# IL PROBLEMA DELL'INTEGRAZIONE INDEFINITA

**FERDINANDO CASOLARO**


SOMMARIO

In quel che segue affronteremo il *"problema di decisione per integrali indefiniti"*, ossia la ricerca di un algoritmo che consenta di decidere se la primitiva di una funzione data sia o meno esprimibile mediante funzioni elementari.

Il problema, come si sa, è insolubile per integrali qualsiasi; però, negli ultimi decenni il matematico americano Risch, sfruttando i risultati di Liouville (1809-1892) del secolo scorso, ha sviluppato due algoritmi che permettono di decidere per alcune classi di funzioni che contengono esponenziali o logaritmi: l'algoritmo per induzione e l'algoritmo parallelo. Qui presenteremo l'algoritmo parallelo.

In precedenza, l'unico algoritmo di decisione noto (già dalla seconda metà del secolo scorso) è riferito alla classe dei *"differenziali binomi"* ed è espresso dal teorema di Tchebichev, da cui trarremo alcune conseguenze che permettono di decidere anche per funzioni trigonometriche.



ABSTRACT

In what follows we deal with the *"decision problem for indefinite integrals"*, nomely the search of an algorithm that lets us of decide if the primitive of a given function can be expressed or not by elementary functions.

As it is know, the problem is irresoluble for integrals of any type; but in the last decades the american mathematical Risch, using the results of Liouville of the previous century, has developed two algorithms that let of decide for some classes of functions which contain exponential or logaritms: the induction algorithm and the parallel algorithm. We present here the parallel algorithm.

Formerly, the only known algorithm of decision (already since the second half of the previous century) is referred to the class of the *"differential binomials"*, and is expressed by the theorem of the Tchebichev, from which we deduce some conseguences that also let of decide for trigonometrical functions.

## INTRODUZIONE

Con il termine *funzioni elementari* indicheremo tutte le funzioni complesse di una variabile reale che rientrino nelle seguenti categorie:

a) funzioni razionali;

b) funzioni algebriche sia implicite che esplicite;

c) la funzione esponenziale $exp(x)$;

d) la funzione logaritmica;

e) tutte le funzioni ottenibili mediante una combinazione finita di simboli di funzioni appartenenti alle categorie precedenti.

In particolare, in e) possiamo includere le funzioni goniometriche, le funzioni iperboliche e, rispettivamente, le inverse di esse. Le goniometriche si possono esprimere come combinazioni lineari, nel campo complesso, delle funzioni esponenziali mediante le note formule di Eulero:

a) $sen\, z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ; b) $cos\, z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ; c) $tg\, z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$

Da esse si ricavano, come combinazioni di funzioni logaritmiche, le inverse:

c) $z = arcsen\, x = \dfrac{1}{i}\, ln\left(\sqrt{1 - x^2} + ix\right)$ , con $x = sen\, z$

d) $z = arccos\, x = \dfrac{1}{i}\, ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ , con $x = cos\, z$

e) $z = arctg\, x = \dfrac{1}{2i}\, ln\, \dfrac{1 + ix}{1 - ix}$ , con $x = tg\, z$

Analogamente, sussistono le note relazioni per funzioni iperboliche:

$$senh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \;;\quad cosh\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \;;\quad tgh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$$

e le relative funzioni inverse:

$$settsenh\, x = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$settcosh\, x = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$setttgh\, x = \frac{1}{2}\, ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) .$$

### § 1 - Integrazione delle funzioni razionali.

E' noto che: "*la derivata di una funzione razionale è ancora una funzione razionale*".

Infatti, indicato con $\mathfrak{D}(R)$ l'insieme delle funzioni razionali $R(x)$ sul campo complesso, risulta:

$$R(x) = \frac{P(x)}{D(x)} \Longrightarrow R'(x) = \frac{P'(x)\cdot D(x) - D'(x)\cdot P(x)}{D^2(x)} \in \mathfrak{D}(R) ,$$

con $P(x)$ e $D(x)$ polinomi interi sul campo complesso $\mathfrak{C}$.

