Ratio Math. 2
(1991), 161 - 165

UNA SUGGESTIVA ANALOGIA FRA FENOMENI BIOLOGICI E FENOMENI ECONOMICI A SOGLIA

Fabio Mercanti

SUNTO - Viene fornita una descrizione in termini algebrico-combinatori che sembra particolarmente adatta per una modellazione matematica dei *fenomeni a soglia* tipici della biologia e della economia.

ABSTRACT - An algebraic-combinatory description wich appears particularly suitable to mathematical models of *threshold phenomena* of the biological and economical processes has been presented. An analogy, probably not yet known, between energetical investment phenomena in biological and economical system has been described.

O. In questa nota si descrive un'analogia probabilmente non ancora nota fra fenomeni di investimento energetico in sistemi biologici ed in sistemi economici. Il lavoro si inquadra nel filone delle ricerche attualmente dirette da G. Melzi.

L'analogia di cui si parla consiste in quanto segue. Si ammette anzitutto che il fenomeno biologico della percezione consista nella *saturazione di un segnale* per mezzo di risorse energetiche limitate, nel senso descritto in MELZI [2], [3], MELZI-MERCANTI [1]. Se si osserva che ogni processo economico si lascia descrivere, a prescindere da tutti i possibili e anzi inevitabili disturbi osservazionali, per mezzo di strategie ottimali di investimento di risorse limitate, l'analogia annunciata diventa ovvia.

Sono in corso ricerche tendenti alla modellazione matematica in questo senso di alcuni suggestivi meccanismi economici. Ad esempio, il modello classico di Straffa di produzione di merci per mezzo di merci, il modello della gestione di un portafoglio di n titoli, e altre.

Questa nota tende a chiarire solo il primo termine dell'analogia, e cioè certi meccanismi di controllo nel sistema percettivo ottico descritti in MELZI [2] e qui sviluppati e predisposti per il successivo esame analogico.

Il presente lavoro riprende e sviluppa [2] quantificando con una certa precisione la *topologia metrica* degli stati di un tale sistema percettivo.

1. La simbologia e la terminologia ocorrenti per la trattazione che segue si trovano in [1]. In [1] è definito un *semiautoma*

$$\Sigma = < H\ (F, X_0),\ \Omega >$$

costituito da un'*automa* H (F, X_0) e da un osservatore Ω (detto in [3] *osservatore interno*) in grado di interagire con H stesso. Gli stati di H (tra i quali lo stato iniziale X_0) sono insiemi di *parole finite* costruite su un dato *alfabeto finito* T. Tali insiemi di parole sono gli elementi di un'algebra $\mathscr{A}$, estensione dell'algebra di Boole $\mathscr{B}$, le cui operazioni sono, oltre a quelle dell'algebra $\mathscr{B}$, quelle di *selezione, selezione destra, selezione sinistra, taglio e concatenazione*, dette brevemente *$\mathscr{A}$-operazioni*. Le $\mathscr{A}$-operazioni sono verosimili modelli delle operazioni di *sintesi polipeptidica*.

Se ad un dato tempo (discreto) l'automa H è nello stato X e riceve lo stimolo Y dall'osservatore Ω, allora lo stato che H assume al tempo successivo in virtù dello stimolo Y è

$$F\ (X, Y),$$

dove F è una *funzione omogenea* ([1], § 5) definita su $\mathscr{A}$.

2. In [2] si considerano un semiautoma $\Sigma = < H\ (F, X_0), \Omega >$ e un altro osservatore ω. Nel seguito Ω e ω saranno anche chiamati, come in [3], rispettivamente, *osservatore interno* ed *osservatore esterno* (ad H). Quando l'automa H (F, X_0) assume lo stato X, l'osservatore esterno "propone" all'osservatore interno Ω di raggiungere un altro stato a partire da X, e così via. Quando ω propone lo stato X a Ω si dice che H è *non-equilibrato*. Quando lo stato X è assunto *dopo* la scelta operata da Ω si dice che H è *riequilibrato* ([2], § 8).

