SU ALCUNI METODI PER RAZIONALIZZARE LE SCELTE FRA PIU' ALTERNATIVE VALUTATE CON CRITERI MULTIPLI QUANTITATIVI

Antonio MATURO, Giuseppina VARONE
Dip. di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro
Università "G. D'Annunzio", viale Pindaro, 42 - Pescara

SOMMARIO Si presentano alcuni metodi per scegliere quale alternativa, fra quelle appartenenti ad un dato insieme finito, soddisfa maggiormente ad un dato obiettivo.

A tale scopo ogni alternativa A viene valutata in base a piú criteri, qualitativi o quantitativi, che forniscono dei punteggi i quali individuano, rispettivamente, delle misure o delle relazioni di preordine fra le alternative.

Vengono poi presentati degli algoritmi che, in funzione dei punteggi ottenuti, permettono di assegnare ad ogni alternativa A un numero reale, compreso fra 0 e 1, il quale indica in che misura l'alternativa A deve essere considerata preferibile alle altre.

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA

Vi sono n possibilitá di scelta, dette *alternative* o *oggetti*, e k *obiettivi* spesso in contrasto fra loro.

Il raggiungimento o meno di ciascuno degli obiettivi è valutato con uno o piú *criteri di scelta* o *variabili*, assegnando, per ogni criterio, un punteggio ad ogni alternativa che indica il " grado " di soddisfacimento dell'obiettivo da parte dell'oggetto.

I punteggi possono rappresentare una valutazione

(a) di tipo quantitativo se indicano una *misura*;

(b) di tipo qualitativo se sono utilizzati esclusivamente per stabilire una *relazione di preordine* fra gli oggetti, ossia una relazione riflessiva e transitiva che indichiamo con $\leq\cdot$.

Per ogni criterio supponiamo che la relazione sia *totale*.

Siano

$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2,\dots,A_n\}$ l'insieme delle alternative,

$\mathcal{V} = \{ C_1, C_2,\dots,C_m\}$ l'insieme dei criteri qualitativi,

$\mathcal{W} = \{ D_1, D_2,\dots,D_q\}$ quello dei criteri quantitativi.

Diciamo *punteggio* associato al criterio C_j, *compatibile* con $\leq\cdot$, ogni funzione P_j: $\mathcal{A} \to \mathbb{N}$ tale che, $\forall r,s \in \{ 1,2, \dots n \}$,

$$A_r \leq\cdot A_s \Rightarrow P_j(A_r) \leq P_j(A_s).$$

Il punteggio si dice *strettamente compatibile* con $\leq\cdot$ se $\Rightarrow$ è sostituito con $\Leftrightarrow$. Il problema di scelta risulta *implicitamente definito* da una matrice bipartita con n righe ed m+q colonne del tipo

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_j & \ldots & C_m & D_1 & D_2 & \ldots & D_r & \ldots & D_q \end{array} & \\
M = & \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1j} & \ldots & e_{1m} & d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1r} & \ldots & d_{1q} \\
e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2j} & \ldots & e_{2m} & d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2r} & \ldots & d_{rq} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e_{i1} & e_{i2} & \ldots & e_{ij} & \ldots & e_{im} & d_{i1} & d_{i2} & \ldots & d_{ir} & \ldots & d_{iq} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e_{n1} & e_{n2} & \ldots & e_{nj} & \ldots & e_{nm} & d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nr} & \ldots & d_{nq}
\end{array}\right] & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{array} \\
 & \begin{array}{cccccccccccc} P_1 & P_2 & \ldots & P_j & \ldots & P_m & Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_r & \ldots & Q_q \end{array} &
\end{array}
$$

Diciamo *punteggio* associato al criterio quantitativo D_r ogni funzione

$$Q_r : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$$

esprimente le misure attribuite alle varie alternative con il criterio D_r.

Nella matrice M risulta $e_{ij} = P_j(A_i)$, $d_{ir} = Q_r(A_i)$.

2. METODO DEL REGIME

Limitiamoci, per il momento, allo studio di problemi di scelta basati su criteri solo di tipo qualitativo.