Di tale proprietà, non vale il viceversa, in quanto la primitiva di una funzione razionale non è, in generale, una funzione razionale.
Sussiste, però, il teorema di Liouville, che, applicato al solo caso delle funzioni razionali, può essere così espresso:

"*Sia* $R(x) = \dfrac{P(x)}{D(x)}$ *una funzione razionale e sia* n *il grado del polinomio al denominatore* $D(x)$. *Se si conoscono le* n *radici, reali o complesse, di* $D(x)$, *l'integrale*

$$\int R(x)\, dx$$

*è esprimibile mediante funzioni elementari e si ha*:

$$\int R(x)\, dx = h_o(x) + \sum_i c_i \; \ln h_i(x) \qquad [1.1]$$

*con* $h_o(x)$ *funzione razionale di* $x$, $h_i(x)$ *polinomi irriducibili di primo grado sul campo complesso,* $c_i$ *costanti complesse*".

Verifichiamo tale teorema con un esempio, rimandando, per una trattazione più completa con relativa dimostrazione, all'articolo Pessa-Rizzi "*L'integrazione indefinita delle funzioni trascendenti*"- periodico di matematiche n.2 del 1990 [2].

Esempio -

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 8\,x^3 + 23\,x - 14}{x^4 - 8\,x^2 - 8\,x + 15}\, dx = \int \left[ x - 1 + \frac{1}{x^4 - 8\,x^2 - 8\,x + 15} \right] dx =$$

$$= \frac{x^2 - 2\,x}{2} + \int \frac{dx}{(x - 3)(x - 1)(x^2 + 4\,x + 5)} .$$

Applicando alla funzione integrale il metodo di decomposizione in somma, si ha:

$$\frac{1}{(x - 3)(x - 1)(x^2 + 4\,x + 5)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C\,x + D}{x^2 + 4\,x + 5} ,$$

$$A(x - 1)(x^2 + 4x + 5) + B(x - 3)(x^2 + 4x + 5) + (Cx + D)(x^2 - 4x + 3) = 1$$

per $x = 3$ : $\quad 52\,A = 1$ ; $\quad A = \dfrac{1}{52}$

per $x = 1$ : $\quad -20\,B = 1$ ; $\quad B = -\dfrac{1}{20}$

per $x = 0$ : $\quad -5A - 15B + 3D = 1$ ; $\quad -\dfrac{5}{52} + \dfrac{3}{4} + 3D = 1$ ; $\quad D = \dfrac{3}{26}$

Annullando il termine di 3° grado si ha:

$A + B + C = 0$ ; $\quad \dfrac{1}{52} - \dfrac{1}{20} + C = 0$ ; $\quad C = \dfrac{2}{65}$

Pertanto risulta:

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 8\,x^3 + 23x - 14}{x^4 - 8\,x^2 - 8\,x + 15} dx = \frac{x^2 - 2x}{2} + \frac{1}{52}\int\frac{dx}{x - 3} - \frac{1}{20}\int\frac{dx}{x - 1} + \int \frac{\frac{2}{65}\,x + \frac{3}{26}}{x^2 + 4x + 5}\, dx =$$

$$= \frac{x^2-2x}{2} + \frac{1}{52}\ ln|x-3| - \frac{1}{20}\ ln|x-1| + \frac{1}{65}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \frac{7}{130}\int \frac{dx}{x^2+4x+5} =$$

$$= \frac{x^2-2x}{2} + \frac{1}{52}\ ln|x-3| - \frac{1}{20}\ ln|x-1| + \frac{1}{65}\ ln|x^2+4x+5| + \frac{7}{130} arctg|x+2| + c_1 .$$

