Numero 1 - 1990

RATIO MATHEMATICA

Atti del Convegno di

Matematica Applicata all'Economia e all'Ingegneria

Pescara 26, 27, 28 Gennaio 1989

a cura di

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo

Questo primo fascicolo di RATIO MATHEMATICA, assieme al secondo, contiene i lavori esposti al Primo Convegno Nazionale di Matematica Applicata all'Economia e all'Ingegneria, svoltosi a Pescara il 26,27,28 Gennaio 1989.

Non desideriamo commentare il contenuto scientifico del convegno, ma solo riportare le dichiarazioni di tre illustri partecipanti, dichiarazioni apparse su: L'Università D'Annunzio, Periodico d'informazione dell'Ateneo, anno IV, nn. 1-2, 1989.

Giovanni MELZI (Ordinario di Matematica Generale - Milano - Cattolica). Convegno riuscitissimo: è un giudizio senza riserve sugli esiti del Convegno, specialmente per quelli che avranno rilevanza dopo, nel seguito delle ricerche dei singoli partecipanti. Il momento del confronto, l'impegno a spiegare ai compagni di cordata lo stato dei tuoi studi sono occasioni di consolidamento di propositi, incoraggiamento a proseguire e, se ne è il caso, di ripensamento critico dei punti di partenza. L'esperienza più piacevole è quella della constatazione dell'esistenza di spinte concordi al di là di differenze apparentemente irriducibili. Credo di aver sentito più che osservato una spinta irresistibile verso il superamento delle barriere delle varie specializzazioni, che - quasi incredibile per i non addetti ai lavori - che, sono molte anche in un gruppo così numericamente ridotto di studiosi. Grazie Prof.Eugeni. E bravo !

Lorenzo PECCATI (Ordinario di Matematica Finanziaria - Torino). I progressi più significativi in numerosi campi di indagine scientifica registrati in questi ultimi anni sono sempre più osservati su temi di frontiera tra discipline diverse. Questo è vero soprattutto nella Matematica Applicata, ove almeno due sono i poli: la matematica e il dominio di applicazione. Il Convegno svoltosi in questi giorni è stato un'ottima occasione di confronto tra specialisti di aree differenti. L'interscambio tra associazioni scientifiche e gruppi di ricerca che nei fatti sono "compagni di strada" va iniziato, coltivato e sviluppato con grande pazienza: i risultati non mancheranno. Grazie dunque a ideatori ed organizzatori per quest'occasione stimolante.

Aniello RUSSO SPENA (Ordinario di Tecniche della Bonifica - L'aquila). La varietà dei temi trattati nelle relazioni generali e nelle comunicazioni su argomenti specifici, assieme alle approfondite discussioni che a queste sono seguite, hanno fornito l'opportunità a cultori di discipline apparentemente molto distanti tra loro di confermare, in maniera chiarissima, che le impostazioni di principio e metodologiche delle scienze applicate sono da considerarsi sostanzialmente comuni. Sotto questo aspetto il Convegno organizzato dal Prof. Eugeni può considerasi perfettamente riuscito, e di questo dobbiamo essergli grati.

Circa Ratio Mathematica il nostro intento è semplicemente quello di creare una Rivista agile nei tempi di stampa e nella forma di Referee.

I singoli volumi saranno tematici e saranno decisi di volta in volta da curatori della rivista.

Franco Eugeni e Mario Gionfriddo.

Direttore responsabile
Prof. Franco Eugeni

(autorizzazione Num. 9/90 del 10.07.1990 del Tribunale di Pescara)

Fascicolo realizzato con il contributo del Dipartimento di Scienze e Storia dell'Architettura. Hanno collaborato alla realizzazione di questo fascicolo: il Prof. Antonio Maturo e gli Ing. Giuseppe Di Biase, Domenico Marconi e Giovanni Mataloni.

RATIO MATH. 1.
(1990), 1 - 14

Funzioni di Costo Minimo e di Ricavo Massimo come Coniugate Parziali della Funzione di Profitto e Conseguenze

Ilio Adorisio (*) e Luigia Berardi (**)
(*) Università "La Sapienza" - Roma
(**) Università degli studi di L'Aquila - Facoltà di Ingegneria

1. INTRODUZIONE

Richiamiamo, per completezza, alcune definizioni e teoremi di analisi convessa, che saranno utili nel seguito (cfr. [6]).