Al processo P in cui H assume gli stati X_i sotto l'azione degli stimoli Y_i (i = 1, 2, ..., k) si associa in modo del tutto naturale il numero

$$\sum_i F\ (x_i, y_i), \tag{1}$$

con $x_i = |X_i|$ e $y_i = |Y_i|$, detto traccia di P.

Il segno Σ di sommatoria si riferisce alla ordinaria somma di anello booleano.

Il funzionamento complessivo del semiautoma Σ è il seguente: l'osservatore esterno ω squilibra casualmente in ogni tempo l'automa H e l'osservatore interno Ω riequilibra H in ogni tempo, per modo che, con l'investimento energetico (1), il processo P è complessivamente mantenuto equilibrato.

Tuttavia la strategia di riequilibrazione in ogni tempo a disposizione di Ω non è univocamente determinata. Si possono prevedere le seguenti ipotesi fra loro alternative di comportamento di Ω.

2.1. Per ogni stimolo da riequilibrare Ω porta H allo stato X_0 e da questo allo stato che riequilibra il nuovo stimolo.

2.2. L'osservatore Ω sceglie lo stimolo riequilibrante in modo che la relativa traccia sia interpretabile come la *distanza* fra gli stati X_{i-1}, X_i in una topologia degli stati, opportunamente definita.

La proprietà triangolare della distanza d (X, Y) fra stati di H, come è detto al § 5, assicura la vantaggiosità del comportamento (2.1) rispetto al comportamento (2.2), per ogni singolo passo X_{i-1}, X_i.

3. Il processo tra ω e Ω descritto nel § 2 può essere visto come uno schema matematico dell'equilibrio fra gli stimoli esterni e la rispost proteica in un'area percettiva del sistema nervoso centrale. In particolare la traccia (1) può essere interpretata come *energia dispersa* nel processo P. Il meccanismo di nonequilibrio-riequilibrio descritto nel § 2 può allora essere visto come un *modello concettuale della percezione sensoriale*. In particolare in [2] si tratta della percezione visiva. Ivi si considerano ω come un modello della indeterminatezza degli stimoli provenienti dalla realtà fisica e Ω come un modello della corteccia visiva che controlla l'ingresso percettivo.

I meccanismi di equilibrio fra ω e Ω possono essere descritti con l'algebra $\mathscr{A}$ di [1] (cfr. § 1), come è sommariamente detto in [2].

4. L'illusione ottica presa in considerazione in [2] è la seguente. Due sorgenti luminose di uguali caratteristiche ottiche emettono luce alternativamente per opportuni periodi di tempo nell'ordine del secondo. La percezione che se ne ha ad opportuna distanza dalle sorgenti è quella di un'unica immagine che oscilla con continuità dalla posizione di una sorgente alla posizione dell'altra, passando attraverso le posizioni intermedie $P_1, P_2, ..., P_n$, dalle quali sembra provenire. Man mano che l'osservatore si avvicina alle due sorgenti l'impressione di continuità aumenta, ma scompare quasi di colpo quando la posizione O dell'osservatore, ossia il corrispondente angolo $\alpha = P_1 0 P_n$, raggiunge un punto

critico. Vi è dunque una sorta di *soglia* che varia, di poco da individuo a individuo, o in particolari condizioni di osservazione.

5. L'interpretazione del fenomeno in termini combinatori degli stati dell'area visiva della corteccia come un semiautoma è la seguente. Siano $S_1, S_2, ..., S_n$ gli stati del semiautoma Σ corrispondenti alla saturazione degli stimoli $S'_1, S'_2, ..., S'_n$ che al semiatuoma verrebbero forniti dalle immagini provenienti dai punti $P_1, P_2, ..., P_n$ (§4). In base a quanto detto nei precedenti paragrafi ogni stato S_i ($i = 1, 2, ..., n$) è un sottoinsieme dell'insieme $\mathscr{G}$ di tutte le parole sull'alfabeto T (§1). Si può attribuire a ciascun insieme S_i ($i = 1, 2, ..., n$) un *peso* p ossia si può definire un'applicazione

$$\pi : P(\mathscr{G}) \rightarrow \mathscr{N}$$

dell'insieme $P(\mathscr{G})$ delle parti dell'insieme $\mathscr{G}$ di tutte le parole sull'alfabeto T (§ 1), definendo $\pi(p)$ come la cardinalità dell'insieme (discreto) $p \in P(\mathscr{G})$.