Da: $arctg(x+2) = \frac{1}{2i}\ ln\frac{1+i(x+2)}{1-i(x+2)} = \frac{1}{2i}\ ln\left[1+i(x+2)\right] - \frac{1}{2i}\ ln\left[1-i(x+2)\right] =$

$$= \frac{1}{2i}\left[ln\frac{1}{2i}\left(i-x-2\right) - ln\frac{1}{2i}\left(i+x+2\right)\right] = \frac{1}{2i}\left[ln[\,i(x+2-i)] - ln[-i(x+2+i)]\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\ ln(x+2-i) - \frac{1}{2i}\ ln(x+2+i) + c_2$$

e da: $x^2+4x+5 = (x+2+i)(x+2-i)$, si ha in definitiva:

$$\int \frac{x^5-x^4-8x^3+23x-14}{x^4-8x^2-8x+15}\,dx = \frac{x^2-2x}{2} + \frac{1}{52}\ ln|x-3| - \frac{1}{20}\ ln|x-1| + \frac{1}{65}\ ln(x+2+i) +$$

$$+ \frac{1}{65}\ ln(x+2-i) + \frac{7}{260i}\ ln(x+2-i) - \frac{7}{260i}\ ln(x+2+i) =$$

$$= \frac{x^2-2x}{2} + \frac{1}{52}\ ln|x-3| - \frac{1}{20}\ ln|x-1| + \left(\frac{1}{65} - \frac{7i}{260}\right) ln(x+2-i) +$$

$$+ \left(\frac{1}{65} + \frac{7i}{260}\right) ln(x+2+i) + k \quad , \qquad \text{con } k = c_1 + c_2 \in \mathbb{C}.$$

Come si vede, il risultato è costituito dalla somma della funzione razionale $h_o(x) = \frac{x^2-2x}{2}$ e da una combinazione lineare di logaritmi derivati dai quattro fattori in cui è stato scomposto il polinomio di 4° grado al denominatore.

Da quanto detto, si deduce che il problema della decisione per integrali indefiniti di funzioni razionali è legato alla possibilità di determinare o meno, per via algebrica, le radici del polinomio al denominatore; al di là di tali problemi, gli integrali di funzioni razionali sono sempre esprimibili in termini di funzioni elementari.

## § 2 - Integrali di funzioni trascendenti. Generalizzazione del teorema di Liouville a funzioni che contengono esponenziali e logaritmi di funzioni razionali.

In forma più generale, il teorema di Liouville si estende a funzioni del tipo $F\left(x,\ e^{R(x)},\ log\ S(x)\right)$, con $R(x)$ e $S(x)$ funzioni razionali.

*"Sia $f(x)$ una funzione razionale contenente esponenziali e logaritmi di funzioni razionali, cioè del tipo $F\left(x,\ e^{R(x)},\ lg\ S(x)\right)$; se esiste una funzione $g(x)$ tale che:*

$$\frac{dg}{dx} = f(x)$$

*allora esistono delle funzioni $h_o, h_1, \dots, h_n$ delle variabili $x$, $e^x$, $lg\ x$,* *e delle costanti complesse* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *tali che:*

$$g(x) = h_o(x, e^x, \lg x) + \sum_i c_i \lg h_i(x, e^x, \lg x) \qquad [2.1]$$

Ovviamente, come per la [1.1], $h_o$ è una funzione razionale di $x, e^x, \lg x$ e le $h_i$ sono funzioni delle stesse variabili.
In altri termini, dal teorema di Liouville segue che se la $f(x)$ è dotata di primitiva elementare $g(x)$, tale primitiva deve essere espressa dalla [2.1].

Basandosi sui risultati di Liouville, Risch [1] ha sviluppato gli algoritmi che permettono di decidere sulla esistenza o meno di primitive elementari di funzioni del tipo

$$f(x) = F\left[x, e^{R(x)}, \lg S(x)\right]$$

con $R(x)$ e $S(x)$ funzioni razionali di $x$.
Noi esporremo *l'algoritmo parallelo* direttamente con alcuni esempi, rimandando, per una più approfondita trattazione teorica, al già citato articolo Pessa-Rizzi [2].

