; ki = -ik = j$

Si prova inoltre il seguente ovvio

TEOREMA 1. Sia $\vec{r} \in$ un fissato versore. Allora risulta $\left(\{a+b\vec{r}\},\ +,\ *\right) \cong$ £ .

TEOREMA 2. Sia $q = a + b\vec{r} = \rho\left(cos\vartheta + \vec{r}\ sen\vartheta\right)$ un quaternione. La trasformazione

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1}$$

è una rotazione di asse $\vec{r}$ ed ampiezza 2ϑ.

Dimostrazione.

Si ha

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = cos2\vartheta\,\vec{x} - sen2\vartheta\left(\vec{x} \wedge \vec{r}\right) + 2sen^2\vartheta\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r}$$

La trasformazione è lineare; infatti

$$q * \left(\lambda\vec{x}_1 + \mu\vec{x}_2\right) * q^{-1} = \lambda\left(q * \vec{x}_1 * q^{-1}\right) + \mu\left(q * \vec{x}_2 * q^{-1}\right)$$

ed è tale che

$$\|\vec{y}\| = \|q * \vec{x} * q^{-1}\| = \|q\|\|\vec{x}\|\|q\|^{-1} = \|\vec{x}\|$$

Per $\vec{x} = \vec{r}$ risulta $\vec{y} = \vec{r}$ cioè $\vec{r}$ è un vettore unitario.

Sia $a + b\vec{r} = cos\vartheta + \vec{r}sin\vartheta$ *un quaternione unitario.*

CONSIDERIAMO:

$$\left(a+b\vec{r}\right) * \vec{x} * \left(a-b\vec{r}\right) = \left[a\vec{x} + b\left(\vec{r} \wedge \vec{x} - \vec{r} \cdot \vec{x}\right)\right] * \left(a - b\vec{r}\right) =$$

$$= \left\{-b\left(\vec{r} \cdot \vec{x}\right) + \left[a\vec{x} + b\left(\vec{r} \wedge \vec{x}\right)\right]\right\} * \left(a - b\vec{r}\right) =$$

$$= -ab\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right) + b^2\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r} + a^2\vec{x} + ab\left(\vec{r} \wedge \vec{x}\right) + \left[a\vec{x} + b\left(\vec{r} \wedge \vec{x}\right)\right] \wedge \left(-b\vec{r}\right) - \left[a\vec{x} + b\left(\vec{r} \wedge \vec{x}\right)\right] \cdot \left(-b\vec{r}\right) =$$

$$= -ab\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right) + b^2\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r} + a^2\vec{x} + ab\left(\vec{r} \wedge \vec{x}\right) - ab\left(\vec{x} \wedge \vec{r}\right) - b^2\left(\vec{r} \wedge \vec{x}\right) \wedge \vec{r} + ab\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right) + b^2\left(\vec{r} \wedge \vec{x} \cdot \vec{r}\right) =$$

$$= b^2\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r} + a^2\vec{x} - 2ab\left(\vec{x} \wedge \vec{r}\right) - b^2\left[\vec{x} - \left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r}\right] =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)\vec{x} - 2ab\left(\vec{x} \wedge \vec{r}\right) + 2b^2\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r} = \vec{y}$$

essendo, in generale:

$$\left(a \wedge b\right) \wedge c = \left(ac\right)b - \left(bc\right)a$$

Supponiamo ora che $\vec{x}_1$ sia ortogonale ad $\vec{r}$, cioè che sia:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{r} = 0 .$$

Risulta allora:

$$\vec{y}_1 = cos2\vartheta \vec{x}_1 + sin2\vartheta\left(\vec{x}_1 \wedge \vec{r}\right)$$

e quindi:

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{r} = cos2\vartheta\left(\vec{x}_1 \cdot \vec{r}\right) = 0$$

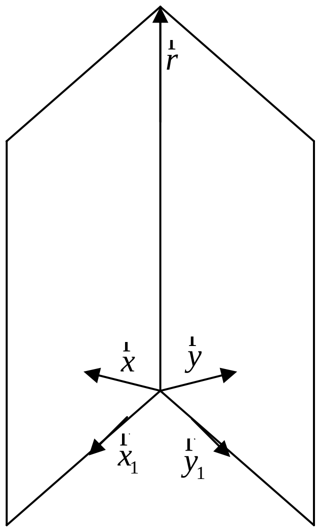
Segue allora che l'angolo dei due piani $\left(\vec{x},\ \vec{r}\right)$ ed $\left(\vec{y},\ \vec{r}\right)$ è dato dall'angolo dei due vettori $\vec{x}_1$ ed $\vec{y}_1$.