Data una funzione convessa $y = f(x)$, $x \in R^n$, $y \in R$, si definisce sua coniugata la funzione

$$f^{\wedge}(b) = \sup_x\{xb - f(x)\} = -\inf_x\{f(x) - xb\} \ ,$$

dove $x, b \in R^N$, ed xb è il prodotto interno.

Ricordiamo che una funzione convessa si dice **chiusa** se il suo epigrafo è chiuso, inoltre una funzione convessa ottenuta ponendo $y = \infty$, $\forall x \notin \mathrm{dom}\, f$ è detta **propria**.

Sussistono le seguenti proprietà:

(a) La funzione $f^{\wedge}$ **coniugata** di una funzione convessa f è una funzione convessa **chiusa**, propria se e solo se f è **propria**. Inoltre $(\mathrm{chius}\, f)^{\wedge} = f^{\wedge}$ ed $f^{\wedge\wedge} = \mathrm{chius}\, f$.

(b) Il sottodifferenziale di una funzione convessa e quello della sua coniugata sono l'uno funzione inversa dell'altro.

(c) L'insieme delle direzioni di recessione $D=\{x+\lambda y \mid \lambda \geq 0\}$, $x \in \operatorname{conv} C$ è il cono di recessione di C, denotato con $O^{+}C$.

(d) Un insieme non vuoto può essere individuato dai suoi iperpiani di sostegno. Sia S un qualsiasi sottoinsieme di R^n. Si definisce funzione di sostegno di S la funzione convessa, chiusa, propria, positivamente omogenea di grado 1, dell'argomento $b \in R^n$, $\delta^{\wedge}(b \mid \operatorname{conv} S)=\sup\{bx \mid x \in \operatorname{conv} S\}$. Si ha allora la relazione duale $\operatorname{conv} S=\{x \mid bx \leq \delta^{\wedge}(b \mid \operatorname{conv} S)\}$ con le ovvie semplificazioni se $S=C$ è convesso, ossia se l'insieme è convesso, la funzione di sostegno descrive l'insieme e non la sua estensione convessa.

(e) Dato un convesso C (eventualmente $C=\operatorname{conv} S$) il dominio di definizione della funzione di sostegno $\delta^{\wedge}(b \mid C)$ è un cono (eventualmente mancante dell'origine) che viene detto cono barriera e che può risultare non chiuso. Tuttavia vale la proprietà secondo la quale il polare del cono di recessione di C costituisce la chiusura del cono barriera.

(f) Il sottodifferenziale $\partial f(x)$ della funzione convessa $f(x)$ è un insieme convesso chiuso. La corrispondenza $\rho(x)=\partial f(x)$ è semicontinua dal di sopra.

(g) Il sottodifferenziale della funzione di sostegno di C, chiuso, non vuoto, è l'insieme, $\forall b$, dei punti, se esistono, dove la funzione lineare bx raggiunge il *massimo; ossia è una faccia esposta di C. Se è $C=\operatorname{conv} S$, allora non tutti i punti così individuati sono di massimo, ma solo quelli che appartengono alla* intersezione tra la faccia esposta e l'insieme S.

(h) Si chiama polare del convesso C l'insieme C° di livello 1 della sua funzione di sostegno, ossia $C^{\circ}=\{b \mid \delta^{\wedge}(b \mid C) \leq 1\}=\{b \mid bx \leq 1, \forall x \in C\}$. Se C è un convesso chiuso contenente l'origine il suo polare C° è un altro insieme chiuso, contenente l'origine ed è inoltre $(C^{\circ})^{\circ}=C$. Esiste così una corrispondenza tra le faccie esposte di C e quelle di C°; queste ultime forniscono le direzioni dei vettori che sono massimizzanti per la corrispondente faccia esposta di C.

(i) Dato un convesso $C \neq \phi$, si definisce funzione di calibro la funzione convessa, positivamente omogenea di grado 1, data da $\gamma(x \mid C)=\inf\{\lambda \geq O \mid x \in C\}$. Se $O \in C$, l'insieme C è l'insieme di livello 1 della sua funzione di calibro e, nelle stesse condizioni, esiste una corrispondenza duale tra funzione di calibro e di sostegno, data dal fatto che la funzione di sostegno di C è la funzione di calibro di C°, mentre la funzione di calibro di C è la funzione di sostegno di C°.

Avvertiamo inoltre che per tutto quanto non esplicitamente richiamato nella nota, ovvero per approfondimenti ed esemplificazioni dei concetti usati si fa esplicito riferimento a [2].