TEOREMA 2.1

*L'integrale* $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ *non è esprimibile mediante funzioni elementari.*

Dim.- Se l'integrale si potesse esprimere mediante funzioni elementari, allora deve esistere una funzione $g(x)$ tale che:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{e^x}{x}$$

Per il teorema di Liouville, $g(x)$ dovrebbe essere del tipo:

$$g(x) = h(x, e^x) + c \ln x$$

cioè:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx = h(x, e^x) + c \ln x \quad , \qquad [2.2]$$

in cui compare un solo addendo logaritmico in quanto il denominatore presenta l'unico fattore irriducibile $x$. La funzione $h(x, e^x)$, di cui ipotizziamo l'esistenza, deve essere, ovviamente, una combinazione lineare finita di $x$ ed $e^x$, per cui la possiamo esprimere nel seguente modo:

$$h(x, e^x) = a_o + a_1 x + a_2 e^x + a_3 x\, e^x + a_4 x^2 + a_5 e^{2x} + \ldots \qquad (*)$$

da cui:

$$h'(x, e^x) = a_1 + a_2 e^x + a_3 e^x + a_3 x\, e^x + 2\, a_4 x + \ldots \qquad (*\,*)$$

Derivando ambo i membri della [2.2], si ottiene:

$$\frac{e^x}{x} = h'(x, e^x) + \frac{c}{x} \ ,$$

cioè:

$$e^x = x\, h'(x,\ e^x) + c\ .$$

Questa ultima è una semplice equazione differenziale che deve essere verificata dall'espressione di $h'(x,\ e^x)$ della (* *):

$$e^x - c = a_1 x + (a_2 + a_3) x\, e^x + a_3 x^2 e^x + 2\, a_4 x^2 + \dots .$$

Tale identità non può essere verificata perchè il termine della sola $e^x$ compare al primo membro con coefficiente 1, ma non al secondo.

Pertanto, l'ipotesi della esistenza della funzione $h(x,\ e^x)$ verificante la [2.2], conduce ad una contraddizione; l'integrale $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ non è esprimibile mediante funzioni elementari.

TEOREMA 2.2

<u>*L'integrale*</u> $\int e^{x^2} dx$ <u>*non è esprimibile mediante funzioni elementari.*</u>

<u>Dim</u>.- Se l'integrale si potesse esprimere mediante funzioni elementari, esisterebbe una funzione $g(x)$ tale che:

$$g(x) = \int e^{x^2} dx = h\left(x,\ e^{x^2}\right) + c \qquad [2.3]$$

dove non figurano termini logaritmici (la funzione integranda non presenta elementi irriducibili al denominatore). Sviluppando $h\left(x,\ e^{x^2}\right)$ si ha:

$$h\left(x,\ e^{x^2}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 e^{x^2} + a_3 x\, e^{x^2} + a_4 x^2 + \dots$$

da cui:

$$h'\left(x,\ e^{x^2}\right) = a_1 + 2\, a_2 x\, e^{x^2} + a_3 e^{x^2} + 2\, a_3 x^2 e^{x^2} + 2\, a_4 x + \dots$$

Derivando ambo i membri della [2.3], si ottiene:

$$e^{x^2} = h'\left(x,\ e^{x^2}\right)$$

cioè: $$e^{x^2} = a_1 + 2\, a_2 x\, e^{x^2} + a_3 e^{x^2} + 2\, a_3 x^2 e^{x^2} + 2\, a_4 x + \dots$$

in cui basta osservare che per i coefficienti di $e^{x^2}$ risulta $a_3 = 1$, mentr per i coefficienti di $x^2 e^{x^2}$ risulta $a_3 = 0$, per dedurre la non esistenz dell'ipotetica $h\left(x,\ e^{x^2}\right)$ verificante la [2.3].