Si ha:

$$\vec{y}_1 \vec{x}_1 = cos2\vartheta\left\|\vec{x}_1\right\|^2$$

e quindi

$$\widehat{\vec{x}_1 \vec{y}_1} = 2\vartheta$$



Poiché la trasformazione $\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1}$ è lineare, deve esistere una matrice A = $A(q)$ tale che:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = A\vec{x}$$

Essendo, inoltre:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = cos2\vartheta\ \vec{x} - sen2\vartheta\left(\vec{x} \wedge \vec{r}\right) + 2sen^2\vartheta\left(\vec{x} \cdot \vec{r}\right)\vec{r}$$

passando alle componenti, risulta:

$y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k} =$

$$= cos2\theta\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}\right)-sin2\vartheta\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}+2sin^2\theta\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)\cdot\left(r_1\vec{i}+r_2\vec{j}+r_3\vec{k}\right)$$

da cui:

$$y_1 = cos2\theta x_1 - sin2\theta\left(x_2r_3-r_2x_3\right)+2sin^2\theta r_1\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)$$

$$y_2 = cos2\theta x_2 + sin2\theta\left(x_1r_3-r_1x_3\right)+2sin^2\theta r_2\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)$$

$$y_3 = cos2\theta x_3 - sin2\theta\left(x_1r_2-r_1x_2\right)+2sin^2\theta r_3\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)$$

ed ordinando:

$$y_1 = \left(cos2\theta+2r_1^2sin^2\theta\right)x_1+\left(-r_3sin2\theta+2r_1r_2sin^2\theta\right)x_2+\left(r_2sin2\theta+2r_1r_3sin^2\theta\right)x_3$$

$$y_2 = \left(r_3sin2\theta+2r_1r_2sin^2\theta\right)x_1+\left(cos2\theta+2r_2^2sin^2\theta\right)x_2+\left(-r_1sin2\theta+2r_2r_3sin^2\theta\right)x_3$$

$$y_3 = \left(-r_2sin2\theta+2r_1r_3sin^2\theta\right)x_1+\left(r_1sin2\theta+2r_2r_3sin^2\theta\right)x_2+\left(cos2\theta+2r_3^2sin^2\theta\right)x_3$$

Se ora poniamo:

$a = cos\vartheta$

$b = sin\vartheta$

in maniera analoga otteniamo:

$$y_1\vec{i}+y_2\vec{j}+y_3\vec{k}=\left(a^2-b^2\right)\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}\right)-2ab\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}+2b^2\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)\cdot\left(r_1\vec{i}+r_2\vec{j}+r_3\vec{k}\right)$$

da cui, passando alle componenti:

$$y_1 = \left(a^2-b^2\right)x_1-2ab\left(x_2r_3-r_2x_3\right)+2b^2r_1\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)$$

$$y_2 = \left(a^2-b^2\right)x_2+2ab\left(x_1r_3-r_1x_3\right)+2b^2r_2\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)$$

$$y_3 = \left(a^2-b^2\right)x_3-2ab\left(x_1r_2-r_1x_2\right)+2b^2r_3\left(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3\right)$$

ovvero:

$$y_1 = \left(a^2-b^2+2b^2r_1^2\right)x_1+\left(-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)x_2+\left(2abr_2+2b^2r_1r_3\right)x_3$$

$$y_2 = \left(2abr_3+2b^2r_2r_1\right)x_1+\left(a^2-b^2+2b^2r_2^2\right)x_2+\left(-2abr_1+2b^2r_2r_3\right)x_3$$

$$y_3 = \left(-2abr_2+2b^2r_1r_3\right)x_1+\left(2abr_1+2b^2r_2r_3\right)x_2+\left(a^2-b^2+2b^2r_3^2\right)x_3$$

Se ora poniamo:

$$A=\begin{pmatrix} a^2-b^2+2b^2r_1^2 & -2abr_3+2b^2r_1r_2 & 2abr_2+2b^2r_1r_3\\ 2abr_3+2b^2r_1r_2 & a^2-b^2+2b^2r_2^2 & -2abr_1+2b^2r_2r_3\\ -2abr_2+2b^2r_1r_3 & 2abr_1+2b^2r_2r_3 & a^2-b^2+2b^2r_3^2\end{pmatrix}$$

risulta proprio $\vec{y}=A\vec{x}$.

Dobbiamo provare che questa matrice è ortogonale. Si osservi che è <u>funzione</u> di 2ϑ (angolo di rotazione) e di $\vec{r}$.

$$\left(a^2-b^2+2b^2r_1^2\right)\left(2abr_3+2b^2r_1r_2\right)+\left(-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)\left(a^2-b^2+2b^2r_2^2\right)+$$
$$+\left(2abr_2+2b^2r_1r_3\right)\left(-2abr_1+2b^2r_2r_3\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(2abr_3+2b^2r_1r_2-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)=$$
$$=\left(a^2-b^2\right)4b^2r_1r_2+2b^2r_1^2\left(2abr_3+2b^2r_1r_2\right)+2b^2r_2^2\left(-2abr_3+2b^2r_1r_2\right)=$$
$$=\left(a^2-b^2\right)4b^2r_1r_2+2b^2\left(r_1^2\,2abr_3+r_1^2\,2b^2r_1r_2-r_2^2\,2abr_3+r_2^2\,2b^2r_1r_2\right)$$

$$A=\left(a^2-b^2\right)I_3+2ab\underbrace{\begin{pmatrix}0&-r_3&r_2\\r_3&0&-r_1\\-r_2&r_1&0\end{pmatrix}}_{\det=0}+2b^2r_1r_2r_3\underbrace{\begin{pmatrix}r_1&r_2&r_3\\r_1&r_2&r_3\\r_1&r_2&r_3\end{pmatrix}}_{\det=0}$$

F.EUGENI-D.TONDINI-A.VICECONTE

www.eiris.it