RATIO MATH. 1.
(1990), 51 - 59

Qualche Riflessione sull' Utilità Attesa

Erio Castagnoli
Istituto di Metodi Quantitativi, Università L. Bocconi di Milano

1. Il criterio dell'utilità attesa è certamente il più noto ed il più utilizzato tra quelli che consentono di dare un'ordine di preferenza, in particolare per finalità di scelta, a situazioni aleatorie.

Pur essendo giudicato un modo estremamente naturale di esprimere giudizi di prefernza, il criterio dell'utilità attesa non è certamente esente da critiche. Tra le molte che gli sono state mosse, la prima, a mio modo di vedere, è che esso sembra richiedere una funzione d'utilità con significato cardinale sulla cui esistenza sono sempre stato, a dir poco, scettico.

Negli ultimi mesi mi sono reso conto che è possibile dare una reinterpretazione dell'utilità attesa che non richiede il sacrificio intellettuale dell'utilità cardinale e che presenta qualche altro vantaggio. Mi sembra che questa rilettura, seppur molto semplice, direi quasi ovvia, sia nuova. Mi rendo conto che l'impostazione che presento qui apre parecchi problemi sui quali non ho potuto riflettere appieno e con calma. Su di essi tornerò in un prossimo futuro ma i primi risultati e le considerazioni più semplici già mi paiono interessanti.

2. Mi limiterò a considerare variabili aleatorie (v.a.) con supporto limitato $A=[a,b]\subseteq R$: ciò sia per semplicità analitica sia perchè ciò è sufficiente per ogni problema di interesse concreto anche lontano.

La cosiddetta utilità attesa di una v.a. X a valori in A è semplicemente definita come:

$$M(u(X)) = \int_A u(z)\, dF_X(z)$$

essendo u la funzione d'utilità cardinale prescelta e F_X la funzione di ripartizione (f.r.) di X. Donendo essere u crescente (in senso debole) su A, l'utilità attesa esiste per ogni v.a.

Nel seguito supporrò u continua a destra: se così non fosse si potrebbe ridefinirla nei punti di discontinuità facendo in modo che $u(x) = u(x^+)$.

Essendo una funzione d'utilità cardinale univocamente determinata a meno di una trasformazione lineare crescente, si può sempre fare in modo che $u(a) = 0$ e $u(b) = 1$, con il che u appare formalmente una f.r. di una v.a. a valori in A.

Rammento che, se X e Y sono due v.a. indipendenti a valori in A con f.r. F_X e F_Y :

$$Prob(X \geq Y) = \int_A F_Y(z)\, dF_X(z)$$

3. La proprietà sopra richiamata consente immediatamente di rileggere l'utilità attesa di una v.a. Detta infatti V la v.a. di f.r. $u(u = F_V)$, si può senz'altro scrivere:

$$M(u(X)) = Prob(X \geq V)$$

cioè l'utilità attesa di una v.a. appare come la probabilità che essa dia un valore non inferiore a tale V.

L'ordinamento instaurato in un insieme di v.a. dal criterio dell'utilità attesa può dunque essere riletto così: si stabilisce una v.a. V di riferimento e si calcola la probabilità che ogni v.a. dell'insieme sia non inferiore a V; l'ordinamento di preferenza determinato dall'utilità attesa è allora quello stesso indotto da tali probabilità.

In concreto tutto ciò può essere, almeno provvisoriamente, inteso come segue.

Supponiamo di dover scegliere un guadagno aleatorio (lotteria) in un insieme assegnato. Prima di tutto stabiliamo una v.a. che, per es., in base alla nostra esperienza ed alla nostra psicologia, riteniamo "normale" per tipo di situazione che stiamo indagando (oppure "equa", oppure "desiderabile", oppure "pericolosa": quale sia l'aggettivo con il quale materialmente denotarla è, per ora, irrilevante: l'unica cosa che importa è che la intendiamo come pietra di paragone).

$$M(u(X)) = \int_A u(z)\, dF_x(z)$$

essendo u la funzione d'utilità cardinale prescelta e F_x la funzione di ripartizione (f.r.) di X. Donendo essere u crescente (in senso debole) su A, l'utilità attesa esiste per ogni v.a.