La matrice M per q=0 si riduce alla seguente

$$E = \begin{array}{c|ccc|c} & C_1 & C_2 \ldots C_j \ldots & C_m & \\ \hline & e_{11} & e_{12} \ldots e_{1j} \ldots & e_{1m} & A_1 \\ & e_{21} & e_{22} \ldots e_{2j} \ldots & e_{2m} & A_2 \\ & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \vdots \\ & e_{i1} & e_{i2} \ldots e_{ij} \ldots & e_{im} & A_i \\ & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \vdots \\ & e_{n1} & e_{n2} \ldots e_{nj} \ldots & e_{nm} & A_n \\ \hline & P_1 & P_2 \ldots P_j \ldots & P_m & \end{array} \quad , \quad e_{ij} = P_j(A_i).$$

Siano

$\underline{a}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{im})^t$, (detto vettore associato ad A_i),

$\underline{c}_j = (e_{1j}, e_{2j}, \ldots, e_{nj})^t$, (detto vettore associato a C_j).

Poniamo, $\forall a \in \mathbb{R}$, $s(a) = \begin{cases} 0 & \text{per } a=0 \\ \dfrac{a}{|a|} & \text{per } a \neq 0. \end{cases}$

Per ogni $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)^t \in \mathbb{R}^r$ poniamo

$$s(\underline{a}) = \left(s(a_1),\ s(a_2), \ldots\ldots, s(a_r) \right)^t.$$

Siano inoltre $\underline{d}_{hk} = \underline{a}_h - \underline{a}_k$ (detto vettore delle differenze per la coppia (A_h, A_k)) e $\underline{r}_{hk} = s(\underline{d}_{hk})$ (detto vettore di regime per la coppia (A_h, A_k)).

Chiamiamo *matrice delle differenze* quella avente per colonne i vettori delle differenze $\underline{d}_{hk}$ con $h \neq k$, ossia la matrice

$$= \left[\quad \underline{d}_{12} \ \underline{d}_{13} \ldots \underline{d}_{1n} \mid \underline{d}_{21} \ \underline{d}_{23} \ldots \underline{d}_{2n} \mid \ldots \mid \underline{d}_{i1} \ \underline{d}_{i2} \ldots \right.$$

$$\left. \underline{d}_{i(i-1)} \ \underline{d}_{i(i+1)} \ldots \underline{d}_{in} \mid \ldots \underline{d}_{n1} \ \underline{d}_{n2} \ldots \underline{d}_{n(n-1)} \right].$$

Chiamiamo *matrice di regime* quella avente per colonne i vettori di regime $\underline{r}_{hk}$ con $h \neq k$, ossia la matrice

$$R = \left[\quad \underline{r}_{12} \ \underline{r}_{13} \ldots r_{1n} \mid \underline{r}_{21} \ \underline{r}_{23} \ldots \underline{r}_{2n} \mid \ldots \mid \underline{r}_{i1} \ \underline{r}_{i2} \ldots \right.$$

$$\left. \underline{r}_{i(i-1)} \ \underline{r}_{i(i+1)} \ldots \underline{r}_{in} \mid \ldots \underline{r}_{n1} \ \underline{r}_{n2} \ldots \underline{r}_{n(n-1)} \right].$$

Diciamo *peso* ogni funzione

$$W : \left\{ C_1, C_2, \ldots C_m \right\} \to [0,1]$$

tale che $W(C_i) \leq W(C_j) \Leftrightarrow$ il criterio C_i è considerato " non più importante" di C_j.

Poniamo $W_i = W(C_i)$, $\underline{W} = (W_1, W_2, \ldots, W_m)^t$.

Il concetto di "non piú importante" viene precisato se è assegnata una relazione $\leq\cdot$ di preordine fra i criteri. In tal caso consideriamo il peso come un vettore aleatorio con supporto $[0,1]^m$ tale che $C_i \leq\cdot C_j \Leftrightarrow W_i \leq W_j$.

I pesi si possono ottenere nel seguente modo.

Si considera una variabile casuale X con supporto [0,1] ed un campione casuale di ampiezza m, della X, $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$.

Si pone W_i uguale alla statistica ordinale di ordine m-i+1.

In particolare $W_1 \geq W_2 \geq W_3 \geq \ldots\ldots \geq W_m$.