## § 3 - <u>Integrali di funzioni irrazionali.</u>

Richiamiamo alcuni noti integrali di funzioni irrazionali:

$$\int \frac{d\ell(x)}{\sqrt{1 - [\ell(x)]^2}} = arcsen\, \ell(x) + c = -\, arccos\, \ell(x) + c \qquad [3.1]$$

$$\int \frac{d\ell(x)}{\sqrt{1 + [\ell(x)]^2}} = settsenh\, \ell(x) + c = ln\left[\ell(x) + \sqrt{1 + [\ell(x)]^2}\,\right] \qquad [3.2]$$

$$\int \frac{d\ell(x)}{\sqrt{[\ell(x)]^2 - 1}} = settcosh\, \ell(x) + c = ln\left[\ell(x) + \sqrt{[\ell(x)]^2 - 1}\,\right] \qquad [3.3]$$

L'integrale di una funzione irrazionale riconducibile ad uno dei casi [3.1], [3.2], [3.3], è esprimibile mediante funzioni elementari.
In generale, il problema dell'integrazione di funzioni irrazionali si conduce alla ricerca di opportune sostituzioni che permettono di razionalizzare la funzione integranda. In tal caso il teorema di Liouville assicura l'esistenza di primitive elementari.
Ovviamente, solo in alcuni casi esistono sostituzioni che permettono di razionalizzare la funzione integranda. E' interessante richiamare, a tal proposito, il seguente teorema di Tchebichev che permette di decidere per la particolare classe dei "*differenziali binomi*":

"*L'integrale del differenziale binomio:*

$$\int x^p (a\, x^r + b)^s\, dx$$

*con* p, r, s *numeri razionali, è esprimibile mediante funzioni elementari se, e solo se, è intero uno dei tre numeri:*
$s$ ; $\frac{p+1}{r}$ ; $s + \frac{p+1}{r}$ ".

Una immediata conseguenza di tale proprietà è la seguente:

**TEOREMA 3.1**

*Gli integrali del tipo* $\int \sqrt{a \mp x^n}\, dx$ , *con* $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *non sono esprimibili mediante funzioni elementari se* $n > 2$ .

Dim.- $\sqrt{a \pm x^n} = x^0 (a \pm x^n)^{1/2}$ , cioè: $p = 0$ ; $r = n$ ; $s = \frac{1}{2}$ .
Pertanto: $s \notin \mathbb{Z}$ ; $\frac{p+1}{r} = \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$ , $\forall\, n \neq 1$ ;
$s + \frac{p+1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < 1$ , $\forall\, n > 2$.

Per un'analisi più profonda di altre conseguenze del teorema di Tchebichev e dei problemi relativi alla integrabilità di funzioni irrazionali vedi: Casolaro-Pessa-Rizzi *"Algoritmi di decisioni per integrali indefiniti"* - Atti del Convegno Nazionale Mathesis 1991 "MATEMATICA MODERNA E INSEGNAMENTO" [3]. Nel prossimo paragrafo trarremo conseguenze relative alla decisione per funzioni goniometriche.

## § 4 - Integrali di funzioni trascendenti contenenti espressioni trigonometriche.

4.1 - Utilizzando le formule di Eulero e l'algoritmo di Risch si può decidere sull'integrabilità di alcune funzioni del tipo: $R(x, sen\, x)$, $R(x, cos\, x)$.

TEOREMA 4.1

*L'integrale* $\int \frac{sen\, x}{x}\, dx$ *non è esprimibile mediante funzioni elementari.*

Dim. - Risulta:

$$\int \frac{sen\, x}{x}\, dx = \int \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,ix}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{ix}}{ix}\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{e^{-ix}}{i\, x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2i} \int \frac{e^{ix}}{ix}\, d(ix) - \frac{1}{2i} \int \frac{e^{-ix}}{-ix}\, d(-ix) \qquad [4.1]$$

in cui, dal teorema 2.1, gli integrali all'ultimo membro non sono esprimibili per via elementare.