Nel seguito supporrò u continua a destra: se così non fosse si potrebbe ridefinirla nei punti di discontinuità facendo in modo che $u(x) = u(x^+)$.

Essendo una funzione d'utilità cardinale univocamente determinata a meno di una trasformazione lineare crescente, si può sempre fare in modo che $u(a) = 0$ e $u(b) = 1$, con il che u appare formalmente una f.r. di una v.a. a valori in A.

Rammento che, se X e Y sono due v.a. indipendenti a valori in A con f.r. F_x e F_Y :

$$Prob(X \geq Y) = \int_A F_Y(z)\, dF_X(z)$$

3. La proprietà sopra richiamata consente immediatamente di rileggere l'utilità attesa di una v.a. Detta infatti V la v.a. di f.r. $u(u = F_v)$, si può senz'altro scrivere:

$$\mathrm{M(u(X)) = Prob(X \geq V)}$$

cioè l'utilità attesa di una v.a. appare come la probabilità che essa dia un valore non inferiore a tale V.

L'ordinamento instaurato in un insieme di v.a. dal criterio dell'utilità attesa può dunque essere riletto così: si stabilisce una v.a. V di riferimento e si calcola la probabilità che ogni v.a. dell'insieme sia non inferiore a V; l'ordinamento di preferenza determinato dall'utilità attesa è allora quello stesso indotto da tali probabilità.

In concreto tutto ciò può essere, almeno provvisoriamente, inteso come segue.

Supponiamo di dover scegliere un guadagno aleatorio (lotteria) in un insieme assegnato. Prima di tutto stabiliamo una v.a. che, per es., in base alla nostra esperienza ed alla nostra psicologia, riteniamo "normale" per tipo di situazione che stiamo indagando (oppure "equa", oppure "desiderabile", oppure "pericolosa": quale sia l'aggettivo con il quale materialmente denotarla è, per ora, irrilevante: l'unica cosa che importa è che la intendiamo come pietra di paragone).

Questa v.a. rappresenta la nostra visione dell'ambiente nel quale siamo chiamati ad operare una scelta. I vari guadagni aleatori sono semplicemente comparati tra loro attraverso la probabilità che diano un risultato non peggiore di quello ottenuto dalla v.a. di riferimento. Per essere chiaro, non voglio sostenere che tale atteggiamento riscuota le mie incondizionate simpatie; sto solo affermando che il criterio dell'utilità attesa può essere riletto in tal senso, ovvero che la scelta di una funzione d'utilità equivale alla scelta di una v.a. di riferimento.

4. Ciò che precede consente di affermare che:

(i) L'utilità u(x) di un generico valore $x \in A$ è semplicemente:

$$u(x) = \text{Prob}(V \leq x)$$

cioè è la probabilità che, secondo la visione descritta da V, si sarebbe potuto ottenere un risultato inferiore o uguale a x.

Ciò mi sembra piuttosto sottoscrivibile.

Consideriamo un importo certo di denaro: Se mi si chede qualè il grado di soddisfazione che ne ritraggo, francamente non so che cosa rispondere: anzi ritengo proprio che, in questi termini, la domanda sia priva di senso.

Se invece colloco tale importo all'interno di un problema nel quale avrei potuto guadagnare un imprto aleatorio e sul quale manifesto un'opinione, mi sembra ragionevole rispondere che la mia soddisfazione è tanto più alta quanto più lo è la probabilità che avrei potuto guadagnare di meno, anzi, addirittura, mi sembra naturale misurare la soddisfazione attraverso tale probabilità.

(ii) La dominanza stocastica del prim'ordine può essere riletta in modo efficace .X domina Y se:

$$M(u(X)) \geq M(u(Y)) \text{ per ogni funzione crescente } u$$

cioè se:

$$\text{Prob}(X \geq V) \geq \text{Prob}(Y \geq V) \text{ per ogni v.a. } V$$

cioè se, qualunque sia la v.a. di riferimento, X ha miglior probabilità di Y di superare V.