Si ha che, se F(x) è la funzione di ripartizione della X, allora la W_i ha funzione di ripartizione

$$G_i(y) = \sum_{\ell=m-i+1}^{m} \binom{m}{\ell} \left[F(x)\right]^{\ell} \cdot \left[1-F(y)\right]^{m-\ell}.$$

Se la X ha distribuzione UC [0,1] allora, derivando, si vede che la W_i ha densitá

$$g_i(y) = \binom{m}{m-i+1} (\ m-i+1\ ) \cdot\ y^{m-i}\ (1-y)^{i-1},$$

ossia W_i è una $\beta(m-i+1,\ i)$, variabile casuale beta di parametri (m-i+1, i), dove

$$\beta\ (r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\ dx = \frac{\Gamma(r)\ \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

è l'integrale euleriano di prima specie.

Sia $\underline{r}_{is} = (\ \sigma_{is1}\ ,\ \sigma_{is2}\ ,\ \ldots\ldots,\sigma_{ism}\ )^t$.

Si ammette che la scelta fra le alternative A_i e A_s sia in base al valore assunto dalla funzione aleatoria

$$V_{is} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{isj}\ W_j$$

esprimente il "grado di soddisfacimento" nella scelta di A_i rispetto ad A_s.

La matrice V, di termine generale V_{is}, si ottiene dalla matrice R, di regime, e dal vettore casuale W ponendo

$$V = W^t \cdot R.$$

La matrice V è un vettore riga con n(n-1) colonne.

Sia (A_i, A_s) una coppia di alternative distinte.

Diciamo *probabilita' per la dominanza* di A_i rispetto ad A_s il numero

$$p_{is} = \text{prob } (V_{is} > 0).$$

Diciamo matrice delle *probabilita' di dominanza* la seguente

$$
p = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_s & \cdots & A_n \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & p_{12} & \cdots & p_{1s} & \cdots & p_{1n} \\
p_{21} & 0 & \cdots & p_{2s} & \cdots & p_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{is} & \cdots & p_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{js} & \cdots & p_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{ns} & \cdots & 0
\end{array} \right] \end{array}
$$

L'idea di base è di considerare una alternativa A_i preferibile all'alternativa A_j se il vettore riga i della matrice P ha gli elementi, disposti in ordine decrescente, rispettivamente maggiori o uguali a quelli, anch'essi disposti in ordine decrescente, della riga j.

In generale, in questa maniera si ottiene una relazione d'ordine non totale.

Per ottenere un ordinamento totale si puó sostituire ad ogni vettore riga una media che puó essere la media aritmetica, la media geometrica (se le probabilitá sono tutte positive), la media quadratica o la mediana.

La media piú utilizzata è la media aritmetica, ossia ad ogni alternativa A_i si associa il numero

$$p_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$

3. CRITERI DI VALUTAZIONE DELLE p_{is}

Per calcolare la p_{is} occorre determinare, in $\mathbb{R}^m$, la zona A soddisfacente il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{isj} \cdot W_j \geq 0 \\ W_j \geq 0, \ \forall j \in \left\{ 1,2,\ldots,m \right\} \\ W_j \geq W_{j+1}, \ \forall j \in \left\{ 1,2,\ldots,m-1 \right\} \end{cases}$$

In corrispondenza si ottiene

$$p_{is} = \int_A g(w_1, w_2, \ldots, w_m) \cdot dw_1 \cdot dw_2 \ldots dw_m$$

con g funzione di densità di probabilità della variabile casuale m-dimensionale (W_1, W_2, ...,W_m).

Nel caso in cui $\underline{X}$ = (X_1, X_2,....,X_m) ha distribuzione uniforme la g (W_1, W_2,.....W_m) è uniforme nella zona S soddisfacente le disequazioni

$$W_j \geq 0, \ \forall j \in \left\{ 1,2,\ldots,m \right\}$$

$$W_j \geq W_{j+1}, \ \forall j \in \left\{ 1,2,\ldots,m-1 \right\}$$

per cui, dette m(A) e m(S) le misure di A ed S, risulta

$$p_{ls} = \frac{m(A)}{m(S)} .$$

I calcoli risultano alquanto elaborati già per m≥4.

Per m elevato, in pratica, è necessario calcolare le p_{ls} con il metodo di Montecarlo.

Si genera una successione di lunghezza N di campioni casuali empirici

$$\underline{x}^{(r)} = \left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots\ldots, x_m^{(r)} \right), \ r=1,2,\ldots N$$

determinazioni indipendenti della variabile casuale X.