Nel paragrafo 2 di questa nota riportiamo una sintesi delle applicazioni della dualità in analisi convessa nella teoria economica.

Nel paragrafo 3 sono riassunte le applicazioni nella teoria economica di una particolare dualità, quella esistente tra una funzione e la sua coniugata.

Nel paragrafo 4 vengono trattate le proprietà duali tra la funzione di *produzione e le funzioni di costo minimo o ricavo massimo.*

Infine, nel paragrafo 5, ci occupiamo di funzioni di produzione congiunta con insiemi di produzione non necessariamente convessi. Introduciamo il concetto di coniugata parziale di una funzione e stabiliamo relazioni duali tra la funzione di profitto e le funzioni di costo o ricavo. L'introduzione della funzione di costo generalizzata permette di dare una soluzione del classico **paradosso di Calais.**

2. SINTESI DELLE APPLICAZIONI NELLA TEORIA ECONOMICA DELLA DUALITA' IN ANALISI CONVESSA

Sintetizziamo ora quanto si rinviene in letteratura circa le applicazioni dei teoremi di analisi convessa richiamati nel paragrafo 1.

Sia $y = | q,z | \in R^{n+m}$ un vettore di produzione essendo $q=(q_1, ..., q_n)$, dove $q_i \geq 0$ sono gli n prodotti e $z=(z_1, z_2, ..., z_m)$ dove $z_i \leq 0$ gli m fattori. Supponiamo che l'insieme Y dei vettori y sia chiuso e non vuoto. L'insieme Y è un sottoinsieme del prodotto dell'ortante positivo o^+ dello spazio dei prodotti per l'ortante negativo o^- di quello dei fattori.

Allo scopo di semplificare le notazioni, seguendo la terminologia adottata in | 2 |, definiamo **frontiera superiore** di un convesso C l'insieme (se esiste) F^+C definito da:

$$F^+C = \{x \in \text{chius } C \mid bx = \delta^\wedge(x \mid C), \forall b > 0\} .$$

Si noti che, se C è superiormente limitato, esso ammette una frontiera superiore (non vale il viceversa).

Inoltre, definiamo **efficiente superiore** dell'insieme generico S l'insieme:

$$E^+S = \{x \in \text{chius } S \mid x \notin D_x, \forall x \in \text{chius } S\} ,$$

dove D_x è l'insieme dominato dal vettore x. L'efficiente superiore è l'insieme dei vettori appartenenti a chius S che non sono dominati da nessun vettore appartenente allo stesso insieme.

Se l'insieme è convesso è anche $F^+C = E^+C$.

Si noti che l'insieme conv Y che ammette un efficiente superiore, il cui cono

Nel paragrafo 3 sono riassunte le applicazioni nella teoria economica di una particolare dualità, quella esistente tra una funzione e la sua coniugata.

Nel paragrafo 4 vengono trattate le proprietà duali tra la funzione di *produzione e le funzioni di costo minimo o ricavo massimo.*

Infine, nel paragrafo 5, ci occupiamo di funzioni di produzione congiunta con insiemi di produzione non necessariamente convessi. Introduciamo il concetto di coniugata parziale di una funzione e stabiliamo relazioni duali tra la funzione di profitto e le funzioni di costo o ricavo. L'introduzione della funzione di costo generalizzata permette di dare una soluzione del classico **paradosso di Calais.**

2. SINTESI DELLE APPLICAZIONI NELLA TEORIA ECONOMICA DELLA DUALITA' IN ANALISI CONVESSA

Sintetizziamo ora quanto si rinviene in letteratura circa le applicazioni dei teoremi di analisi convessa richiamati nel paragrafo 1.

Sia $y = | q,z | \in R^{n+m}$ un vettore di produzione essendo $q = (q_1, ..., q_n)$, dove $q_i \geq 0$ sono gli n prodotti e $z = (z_1, z_2, ..., z_m)$ dove $z_i \leq 0$ gli m fattori. Supponiamo che l'insieme Y dei vettori y sia chiuso e non vuoto. L'insieme Y è un sottoinsieme del prodotto dell'ortante positivo o^+ dello spazio dei prodotti per l'ortante negativo o^- di quello dei fattori.

Allo scopo di semplificare le notazioni, seguendo la terminologia adottata in | 2 |, definiamo **frontiera superiore** di un convesso C l'insieme (se esiste) F^+C definito da:

$$F^+C = \{x \in \text{chius } C \mid bx = \delta^\wedge(x \mid C), \forall b > 0\} .$$

Si noti che, se C è superiormente limitato, esso ammette una frontiera superiore (non vale il viceversa).