Una qualunque dominanza stocastica può essere riletta negli stessi termini immaginando di restringere a una classe $\mathcal{V}$ le v.a. di riferimento:

$$\mathrm{Prob}(X \geq V) \geq \mathrm{Prob}(Y \geq V) \;\; \forall\, V \in \mathcal{V}$$

(iii) Quando $u = F_V$ sia strettamente crescente e continua, il certo equivalente di una v.a.:

$$C(X) = u^{-1}(M(u(X)))$$

è il valore certo per il quale:

$$\mathrm{Prob}(X \geq V) = \mathrm{Prob}(C(X) \geq V)$$

cioè tale da avere la stessa probabilità di eccedere la v.a. di riferimento.

La cosa può farsi anche più in generale definendo:

$$u^{-1}(t) = \inf\{z\colon u(z) > t\}$$

(iv) Qualora V sia degenere nel solo valore k, il criterio dell'utilità attesa coincide con il criterio della probabilità di rovina:

$$M(u(X)) = \mathrm{Prob}(X \geq k) = 1 - \mathrm{Prob}(X < k)$$

5. Un punto critico della rilettura che propongo è ovviamente l'interpretazione da dare a V.

Mi sembra che le possibilità siano parecchie. Accenno a qualcuna.

(i) V potrebbe essere la v.a. che il decisore ritiene "equa", nel senso sostanziale che giudica indifferente acqistarla o cederla.

In questo senso può essere facilmente riletto l'esperimento mentale che conduce a fissare per punti una funzione d'utilità (e che ora può essere indifferentemente riletta come f.r.).

Ci si chiede qualè l'importo certo indifferente a una scommessa che, con probabilità 1/2, può far guadagnare a o b.

Detto x_1 tale importo, deve essere $u(x_1) = 1/2$. Si continua chiedendosi l'importo x_2 indifferente alla scommessa che, sempre con probabilità 1/2, può far guadagnare a o x_1: dev'essere $u(x_2) = 1/4$, e così via.

Nel seguito indicherò con a 1/2 b, a 1/2 x_1 le lotterie appena nominate.

Questa costruzione richede in sostanza l'indifferenza tra comprare e vendere una scommessa immaginando che, in ogni caso, vi sia un'asettica indifferenza tra importi certi e scommesse.

Ciò non sempre avviene in concreto, tanto più che un decisore affronta un problema o come compratore o come venditore e non da un punto di vista neutro.

La rilettura proposta consente di tener conto di tutto ciò. Infatti:

(ii) V potrebbe essere una v.a. "desiderabile" ovvero acquistabile.

Si può immaginare lo stesso esperimento mentale, indicando ora con x_1, x_2,, ecc... i prezzi massimi che si è disposti a pagare per acquistare le lotterie a 1/2 b, a 1/2 x_1, ecc...

(iii) V potrebbe essere una v.a. "indesiderabile" ovvero vendibile.

Ancora si può immaginare lo stesso esperimento mentale dove x_1, x_2, ecc... sono i prezzi minimi che si è disposti a ricevere per cedere le lotterie a 1/2 b, a 1/2 x_1, ecc...

In tal modo le decisioni di acquisto o di vendita di lotterie potrebbero condurre a ordinamenti anche molto diversi: psicologicamente si può immaginare un meccanismo di offerte di acquisto di vendita in busta chiusa per stabilire via via x_1, x_2, ecc...

In tal modo l'impostazione proposta consentirebbe di tener conto in modo semplice e naturale delle ovvie differenze che si riscontrano in concreto nei problemi nei quali si acquista o si cede rischio: per esempio comprare biglietti di lotterie e assicurarsi possono apparire inspiegabili se si accetta l'idea di utilità come livello di soddisfazione.

Consentirebbe anche di consacrare che il rischio può essere anche desiderabile: sicuramente lo è quando l'aletorietà non può che produrre miglioramenti rispetto alla situazione esistente.

(iv) V potrebbe essere una v.a. ritenuta "normale" o "di mercato".

In altre parole V potrebbe essere dotata di f.r. stimata o financo solo storicamente osservata nel mercato, ammesso che ve ne sia uno, nel quale si interviene (per es., rendimento dei titoli, quatazioni di valute estere, ecc...).

