Ratio Math. 2
(1991), 157 - 160

SISTEMI DINAMICI DIGITALI E LORO POSSIBILI APPLICAZIONI

Giovanni Melzi

SUNTO - Alla definizione assiomatica di Sistema Dinamico Digitale (SDD) fornita attraverso opportuni legami funzionali tra insiemi di parole su un alfabeto dato, seguono alcune suggestive interpretazioni di tipo algebrico-combinatorio, analitico e topologico dell'idea di SDD.

ABSTRACT - In this paper some developments of the *Dynamic Digital System* (SDD) have been exposed. A SDD is defined as a dynamic system whose instantaneous state and input-output are made by codified information, particularly in words on a given alphabet. Some algebraic-combinatory, analytical and topological suggestions have been exposed afterwards.

0. In questa nota si espongono, e in qualche caso si anticipano, alcuni sviluppi relativi alla definizione di *Sistema Dinamico Digitale* (SDD). Questi sviluppi si riferiscono a lavori, in corso di pubblicazione di E. Allevi, G. Melzi, F. Mercanti ed altri.

Un sistema dinamico, nel senso usuale del termine, è caratterizzato dal fatto di scambiare con l'esterno *grandezze* (per lo più fisiche) e di possedere uno *stato istantaneo* descrivibile con uno o più *attributi misurabili*. Non ci si scosta molto dalla verosimiglianza pensando e dicendo che un sistema dinamico è interamente descritto da certe *variabili numeriche* funzioni le une delle altre, e tutte funzioni del tempo.

Un esempio tipico di sistema dinamico è quello di un circuito complesso caratteristico dell'attuale ingegneria elettronica. Altri esempi molto significativi sono offerti dalla fisica dei sistemi con un elevato numero di gradi di libertà. Nel caso di tali sistemi dinamici risulta naturale studiarne il movimento con gli usuali strumenti analitici: funzioni, equazioni differenziali, algoritmi (numerici) e cosi via.

Al contrario un SDD è definito come un sistema dinamico il cui stato istantaneo ed il cui input-output siano costituiti da *informazione codificata*, tipicamente informazione codificata in *parole su un dato alfabeto*. La motivazione della ricerca su oggetti astratti di questo tipo è molto agevole e suggestiva: un sistema percettivo, un ecosistema, un distretto fisiologico, un reattore chimico, una rete nervosa, un sistema economico e perfino un gruppo animale o umano si lasciano spontaneamente immaginare, salvo inevitabili specificazioni, come SDD.

1. Dal punto di vista della modellazione matematica di un SDD sembra corretto procedere ad una definizione assiomatica nel modo seguente, utilizzando linguaggio e simbologia introdotti in MELZI-MERCANTI [1] e MELZI [2].

Siano T un *alfabeto* costituito da un numero finito di caratteri e $\mathcal{G}$ una *grammatica* costituita dall'insieme (finito o infinito numerabile) delle *parole* su T. Sia $P(\mathcal{G})$ l'insieme delle parti di $\mathcal{G}$. Sia $B(\mathcal{G})$ l'algebra di Boole i cui elementi siano elementi di $P(\mathcal{G})$, ossia *insiemi di parole*. Tipicamente, per gli scopi attuali, si opera su insiemi finiti, ma ciò non interdice l'ovvia generalizzazione ad insiemi anche infiniti. Si definiscono inoltre alcune *operazioni fra parole* indicate con i simboli $\dashv$, $\vdash$, $\perp$, $|$, O ([1], §2), osservando solamente che si possono definire assiomaticamente molte altre operazioni tra parole e anche tra *insiemi* (finiti o infiniti) *di parole* ossia tra gli elementi di $P(\mathcal{G})$. L'estensione delle *operazioni tra parole* alle *operazioni tra insiemi* (finiti o infiniti) *di parole* si esegue mediante formule del tipo

$$X \dashv Y = \{ Z \mid \exists x \exists y ((x \in X) \wedge (y \in Y) \wedge (Z = x+y))\}$$

e analoghe.

Si può quindi definire un' *algebra* A, generalizzazione dell'algebra $B(\mathcal{G})$, ottenuta con l'aggiunzione delle operazioni $\dashv$, $\vdash$, $\perp$, $|$, O (o altre ancora, all'occorrenza). In modo del tutto analogo si introducono i concetti di A-*espressione*, ossia espressione in A, di A-*equazione*, di A-*funzione* e così via ([1], §3).