Inoltre, definiamo **efficiente superiore** dell'insieme generico S l'insieme:

$$E^+S = \{x \in \text{chius } S \mid x \notin D_x, \forall x \in \text{chius } S\} ,$$

dove D_x è l'insieme dominato dal vettore x. L'efficiente superiore è l'insieme dei vettori appartenenti a chius S che non sono dominati da nessun vettore appartenente allo stesso insieme.

Se l'insieme è convesso è anche $F^+C = E^+C$.

Si noti che l'insieme conv Y che ammette un efficiente superiore, il cui cono è l'espressione implicita di una funzione, parte della quale è la funzione di produzione, purché il dominio di definizione sia opportunamente delimitato.

Sussistono inoltre le relazioni:

$$y^o \in \partial \prod(p^o \mid \text{conv } Y) \Leftrightarrow \gamma(y^o \mid \text{conv } Y) = 1$$

$$p^o \in \partial\gamma(y^o \mid \text{conv } Y) \Leftrightarrow \prod(p^o \mid \text{conv } Y) = 1$$

che riassumono la dualità tra l'insieme di produzione ed il suo polare.

3. SINTESI DELL'APPLICAZIONE NELLA TEORIA ECONOMICA DELLA DUALITA' DEFINITA DALLA FUNZIONE CONIUGATA

Le nozioni richiamate in 1, applicate alla teoria della produzione consentono notoriamente di stabilire delle dualità tra funzione normalizzata di profitto e funzione di produzione. Ne richiamiamo gli aspetti essenziali.

Indichiamo con $x \geq 0$ i fattori produttivi in numero di n e con $q = f(x) > 0$ la funzione di produzione dell'unico prodotto q. In questo caso il massimo profitto è

$$\Pi(p,\bar{p}) = \sup_x\{pf(x)-\bar{p}x\}$$

dove p è il prezzo del prodotto e $\bar{p} \in R^n$ è il vettore dei prezzi dei fattori. Definiamo **profitto massimo normalizzato** $\Pi'(p')$ l'espressione

$$\Pi'(p') = \Pi(p,\bar{p})/p = \sup_x\{f(x)-p'x\} .$$

La funzione di profitto normalizzata è la coniugata di $-f(x)$. Segue che, se la funzione di produzione è concava, allora $\Pi'(p')$ è convessa e decrescente.

Inoltre, poiché il sottodifferenziale di una funzione convessa e quello della sua coniugata sono l'uno funzione inversa dell'altra, si ha che:

$$\bar{p} \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in -\partial \prod'(p') . \tag{3.1}$$

Chiaramente, se la funzione di produzione, oltre che concava, è differenziabile o poliedrica o omotetica ecc., si hanno tutte le conseguenze note sulla funzione di massimo profitto normalizzato.

Tali proprietà sono sfruttate econometricamente per risolvere il problema, ritenuto più agevole, di risalire dalle proprietà delle funzioni di profitto alle proprietà dell'insieme Y delle possibilità tecniche di produzione.

Supponiamo che la funzione di produzione (generalmente quella di breve periodo) dipenda anche da parametri costanti, ossia che $q = f(x,w)$ dove w è il vettore dei parametri costanti, inoltre supponiamo che essa sia differenziabile due volte. In tal caso, applicando la trasformata di Legendre, si ottengono le condizioni di Hotelling, formulate nel 1932:

$$\nabla_w f = \nabla_w \Pi' . \tag{3.2}$$

Essendo

$$f(x)-\Pi'(p') = p'x ,$$

dalla (3.1) si ha l'ulteriore relazione duale:

$$f = \Pi' + p'\nabla_{p'}\Pi' \qquad \Pi' = f - x\nabla_x f .$$

La trasformata di Legendre consente una ulteriore applicazione al caso di produzione congiunta. Sia $H(y) = 0$ la funzione di produzione, nella quale $y = (q,z,x)$ ove $q \geq 0$ ha n componenti, $z = -x \leq 0$ ha m componenti ed $x > 0$ è un fattore non riproducibile. Per definizione, la funzione di produzione rappresenta il massimo ottenibile di ciascun fattore, assegnati tutti gli altri prodotti e tutti i fattori oppure, equivalentemente, il minimo di ciascun fattore, assegnati tutti gli altri fattori e tutti i prodotti. Perciò, se esplicitiamo la funzione di produzione, scrivendola nella forma:

$$x = F(q,z) ,$$

e supponiamo che F sia convessa, dividendo il profitto per il prezzo del fattore $(m+1)$-mo possiamo scrivere una nuova espressione del massimo profitto normalizzato come

$$\Pi'' = \sup_{qz}\{p_q q + p_z z - F(q,z)\} .$$

Quindi, ammessa la differenziabilità di F e supposto che il suo dominio di definizione si estenda al prodotto degli ortanti positivo e negativo interessati, si ottiene una generalizzazione del lemma di Hotelling, data dalla corrispondenza duale:

$$\nabla_q F = p_q \qquad \nabla p_q \Pi'' = q$$

$$\nabla_z F = p_z \qquad \nabla p_z \Pi'' = z$$

4. DUALITA', FUNZIONE DI PRODUZIONE, DI COSTO MINIMO E RICAVO MASSIMO

Riprendiamo in esame la funzione di produzione di una azienda con prodotto singolo $q = f(x)$ e sia f una qualunque funzione numerica continua o semicontinua dall'alto. Il costo minimo di produzione di q è:

$$C(q,p) = \inf_x\{px \mid f(x) \geq q\} .$$

La funzione di costo $C(q,p)$ è positiva, positivamente omogenea di grado 1, concava, continua in p; non decrescente e semicontinua dal basso in q. Se esiste una funzione di costo che soddisfa alle condizioni elencate ed è differenziabile, allora, per la proprietà (g) enunciata in 1, si ottiene il lemma di Shepard:

$$x(p,q) = \nabla_p C(q,p) .$$

Tenuto conto che costo minimo è il minimo, per ogni q, di px sull'insieme di livello q di $f(x)$, ossia $\{x \mid f(x) \geq q\}$, se la funzione di produzione è quasi concava, può essere dualmente ricostruita a partire dalla funzione di costo come frontiera dell'unione di tutti gli insiemi di livello 1 al variare di q.

Più in generale, considerando l'insieme di produzione Y come il grafico di una trasformazione, sia

$$Q = \rho(z) : R^m \rightarrow R^n$$

la corrispondenza che definisce come immagine l'insieme Q che chiamiamo di **trasformazione** e

$$Z = \rho^{-1}(q)$$

l'insieme di sostituzione.

La funzione di costo

$$C(q,p_z) = \delta^\wedge(p_z \mid \mathrm{conv}\, Z)$$

coincide con la funzione di sostegno di Z(q). Essendo Z superiormente limitato, il dominio di definizione di C è l'intero ortante non negativo. Indichiamo con

$$\gamma'(z \mid \mathrm{conv}\, Z(q)) = \gamma'(q,z)$$

la funzione di calibro di Z.

Le relazioni di dualità si sintetizzano in:

$$z^\circ \in \partial\, p_z\, C(q^\circ,p_z^\circ) \Leftrightarrow \gamma'(q^\circ,z^\circ) = 1$$

$$p_z^\circ \in \partial\gamma'(q^\circ,z^\circ) \Leftrightarrow C(q^\circ,p_z^\circ) = 1$$

Ovviamente sono minimizzanti per il costo solo i vettori z° che appartengono alla intersezione tra la faccia esposta di conv Z, individuata dal sottodifferenziale del costo, e l'insieme Z.

Si osservi che le funzioni C e γ' possiedono le seguenti caratteristiche duali: le proprietà di γ' rispetto a z sono identiche a quelle di C rispetto a p_z°; le proprietà di C rispetto a q sono reciproche delle proprietà di γ' rispetto a q.

Anche se la curva dei massimi ricavi non è usata in letteratura, essa merita di essere segnalata per la simmetria rispetto alla curva dei costi (minimi). Il ricavo R è la funzione:

$$R(z,p_q) = \delta^\wedge(p_q \mid \mathrm{conv}\, Q)$$

positiva, positivamente omogenea di grado 1, convessa, continua in p_q, non crescente e semicontinua dall'alto. Ad essa si estendono le dualità con la funzione di calibro relativa all'insieme Q(z).

5. UNA TRATTAZIONE PIU' ESTESA DELLA DUALITA'

Nei paragrafi precedenti riteniamo di aver esposto l'essenziale delle applicazioni dei teoremi della dualità nella teoria della produzione.