Nell'insieme $P(\mathscr{G})$ delle parti di $\mathscr{G}$ è inoltre facile definire una *distanza* $d(p, q)$ tra due parti p, q, dotata delle usuali proprietà $d(p, d) = 0$, $d(p, q) \geq 0$, $d(p, q) = d(q, p)$ e della proprietà triangolare. Si dimostra facilmente che una tale funzione può essere il peso della somma $p \oplus q$ di anello booleano di p e q, ossia

$$d(q, q) = \pi(p \oplus q).$$

Allora per la proprietà triangolare, detto S_0 lo stato iniziale del semiautoma Σ, per ogni $i = 1, 2, ..., n-1$ si ha

$$d(P_i, P_{i+1}) < d(P_i, S_0) + d(S_0, P_{i+1}).$$

Invece l'essere

$$\sum_1^n{}_i\, d(P_i, P_{i+1}) \gtreqless d(P_1, S_0) + d(S_0, P_n) \qquad (2)$$

dipende ovviamente dal numero dei lati della poligonale (astratta) $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, corrispondente alla successione $P_1, P_2, ..., P_n$ delle immagini virtuali (§ 4), valendo certamente nella (2) il segno inferiore per $n = 2$.

6. Nella (2) del § 5 si scorge una suggestiva interpretazione dell'illusione ottica da cui si è partiti (§ 4). Assimilando il peso p di un insieme P di parole, ossia la cardinalità di tale insieme, all'energia occorrente per sintetizzare tali parole, diventa evidente che la lunghezza di ogni singolo lato della poligonale

P_1, P_2, ..., P_n (§ 5) è tanto più piccola quanto più due insiemi consecutivi, corrispondenti ad un lato di tale poligonale, hanno numerose parole in comune, a causa della ben nota definizione di somma di anello booleano. Quanto più piccolo è n (nella (2)) ossia quanto minore è la distanza angolare delle due sorgenti luminose, tanto più sarà soddisfatta la (2) con il segno inferiore. Più precisamente esiste un intero n_0, da dirsi *soglia* per la (2), tale che per $n<n_0$ valga la (2) con il segno inferiore e per $n \geq n_0$ valga la (2) con il segno superiore.

7. In termini di percezione visiva si può ora dire che quanto più sono vicine le sorgenti luminose alternative tanto più piccolo è il dispendio energetico della percezione a stadi intermedi. Il semiautoma Σ risparmia energia di saturazione investendo piccoli incrementi di energia *per percepire le sorgenti luminose virtuali (inesistenti)* (§ 6) P_2, P_3, ..., P_{n-1} piuttosto che cancellando le parole corrispondenti alla percezione di P_1 e inversamente. La soglia n_0 corrisponde, da questo punto di vista, alla *soglia di convenienza energetica nel processo di saturazione percettiva degli stimoli.*

Ciò spiega in maniera assai suggestiva la scomparsa improvvisa dell'illusione ottica al crescere dell'angolo apparente α fra le due sorgenti alternative (§ 4):

la scomparsa avviene in corrispondenza al superamento della soglia n_0, ossia dell'angolo α corrispondente.

Invece la casuale scomparsa del fenomeno per qualche breve intervallo di tempo ad angolo α costante si spiega assai bene con l'esistenza di soglie energetiche nel rifornimento energetico continuo di risorse metaboliche all'apparato visivo.

Si può difendere l'opinione che la descrizione in termini algebrico-combinatori che qui è stata esposta è assai più adatta alla modellazione matematica dei fenomeni a soglia tipici della biologia e della economia (macro e micro) del tradizionale apparato analitico fondato essenzialmente sui concetti di proporzionalità e continuità.

BIBLIOGRAFIA

1. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Matem. di Brescia, Italy, 9 (1988), 107-121.

2. G. MELZI, *Optical illusion as an Example of Fuzzy-perception*, TÜV, Verlag, Rheinland (1986), 231-248.

3. G. MELZI, *Sulla definizione di semiautoma*, Rend. Sem. Matem. di Brescia, Italy, 10 (1988), 23-50.