L'ipotesi di equilibrio metterebbe in moto le abituali teorie economiche per le quali i mercati sono, per loro natura, equi.

(v) V potrebbe essere la f.r. di un mercato parallelo o concorrenziale a quello nel quale si interviene. Con ciò si potrebbero stabilire "parità soggettive" tra mercati.

E' chiaro che, mutando l'intepretazione di V, mutano i valori di $M(u(X)) = \text{Prob}(X \geq V)$ e quindi, in definitiva, i giudizi: ciò mi sembra un pregio di flessibilità e di naturalezza che, d'altra parte, richiede un'attenta ed onesta riflessione del decisore sulla scelta di una particolare v.a. di riferimento.

Credo anche che, nella rilettura proposta, trovi una semplice collocazione l'"avversione al rischio". Essa non avrebbe più una posizione separata ma potrebbe, e dovrebbe, essere direttamente inglobata in V: la distribuzione di riferimento di un decisore prudente è diversa (in linea generale, nei casi (i) e (ii), puntualmente più elevata) da quella di un decisore imprudente.

6. Se consideriamo ora vettori aleatori, l'interpretazione data sopra presenta un ulteriore vantaggio. Supporrò ancora che i vettori aleatori abbiano un supporto limitato $A \subseteq R^n$ che si può sempre immaginare compatto.

E' noto che le seguenti proposizioni sono equivalenti per $n = 1$ ma non lo sono più per $n > 1$ (Marshall e Olkin (1979)):

(1) $\text{Prob}(X > Z) \geq \text{Prob}(Y > Z)\ \forall Z \in A$

(2) $\text{Prob}(X \leq Z) \leq \text{Prob}(Y \leq Z)\ \forall Z \in A$

(3) $M(u(X)) \geq M(u(Y))$ per ogni $u: A \rightarrow R$ crescente

(4) $g(X)$ domina secondo la dominanza stocastica del prim'ordine $g(Y)$ per ogni $g: A \rightarrow R$ crescente

(5) $\text{Prob}(X \in B) \geq \text{Prob}(Y \in B)\ \forall\ B \subseteq A$ con funzione indicatrice crescente.

(In quel che precede "crescente" sta per crescente debolmente componente per componente; essendo u e g definite su un compatto si può sempre fare in modo che assumano valori tra 0 e 1).

Per $n > 1$ valgono le seguenti implicazioni:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \Rightarrow 2 \\
5 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 3 \\
\qquad\qquad\quad \Rightarrow 1
\end{array}
$$

E' particolarmente fastidioso che, nè dalla (1) nè dalla (2), segua la diseguaglianza (3) sulle utilità attese.

Valgoni però i due seguenti teoremi che consentono facilmente di vedere dove stia la radice del problema.

TEOREMA - $\text{Prob}(X > Z) \geq \text{Prob}(Y > Z)\ \forall\ Z \in A$ se e solo se $M(u(X)) \geq M(u(Y))$ per ogni f.r. u.

TEOREMA - Prob $(X \leq Z) \leq$ Prob $(Y \leq Z)$ $\forall Z \in A$ se e solo se $M(u(X)) \leq M(u(Y))$ per ogni funzione u che sia il complemento a uno di una f.r. (funzione di sopravvivenza).

Per maggiore chiarezza torno al caso $n = 1$: qui l'utilità di un valore certo x poteva essere riletta come la probabilità di registrare un esito non migliore di x: brevemente la probabilità che x si lascia alle spalle.

Ovviamente si poteva anche intendere l'utilità come il complemento a uno della probabilità di ottenere, secondo la distribuzione di riferimento, un valore migliore di x, cioè come il complemento a uno della probabilità che x si trova di fronte:

$$u(X) = \text{Prob}\,(V \leq X) = 1 - \text{Prob}\,(V > X)$$

Per $n > 1$, Prob $(V \leq X)$ e Prob $(V > X)$ non hanno più somma uno.