Occorre tener presente che spesso in letteratura viene intesa come dualità una semplice corrispondenza. Le sole relazioni attinte alla teoria della dualità sono quelle tra funzioni di profitto (o di costo o di ricavo) e funzioni di calibro.

Le relazioni di dualità corrispondenti al coniugio delle funzioni convesse sono applicate solo in due casi di portata non generale (cfr. par.2).

In questo paragrafo daremo una relazione di dualità coniugata tra funzione di profitto e funzione di costo o di ricavo per il caso generale di produzione congiunta ed insieme anche non convesso.

Probabilmente, tali relazioni non sono state prese in considerazione sino ad ora in ragione del fatto che il grafico della funzione di profitto è un cono e, conseguentemente, la sua coniugata è nulla. Per superare tale ostacolo osserviamo che, se $f(x)$, $x=[u\ w]$ è una funzione convessa, avente le caratteristiche di una funzione di profitto, e si considera la sua intersezione con l'iperpiano $w=w_o=\text{cost.}$, allora la funzione $f(u,w_o)$ è una funzione convessa che ha una coniugata non identicamente nulla.

Definiamo pertanto come **coniugata parziale** della funzione $f(x)=f(u,w)$ l'operatore:

$$f_u{}^{\wedge}(b)=\sup_u\{bu-f(u,w)\}\ ,$$

dove b è un vettore confrontabile con u.

Si riprenda in considerazione l'insieme di produzione Y. Proviamo il seguente

Teorema 5.1. Se Y è convesso, la funzione di costo (minimo) è la coniugata parziale rispetto a p_q della funzione di profitto.

Dimostrazione. Sia $\Pi(p_q,p_z)$ la funzione di profitto. La coniugata parziale:

$$\Pi\, p_q{}^{\wedge} = \sup p_q\ \{p_q q-\Pi(p_q,p_z)\}\ ,$$

si ottiene per i valori ottimali q° tali che

$$q^\circ\in\partial\, p_q\, \Pi(p_q,p_z)\ .$$

Quindi:

$$\Pi_p{}^{\wedge}(p_q,p_z) = p_q{}^\circ q^\circ-(p_q{}^\circ q^\circ+p_z{}^\circ z^\circ) = C(q,p_z)\ .$$

La funzione di costo è una funzione convessa che ha rispetto a q le stesse proprietà che la funzione $\Pi(p_q,p_z)$, $p_z = \text{cost.}$, ha rispetto a p_q.

Tenuto conto della corrispondenza inversa esistente tra le funzioni sottodifferenziali, si ricava:

$$p_q \in \partial_q C(q,p_z) \Leftrightarrow q^\circ \in \partial\, p_q\, \Pi(p_q,p_z)\,,$$

si trova cioè la regola per cui l'eguaglianza del prezzo dei fattori al costo marginale individua la produzione ottimale q°, con tutte le conseguenze dovute all'ipotesi di differenziabilità.

La corrispondenza $\partial_q C(q,p_z)$ è la **funzione dei costi marginali.** Essa è omogenea di grado 1 rispetto ai prezzi dei fattori.

La corrispondenza $\partial\, p_q \Pi(p_q,p_z)$ è la **funzione di offerta dell'impresa**, essa è l'inversa della funzione dei costi marginali.

Per la funzione di ricavo (massimo) si ha una proprietà analoga a quella espressa in 5.1 per la funzione di costo (minimo), infatti

Teorema 5.2. Se Y è convesso, la funzione di ricavo (massimo) R è la funzione opposta della coniugata parziale rispetto a p_z della funzione di profitto.

Dimostrazione. E' del tutto analoga a quella di 5.1.

Segue che

$$p_z \in \partial_z(-R(z,p_q)) \Leftrightarrow z^\circ \in \partial\, p_z \Pi(p_z,p_q)\,.$$

Si ha che la funzione R è concava. La corrispondenza $\partial_z(-R(z,p_q))$ è la **funzione dei ricavi marginali**; essa è omogenea di grado 1 rispetto ai prezzi dei prodotti.

La corrispondenza $\partial\, p_z \prod(p_z,p_q)$ è la **funzione di domanda dell'impresa;** essa è uguale all'opposta della funzione inversa dei ricavi marginali.