2. Sia ora

$$\underline{X} = [C_0 \mid C_1 \dots C_p \mid C_{p+1} \dots C_{p+q}] \tag{1}$$

un vettore ad n=p+q+1 componenti su $P(\mathcal{G})$. Si supponga che il tempo sia suddiviso in intervalli $t_0, t_1 \dots, t_h, \dots$ e che ciascuno degli insiemi $C_0, \dots, C_n$ (n=p+q+1) sia variabile in funzione di t_i (i=0, 1, ..., h, ...). Più precisamente si supponga che siano C_j^i (j=0, 1, ..., n) i valori assunti dalle variabili Cj (j=0, 1,

..., n) al tempo t_i (i=0, 1, ..., h, ...) e che sussistano i seguenti legami funzionali

$$C_j^{i+1} = \emptyset_j (C_0^i \mid C_1^i \dots C_p^i \mid C_{p+1}^i \dots C_{p+q}^i), \qquad (2)$$

essendo $\emptyset_j$ (j=0, 1, ..., n) certe A-funzioni prefissate, per le quali il tempo t_i non è una variabile indipendente. In questo senso si può dire che *le* $\emptyset_j$ *non dipendono* dal tempo.

In tal modo si cerca di esprimere la circostanza che le componenti del vettore (1) siano le une funzioni delle altre, ossia che gli *insiemi di parole siano funzioni variabili con il tempo*, ma che le dipendenze funzionali siano costanti nel tempo, ossia siano delle caratteristiche fisiche del sistema.

3. Lo studio di un SDD definito da un sistema di A-funzioni del tipo (2) dà subito luogo a consistenti problemi algebrico-combinatori ed anche analitici. Per esempio si può pensare al movimento di un SDD come all'evoluzione temporale di "*folle di parole*" dotate di proprietà di eccitazione e di attenuazione reciproche. Tutto ciò è analogo a quanto avviene in un sistema dinamico in senso tradizionale, salvo ovviamente il fatto che attualmente esiste una notevole ricchezza di proprietà di tipo *digitale* (in contrapposizione con il carattere prettamente analogico dei sistemi dinamici).

4. I legami concettuali tra la teoria ancora embrionale dei SDD e l'analisi (reale o complessa) dei sistemi dinamici tradizionali sono molto ricchi ed impegnativi. Ecco alcune suggestioni di tipo algebrico-combinatorio, analitico e topologico.

Anzitutto si può rappresentare un insieme finito o infinito di parole su un alfabeto con coordinate reali, e in tal modo un *insieme* finito o infinito di parole appare come un *punto* in uno spazio dotato in generale di un numero finito o infinito numerabile di coordinate. Allora il *movimento* di un SDD può essere visto come una *traiettoria* in uno spazio in generale pre-hilbertiano (o, in casi assai significativi, hilbertiano). E' evidente che con tale immagine geometrica le proprietà di continuità o di discontinuità acquistano un notevole significato intuitivo.

Un'altra suggestiva interpretazione è fornita dalla possibilità di descrivere la *transizione* da uno stato all'altro di un SDD in *termini* algebrico-combinatori, vertenti su insiemi (finiti o infiniti) di parole (finite). Per tale via le proprietà di eccitazione e di attenuazione reciproche tra folle di parole possono essere descritte e misurate in termini topologici e metrici in spazi funzionali opportuni.

Significative applicazioni di tipo naturalistico ed economico sono in corso di studio, come appare dalla pur sommaria nota bibliografia (MELZI [3],

MERCANTI [4], [5]).

BIBLIOGRAFIA

1. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Matem. di Brescia, Italy, 9 (1988), 107-121.
2. G. MELZI, *Sulla definizione di semiautoma*, Rend. Sem. Matem. di Brescia, Italy, 10 (1988), 23-50.
3. G. MELZI, *Optical Illusions as an Example of Fuzzy - percepition*, TÜV, Verlag, Rheinland (1986), 231-248.
4. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia tra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Atti Conv. Matem. Applic. Econom. e Ingegn., Università Studi Chieti, (1990), in questo volume.
5. F. MERCANTI, *Interpretazione economica dei predicati di canale in un Sistema Digitale Multicanale*, Atti Conv. Matem. Applic. Econom. e Ingegn, Università Studi Chieti, (1990), in questo volume.
6. E. ALLEVI, *Una speciale classe di sistemi dinamici*, In corso di pubblicazione.