Se $\underline{y}^{(r)} = \left(y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, \ldots\ldots, y_m^{(r)} \right)$ è la permutazione ottenuta da $\underline{x}^{(r)}$ tale che $y_i \geq y_{i+1}$, $\forall i<m$, allora si pone

$$v_{is}^{(r)} = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{isj}\, y_j^{(r)}.$$

Posto $N_p = \left| \left\{ r \in \{1,2,\dots,N\} \;:\; v_{is}^{(r)} > 0 \right\} \right|$, si assume

$$p_{is} = \text{prob}\left(V_{is} > 0 \right) \cong \frac{N_p}{N}.$$

4. UN ESEMPIO

Antonio vuole acquistare una macchina scegliendo una delle seguenti

A1) ALFA 33

A2) AUDI 80

A3) PEUGEOT 405

I criteri per la scelta sono i seguenti

C_1) ripresa

C_2) comoditá

C_3) costo

C_4) estetica

Valutando i dati esposti da riviste specializzate, ad esempio QUATTRORUOTE, GENTE MOTORI, L'AUTOMOBILE etc..., si arriva stabilire la seguente matrice dei punteggi

$$E = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array}$$

$$E = \left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}$$

Supponiamo di avere la seguente relazione di preordine

$$C_1 > C_2 > C_3 > C_4.$$

Sia $W_i = W(C_i)$. Allora $W_1 > W_2 > W_3 > W_4$ e W_i è uguale alla statistica ordinale di ordine 5–i.

La matrice di regime è la seguente

$$R = \begin{array}{cccccc} r_{12} & r_{13} & r_{21} & r_{23} & r_{31} & r_{32} \end{array}$$

$$R = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Il vettore $V = W^t \cdot R$ è

$$V = \Big[\ V_{12} = W_1 - W_2 + W_3 - W_4,\ V_{13} = W_1 - W_2 - W_3 - W_4,\ V_{21} = -V_{12},$$

$$V_{23} = W_1 - W_2 - W_3 + W_4,\quad V_{31} = -V_{31},\quad V_{32} = -V_{23}\ \Big].$$

Le probabilitá di dominanza sono

$$p_{12} = \operatorname{prob}\left(V_{12}>0 \right) = \operatorname{prob}\left(W_1 - W_2 + W_3 - W_4 > 0 \right),$$

$$p_{13} = \operatorname{prob}\left(V_{13}>0 \right) = \operatorname{prob}\left(W_1 - W_2 - W_3 - W_4 > 0 \right),$$

$$p_{23} = \operatorname{prob}\left(V_{23}>0 \right) = \operatorname{prob}\left(W_1 - W_2 - W_3 + W_4 > 0 \right).$$

Assumiamo l'ipotesi che la variabile casuale X abbia distribuzione uniforme continua in [0,1].

Allora la densitá di probabilitá congiunta è uniforme nella zona S soddisfacente le disequazioni

$$W_j \geq 0, \quad \forall j \in \left\{ 1,2,3,4 \right\}$$

$$W_j \geq W_{j+1}, \quad \forall j \in \left\{ 1,2,3 \right\}.$$

Poniamo $W^*_{j-1} = W_j / W_1$. Si puó verificare che la terna (W^*_1, W^*_2, W^*_3) ha distribuzione uniforme nella zona S^* soddisfacente le disequazioni

$$W^*_1 \geq 0, \; W^*_2 \geq 0, \; W^*_3 \geq 0$$

$$W^*_1 > W^*_2 > W^*_3.$$

Come si puó verificare con semplici operazioni geometriche, il volume della zona S^* è 1/6.

Le probabilitá di dominanza si possono esprimere come

$$p_{12} = \text{prob}\left(1 - W_1^* + W_2^* - W_3^* > 0\right),$$

$$p_{13} = \text{prob}\left(1 - W_1^* - W_2^* - W_3^* > 0\right),$$

$$p_{23} = \text{prob}\left(1 - W_1^* - W_2^* + W_3^* > 0\right).$$

Poichè $W_1^* < 1$, $W_3^* < W_2^*$, l'espressione $1 - W_1^* + W_2^* - W_3^*$ è positiva, $\forall (x,y,z) \in S^*$ e quindi $p_{12} = 1$.

