Ratio Math. 3
(1992), 81 - 84

INTERPRETAZIONE ECONOMICA DEI PREDICATI DI CANALE IN UN SISTEMA DIGITALE MULTICANALE

Fabio Mercanti

SUNTO: Attraverso il concetto di *Sistema Digitale Multicanale* (SDM, MELZI-ALLEVI[1]) si mostra come i *predicati di canale* di un tale SDM possano essere assunti con vantaggio come modelli matematici delle proprietà di un sistema macro o microeconomico.

ABSTRACT - Through the conception of *Multichannel Digital System*(SDM, MELZI-ALLEVI 1) it has been shown how the *channel predicates* of such a system can be assumed as mathematical models of the properties of a macro or microeconomical system.

O. In questa nota si riprendono alcuni risultati di MERCANTI[2] e si danno alcune ulteriori interpretazioni in *termini economici* dei fenomeni a soglia in un *Sistema Digitale Multicanale* (SDM, MELZI-ALLEVI [1]).

Queste interpretazioni economiche riguardano il fatto che gli *stati* dei vari canali di un SDM, e lo stesso stato istantaneo del sistema, che sono insiemi non ordinati di *parole* su un alfabeto, possono essere riguardati come un modello matematico dei vettori di grandezze fluenti in un sistema economico. Queste interpretazioni preludono, come si vedrà nel § V, ad una maniera, che appare nuova ed assai suggestiva, di modellizzare matematicamente le grandezze economiche con insiemi discreti di oggetti algebrici.

Allora i fenomeni a *soglia* che in [2] sono visti come soglie percettive, possono essere riguardati come i ben noti fenomeni di isteresi economica, e possono essere in tal modo interpretati in termini algebrico-combinatori, all'interno della teoria dei SDM attualmente in studio.

1. Il punto di partenza è la definizione di SDM (§ 0).

Tale definizione richiede alcune premesse di tipo essenzialmente *algebrico*. Il linguaggio e la simbologia usati nel seguito sono quelli introdotti in MELZI-MERCANTI [3] e MELZI [4].

Sia T un alfabeto costituito da un numero finito di caratteri. Sia $\mathcal{G}$ (grammatica) l'insieme infinito numerabile delle parole su T e sia P ($\mathcal{G}$) l'insieme delle parti di $\mathcal{G}$. Gli elementi di P($\mathcal{G}$) costituiscono un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ Si introducano inoltre tra le parole su T alcune operazioni, opportunamente definite e godenti di proprietà formali facilmente trattabili ed estendibili agli *insiemi di parole*, ossia agli elementi di P($\mathcal{G}$). In tal modo si può definire una struttura algebrica $\mathcal{A}$ che è una *estensione* dell'algebra $\mathcal{B}$ di Boole su P($\mathcal{G}$).

2. Mediante l'algebra $\mathcal{A}$ del § 1 si può definire l'idea di SDM ([1]) che appare come una generalizzazione assai spontanea e promettente del concetto classico di un sistema dinamico (ALLEVI [5]).

Un SDM può essere definito come un vettore

$$S=\left[C_0, C_1, \ldots, C_n\right] \tag{1}$$

ad elementi in P($\mathcal{G}$) e funzione di un tempo discreto t_i, con le seguenti clausole.

2.1 L'insieme $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ delle componenti del vettore S è ripartito nell'elemento

C_0 (*stato del sistema* al tempo t_i),

negli elementi

$C_1, C_2, \ldots, C_r$ (*canali di entrata* al tempo t_i)

e negli elementi

$C_{r+1}, \ldots, C_n$ (*canali di uscita* al tempo t_i),

valendo l'ovvia relazione s+r=n, con r numero dei canali di entrata ed s numero dei canali di uscita.

Tra lo stato C_0 (t_i), i canali di entrata C_1 (t_i),..., C_r (t_i) ed i canali di uscita $C_{r+1}(t_i)$,..., C_n (t_i) sussistono le *relazioni funzionali*

$$C_0 (t_{i+1})=F(C_0 (t_i), C_1 (t_i),\ldots, C_r (t_i)), \quad i=1, 2,\ldots, \tag{2}$$

$$C_j(t_{i+1}) = F_j(C_o(t_i)), \quad j=r+1, r+2, \ldots, n \tag{3}$$

Le relazioni funzionali (2), (3) esprimono rispettivamente, come è d'uso nella teoria dei sistemi dinamici, che lo stato C_0 al tempo t_{i+1} è funzione dello stato C_0 e delle entrate C_1, C_2, $\ldots$,C_r al tempo precedente, e che le uscite C_{r+1},...,C_n al tempo t_{i+1} sono funzioni dello stato C_0 al tempo precedente.