Secondo la rilettura proposta, esistono dunque due possibilità per attribuire utilità ad un $x \in A$:

$$u_i(x) = \text{Prob}(V \leq x)$$

$$u_a(x) = 1 - \text{Prob}(V > x)$$

che potremmo chiamare "utilità all'indietro" e "utilità in avanti": rispettivamente le probabilità che, secondo la distribuzione di riferimento, x si lascia alle spalle e il complemento a uno di quella che x si trova di fronte (se si preferesce si potrebbe chiamare $u_i(X)$ "utilità di X" e $1 - u_a(x) = \text{Prob}(V > x)$ "disutilità" o "rammarico").

Risulta ovviamente:

$$M(u_i(X)) = \text{Prob}(V \geq x)$$

$$M(u_a(X)) = 1 - \text{Prob}(X > V) = \text{Prob}(X \ngeq V)$$

Prendendo u_i, in forza del primo teorema, si ha:

$$3 \Leftrightarrow 2$$

mentre prendendo u_a si ha:

$$3 \Leftrightarrow 1$$

e si riottengono delle equivalenze, come nel caso scalare, tra disuguaglianze sulle f.r. o di sopravvivenza) e tra disuguaglianze su utilità attese.

7. In breve, nel caso $n > 1$, la non equivalenza delle cinque proposizioni era da ascrivere al fatto che $\leq$ rappresenta una relazione d'ordine parziale e non totale come per $n = 1$: l'inconveniente si supera ragionando in termini di $\geq$ e $\not\geq$ anzichè in termini di $\geq$ e $<$.

In altre parole quando si ragiona su $u_i(x) = \text{Prob}(V \leq x)$, la probabilità che x si lascia alle spalle, non si distingue più tra Prob($V > X$) e Prob(V non confrontabile con X), cioè tra probabilità che x si trova di fronte o "ai fianchi".

Viceversa, quando si ragiona su $1\text{-}u_a(u) = \text{Prob}(V > X)$, la probabilità che x si trova di fronte, non si distingue tra Prob($V \leq x$) e Prob(V non confrontabile con X), cioè tra la probabilità che x si lascia alle spalle o ai fianchi. E' chiaro che queste sono le due probabilità estreme e che, tra esse, altre meritano di essere studiate.

E' altrettanto chiaro che, quando il vettore aleatorio X sia sintetizzato in una v.a. g(X) con g: $A \to R$ crescente (tipicamente attraverso un sistema di prezzi), si dota A di un ordine totale che affina l'ordine instaurato da $\leq$ e quindi la doppia possibilità sparisce. In questo senso si può rileggere la proposizione (4) che chiede che si abbia dominanza stocastica del prim'ordine qualunque sia la funzione g di sintesi: qualora si scelga effettivamente una ben precisa g si ritorna nel caso scalare.

Le possibilità intermendie alle quali accennavo sopra possono allora essere viste come l'aver fissato una classe G di funzioni di g di sintesi che si vogliona ritenere ammissibili.

Su questi particolari mi riprometto di tornare in dettaglio in un lavoro successivo.

8. In conclusione mi sembra interessante far rilevare come la reinterpretazione qui vista dell'utilità attesa mostri come essa possa ritenersi fondata su un giudizio ordinale ($X \geq V$) e che l'utilità di un importo certo di denaro possa essere considerata una misura cardinale (essendo una probabilità) di un tale giudizio.

Attraverso questa rilettura dell'utilità attesa si può facilmente saldare la dominanza stocastica con la dominanza in probabilità e, in partcolare, con la dominanza stocastica di ordine zero (Castagnoli (1985)).

Anche l'utilità S.S.B. di Fisliburn può farsi rientrare in questa lettura.

BIBLIOGRAFIA

E. CASTAGNOLI (1985): "Some remarks on Stochastic Dominance", **Riv. Mat. Appl. Sci. Ec. Soc., 7, pagg. 15-28.**

A.W. MARSHALL, I. OLKIN (1979): "Inequalities", **Academic Press, New York.**

M. OTTAVIANI (1973): "Sulla relazione fra una impostazione della teoria dell'utilità e la probabilità di fallimento", **Dipartimento di Ricerca Operativa e Scienze Statistiche dell'Università di Pisa.**