La zona D intersezione di S^* con il semispazio di equazione $1 - W_1^* - W_2^* - W_3^* > 0$ è un tetraedro avente volume 1/36.

Poichè la distribuzione delle terne (W_1^*, W_2^*, W_3^*) è uniforme in S^* risulta

$$p_{13} = \frac{\text{volume}(D)}{\text{volume}(S^*)} = 1/6.$$

La zona H intersezione di S^* con il semispazio $1 - W_1^* - W_2^* + W_3^* > 0$ è un tetraedro avente volume 1/12. Segue che

$$p_{23} = \frac{\text{volume}(H)}{\text{volume}(S^*)} = 1/2.$$

La matrice delle probabilitá di dominanza è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc|} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 0 & 1 & 1/6 \\ A_2 & 0 & 0 & 1/2 \\ A_3 & 5/6 & 1/2 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Utilizzando il criterio della media aritmetica i numeri associati alle alternative A_1, A_2, A_3 sono rispettivamente

$$p_1 = 1/12, \qquad p_2 = 1/4, \qquad p_3 = 2/3,$$

per cui le alternative vanno ordinate nel seguente modo

$$A_3 > A_1 > A_2.$$

La macchina scelta è la PEUGEOT 405.

BIBLIOGRAFIA

1. Albers, L.H. *Het gewichtloze gewogen, cultuurhistorische betekenis van landgoederen geevalueerd met behulp van multicriteria analyse.* Delftse Universitaire Pers,Delft,1987.

2. Albers, L., P. Nijkamp. "*Multimensional analysis for plan or project evalutation; how to fit the right method to the right problem*". Procedures of the conference at Capri, Napoli, April 1988.

3. Dall'Aglio G. "*Calcolo delle probabilitá*", Zanichelli, Bologna.

4. Delft, A. van and Nijkamp, P. (1977). *Multicriteria Analysis and Regional Decision-Making,* The Hague/Boston: Martinus Nijhoff.

5. Hinloopen, E., Nijkamp, P. and Rietveld, P. (1983). "Qualitative discrete multiple criteria choice models in regional planning", *Regional Science and Urban Economics* 13: pp 77-102.

6.Hinloopen, E. (1985). *De Regime Methode,* M.A. Thesis, Interfaculty Actuariat and Econometrics, Free University, Amsterdam (minimeographed)

7. Hinloopen, E. and Smyth, A.W. (1985). "A description of

principles of a new multicriteria evalutation tecnique, The Regime Method", in *Proceedings Colloquium Vervoerplanologisch Speurwerk,* Delft, pp. 422-431.

8. Keeney, R. and Raiffa, H. (1976). *Decision with Multiple Objectives, Preferences and Value Tradeoffs.* Neww York: Wiley.

9. Kmietowicz, Z.W. and Pearman, A.D. (1981). *decision Theory and Incomplete Knowledge.* Aldershot: Gower.

10. Lancaster, K. (1971). *Consumer Demand.* New York: Columbia University Press.

11. Lootsma, T.A. (1980). "Saaty's Priority Theory and the nomination of a senior professor in operation research", *European Journal of Operational Research* 4: pp.380-388.

12. Mastenbroek, P and Paelinck, J.H.P. (1977). "Qualitative multicriteria analysia-applications to airport location", *environment and Planning* A 9(8): pp. 883-895.

13. Nijkamp, p. and Voogd, H. (1981). "New multicriteria methods for physical planning by means of multimensional scaling tecniques", pp.19-30 in Haimes, Y. and Kindler, J. (eds.), *Water and Related Land Resource System.* Oxford: Pergamon Press.

14. Nijkamp, P., Leitner H. and Wrigley N. (eds.) (1985). *Measuring the Unmeasurable,* Dordrecht: Martinus Nijhoff.

15. Rietveld, P. (1980) *Multi Objective Methods and Regional Planning,* Amsterdam: North-Holland Publ.Co.

16. Saaty, T.I. (1977). "A scaling method for priorities in hierarchical structures", *journal of Mathematical Psychology* 15: pp.234-281

17. Taha, H. A. (1976). *Operations Research,* New York: Macmillan.

18. Voogd, H. (1983). *Multicriteria Evalutation for Urban and Regional Planning.* London: Pion