I teoremi 5.1 e 5.2 possono essere generalizzati ad insiemi di produzione non convessi, infatti si ha il

Teorema 5.3. Sia Y un insieme di produzione non convesso. Allora la coniugata parziale rispetto a p_q della funzione di profitto è la estensione convessa della funzione di costo minimo e l'opposta della coniugata parziale rispetto a p_z della funzione di profitto è la estensione convessa della funzione di ricavo massimo, ossia si ha:

$$\Pi\ p_q\ \hat{}\ (q,p_z) = \text{conv}\ C(q,p_z)\ ;$$

$$-\Pi\ p_z\ \hat{}\ (z,p_q) = \text{conv}\ R(z,p_q)\ .$$

Dimostrazione. Per la simmetria esistente tra le due relazioni dette nell'enunciato, è sufficiente dimostrare la prima eguaglianza.

Poniamo

$$C(q, p_z) = C(q \mid Y) \ \text{(vera funzione di costo)}$$

$$C^{\circ}(q,p_z) := C(q \mid \text{conv}\ Y, p_z)\ ,$$

ove (cfr. | 2 |, pag. 36)

$$C(q \mid \text{conv}\ Y, p_z) = \begin{cases} C(q \mid Y, p_z) \ \text{se}\ (q,z) \in Y \\ \inf\{\lambda_1 C(q_1) + ... + \lambda_m C(q_m) \mid \lambda_1 q_1 + ... + \lambda_m q_m = q \\ \text{se}\ q \in \text{conv}\ Y\text{-}Y\}\ . \end{cases}$$

Poiché la funzione di profitto è calcolata sempre su conv Y, per quanto detto nel caso di insiemi di produzione convessi, si ha che

$$\Pi\ p_q\ \hat{}\ (q,p_z) = C^{\circ}(q,p_z)\ .$$

Allora è sufficiente provare che

$$\text{conv}\ C(q \mid Y, p_z) = C^{\circ}(q,p_z) := C(q \mid \text{conv}\ Y, p_z)\ .$$

Per definizione, l'estensione convessa (di una qualsiasi funzione, e quindi anche) di $C(q \mid Y, p_z)$, è la funzione il cui epigrafo è l'estensione convessa dell'epigrafo di $C(q \mid Y, p_z)$.

Per definizione di epigrafo si ha

$$\text{epi}\ C(q \mid Y, p_z) = \{(q,z,\mu) \mid (q,z) \in Y, \mu \geq C(q,p_z)\}\ .$$

Denotiamo con A l'insieme seguente:

$$A := \text{conv epi } C(q \mid Y, p_z) =$$
$$= (q,z,\mu) = \lambda_1(q_1,z_1,\mu_1) + \dots + \lambda_m(q_m,z_m,\mu_m)$$

con $(q_1,z_1,\mu_1) \in \text{epi } C(q \mid Y, p_z)$, i.e. $\mu_1 \geq C(q_1 \mid Y,p_z)$.

Denotiamo, inoltre, con B il seguente insieme:

$$B := \text{epi } C(q \mid Y, p_z) =$$
$$= \text{epi } C(q \mid Y, p_z) \cup \text{epi inf}\{\lambda_1 C(q_1) + \dots + \lambda_m C(q_m)$$

con $q_i \in Y, \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_m q_m = q$.

Per provare l'asserto è sufficiente provare che $A = B$.

L'eguaglianza $A = B$ è banalmente verificata per qualsiasi punto di Y.

Supponiamo $(q_o,z_o,\mu_o) \in A$ con $(q_o,z_o) \notin Y$ e proviamo che $(q_o,z_o,\mu_o) \in B$. L'ipotesi implica che

$$q_o = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_m q_m$$

$$z_o = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_m z_m$$

$$\mu_o = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_m \mu_m$$

$$\mu_1 \geq C(q_i \mid Y,p_z)$$

Dalle prime due relazioni segue che $(q_o,z_o) \in \text{conv } Y$, inoltre si ha:

$$\mu_o = \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda m_\mu m \geq$$
$$\geq \lambda_1 C(q_1 \mid Y,p_z) + \dots + \lambda_m C(q_m \mid Y,p_z) \geq$$
$$\geq \inf\{\lambda_1 C(q_1 \mid Y,p_z) + \dots + \lambda_m C(q_m \mid Y,p_z)$$

dunque $(q_o,z_o,\mu_o) \in B$.

Proviamo ora che ogni punto di B è anche in A.

Per i punti di epi $C(q \mid Y,p_z)$ l'asserto è chiaramente verificato. Consideriamo allora un punto $P \in B \setminus \text{epi } C(q \mid Y,p_z)$.