Le funzioni F e F_j sono funzioni da $P(\mathscr{G})$ a $P(\mathscr{G})$ indipendenti del tempo. La (2) e la (3) definiscono evidentemente una applicazione σ dell'insieme $\mathscr{S}$ dei vettori (1) in sè. Questa applicazione viene detta *funzione caratteristica* F_{SDM} del SDM. È da ,notare che, al presente, parlando di funzioni si intende sempre riferirsi al concetto di $\mathscr{A}$-funzione ([3],[4]), nel senso che tutti i legami fra insiemi di parole devono concepirsi come espressi mediante i *predicati e le operazioni* della algebra $\mathscr{A}$(§ 1).

3. Si consideri un vettore $S(t_i)$ funzione del tempo t_i (§ 2, (1)). Se le componenti di $S(t_i)$ soddisfano un predicato composto con uno o più predicati dell'algebra $\mathscr{A}$(§ 1) si può dire che $S(t_i)$ *soddisfa un* $\mathscr{A}$*-predicato* $\mathscr{P}$. Se $C_j(t_i)$ con j=1, 2,...,n (§2) è il j-esimo canale di un SDM si dirà che quel canale *gode del predicato* ovvero *gode della proprietà* $\mathscr{P}$ al tempo t_i. Analogamente è chiaro che cosa si debba intendere dicendo che lo stato di un SDM gode di una data $\mathscr{A}$*-proprietà* al tempo t_i.

In particolare assume rilevanza lo studio di un SDM dotato di una sola entrata e di una sola uscita. In tal caso prende senso la affermazione «*se l'entrata di un* SDM *gode di una proprietà* $\mathscr{P}$ *al tempo* t_i *allora l'uscita gode di una proprietà* $\mathscr{Q}$ *al tempo* t_{i+1}». Detto Σ un SDM dotato di una sola entrata e di una sola uscita, sia P_i una proprietà posseduta dall'uscita al tempo t_i e Q_j una proprietà posseduta dall'uscita al tempo t_j. Se $t_j=t_{i+1}$ si può dire che Q_j è una Σ-conseguenza di P_i, e si scrive

$$P_i \underset{\Sigma}{\rightarrow} Q_{i+1} \tag{4}$$

Si noti che il fatto che valga la (4) dipende in generale dallo stato $C_0(t_i)$ di Σ (§ 2,(3)), per modo che la (4) può essere precisata con la

$$P_i \xrightarrow[\Sigma, C_0(t_i)]{} Q_{i+1}.$$

4. La definizione di SDM si presta alla formulazione di diversi problemi. In particolare per il SDM Σ del § 3 si possono formulare in generale un *problema*

diretto ed un *problema inverso*, nei seguenti termini.

4.1 *Problema diretto.* Per un determinato SDM costruire la *categoria degli stati* concependo gli stati come oggetti ed i predicati di canale come morfismi.

4.2 *Problema inverso.* Costruire un SDM Σ tale che valga la (4) del § 3 per ogni tempo t_i. Ciò significa caratterizzare lo stato $C_0(t_0)$ al tempo t_0 e la funzione caratteristica F_Σ (§ 2) di Σ in modo tale che valga la (2) del § 2 per ogni tempo t_i.

5. Il problema diretto 4.1 ed il problema inverso 4.2 ammettono alcune suggestive interpretazioni.
Lo stato $C_0(t_i)$ al tempo t_i di un SDM può essere pensato come un modello matematico dello stato di un micro o di un macrosistema economico. In tal caso la scelta di una funzione caratteristica (§ 2) equivale ad un'importante presa di posizione sulla "bontà" di una data modellazione matematica di un sistema economico mediante in SDM. I predicati di canale possono essere assunti come modelli matematici delle più svariate proprietà economiche di un dato sistema economico. Si può pensare ad esempio al *comportamento degli operatori*, ai *vincoli di movimento del sistema*, alla *razionalità od alla irrazionalità del comportamento dei operatori*, ai più svariati *fenomeni a soglia*.
Nel caso particolare di un SDM dotato di una sola uscita (§ 4) della funzione caratteristica (4) corrisponde alla modellazione matematica di un *sistema finanziario particolarmente semplice*: quello in cui due soli operatori intrattengono rapporti di compravendita di titoli contro liquidità monetaria con regimi di scadenze e di interessi di contrattati.

BIBLIOGRAFIA

1. G. MELZI e E. ALLEVI, *Sistemi dinamici e sistemi digitali*, In corso di pubblicazione.
2. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia fra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Ratio Mathem., Pescara, 2 (1991), 161-165.
3. G. MELZI e F. MERCANTI, *An Algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Matem. di Brescia, Italy, 9 (1988), 107-121.
4. G. MELZI, *Sulla definizione di semiautoma*, Rend. Sem. Matem. di Brescia, Italy, 10 (1988), 23-50.
5. E. ALLEVI, *Una speciale classe di sistemi dinamici*, In corso di pubblicazione.