Ciò vuol dire che

$$\mu_o = \mu(P) \geq \inf\{\lambda_1 C(q_1 \mid Y,p_z) + \dots + \lambda_m C(q_m \mid Y,p_z)\}.$$

Segue che

$$\mu_o = \lambda_1 C(q_1 \mid Y,p_z) + ... + \lambda_m C(q_m \mid Y,p_z);$$

allora, se $\mu_1 = C(q_i \mid Y,p_z)$, segue che

$$\mu_o = \lambda_{11} + ... + \lambda_{mm}, \text{ con } \mu_1 \geq C(q_i \mid Y,p_z).$$

Inoltre il punto (q_o, z_o, μ_o), ove

$$q_o = \lambda_1 + ... + \lambda_m q_m,$$
$$z_o = \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_m z_m, \text{ è un punto di A.}$$

Così l'asserto è completamente provato.

I risultati ottenuti consentono di estendere agli insiemi di produzione non convessi la regola ottimale: prezzo = costo marginale; inoltre tali risultati eliminano tutte le complicazioni connesse con il massimo profitto quando la funzione di costo è relativa ad una funzione di produzione quasi concava.

Illustriamo brevemente due delle tante difficoltà che vengono risolte attraverso la funzione di costo generalizzata.

(a) **Il paradosso di Calais** consiste nel seguente problema:

Ci sia una serie di traghetti che debbono servire una domanda passeggeri. L'applicazione della regola prezzo = costo marginale conduce alla seguente conseguenza: il primo passeggero ha un costo marginale pari a quello necessario per muovere il traghetto, se c è la capacità del traghetto, tutti gli altri c-1 passeggeri hanno un costo marginale nullo; il passeggero (c + 1)-mo ha di nuovo un costo marginale pari a quello necessario per muovere il traghetto, mentre quelli successivi zero, ... Il paradosso di Calais discende dall'applicazione della regola prezzo = costo marginale a questa situazione.

Se supponiamo, solo per semplicità, che tutti i traghetti abbiano costo identico, la funzione dei costi totali è una funzione a gradini, la cui estensione convessa si ottiene mediante una retta che congiunge gli spigoli inferiori dei gradini e la cui inclinazione è il costo per passeggero. Allora:

- Se vale l'ipotesi della teoria della produzione di domanda perfettamente elastica, avremo prezzo = costo medio

- Se, invece si cerca l'ottimo di efficienza, allora si ottiene un'offerta perfettamente elastica al costo medio, la quale determina le quantità da trasportare, come punti di intersezione con la funzione di domanda. Poiché tale punto appartiene all'intervallo tra due punti della funzione di costo, l'efficienza richiede che parta solo un numero di traghetti completamente pieni (anche lasciando a terra passeggeri).

(b) Altro esempio è dato da una produzione puntiforme (con solo pochi punti). Considerando i costi medi relativi alle dioverse produzioni e la loro estensione convessa, si ottiene la funzione di costo generalizzata e quindi quella dei costi marginali, che, applicate con le precauzioni dette in precedenza, permettono di decidere la produzione.

SOMMARIO. Nella teoria della produzione è stato usato un complesso di proprietà duali, che vengono riassunte nel paragrafo 2. Inoltre, la dualità definita dalla coniugata di una funzione convessa viene sfruttata, sotto ipotesi restrittive (cfr. par.3), per stabilire corrispondenze tra funzioni di profitto e funzioni di produzione.

In questa nota introduciamo il concetto di coniugata parziale, onde ottenere una relazione duale tra funzione di profitto e funzioni di costo o ricavo, nel caso più generale di produzione congiunta, anche con insiemi di produzione non convessi. I risultati trovano applicazione nella spiegazione del noto Paradosso di Calais.

BIBLIOGRAFIA

| 1 | I: ADORISIO, **Principi di ottimizzazione non lineare.** Patron, Bologna, 1980.

| 2 | I. ADORISIO, **Ingegneria della produzione astratta.** CEDAM, Padova, 1986.

| 3 | A. A. V. V., **Consumer Theory.** Hand book of Math. Econom. vol. II, cap. 9-10-12, edited by Arrow & Intriligator, North Holland P.C., 1982.

| 4 | M. FUSS and Mc FADDEN, **Production economics: a dual approach to theory and applications.** North Holland P.C., Amsterdam-New York-Oxford, (1978).

| 5 | R. HOLMES, **A course on optimization and best approximation.** Lectures Notes 257, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1972).

| 6 | R. T. ROKAFELLER, **Convex Analysis.** Princeton University Press (1970).