TEOREMA 4.2

*L'integrale* $\int cos\, x^2\, dx$ *non è esprimibile mediante funzioni elementari.*

Dim. - Risulta:

$$\int cos\, x^2\, dx = \int \frac{e^{ix^2} + e^{-ix^2}}{2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{i}} \int e^{(\sqrt{i}\, x)^2} d(\sqrt{i}\, x) + \frac{1}{2} \int e^{-(\sqrt{i}\, x)^2} d(x) \qquad [4.2]$$

in cui, ricordando che: $i^2 = -1$, $e^{-ix^2} = e^{i^3 x^2}$, risulta:

$$\int \cos x^2\, dx = \frac{1}{2\sqrt{i}} \int e^{(\sqrt{i}\, x)^2}\, d(\sqrt{i}\, x) + \frac{1}{2i\sqrt{i}} \int e^{(i\sqrt{i}\, x)^2} d(i\sqrt{i}\, x),$$

per il teorema 2.2, gli integrali all'ultimo membro non sono esprimibili per via elementare.

<u>4.2</u> - Utilizzando il teorema di Tchebichev si può decidere sugli integrali del tipo:
$$\int sen^{\alpha}x\ cos^{\beta}x\ dx \qquad (*)$$
con $\alpha$, $\beta$ numeri razionali.

Posto: $senx = \sqrt{t}$ ; $cosx = \sqrt{1-t}$ ; $x = arcsen\sqrt{t}$ ; $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}$

risulta:
$$\int sen^{\alpha}x\ cos^{\beta}x\ dx = \int (\sqrt{t})^{\alpha}(\sqrt{1-t})^{\beta}\,\frac{1}{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int t^{(\alpha-1)/2}(1-t)^{(\beta-1)/2}\,dt \qquad [4.3]$$

che rappresenta l'integrale del differenziale binomio $\int t^{p}(b + at^{r})^{s}\,dt$ , con $p = \dfrac{\alpha-1}{2}$ , $r = 1$ , $s = \dfrac{\beta-1}{2}$ .

Dal teorema di Tchebichev, sappiamo che tale integrale è esprimibile mediante funzioni elementari se, e solo se, uno dei numeri:
$$s\ ; \quad \frac{p+1}{r}\ ; \quad s + \frac{p+1}{r}$$
è intero.

Nella [4.3] risulta:
$$s = \frac{\beta-1}{2}\ ; \qquad \frac{p+1}{r} = \frac{\alpha+1}{2}\ ; \qquad s + \frac{p+1}{r} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

per cui vale il seguente:

**Lemma** 4.2.1 - *"Gli integrali del tipo* $\int sen^{\alpha}x\ cos^{\beta}x\ dx$ *sono esprimibili mediante funzioni elementari se, e solo se, è intero uno dei numeri:*
$$\frac{\alpha+1}{2}\ ; \quad \frac{\beta-1}{2}\ ; \quad \frac{\alpha+\beta}{2}\ \text{"}$$

E' evidente che se $\alpha$ e $\beta$ sono entrambi interi o se uno dei due è intero dispari e l'altro razionale non intero, l'integrale è esprimibile mediante funzioni elementari. Infatti:
$$\alpha \text{ dispari} \implies \frac{\alpha+1}{2} \in \mathbb{Z}\ ;$$
$$\beta \text{ dispari} \implies \frac{\beta-1}{2} \in \mathbb{Z}\ ;$$
$$\alpha \text{ e } \beta \text{ pari} \implies \frac{\alpha+\beta}{2} \in \mathbb{Z}\ ;$$

Dal Lemma 4.2.1 si deduce facilmente che gli integrali

$$\int \sqrt{sen x}\ dx , \quad \int \sqrt{cos x}\ dx , \quad \int \sqrt{sen x \ cos x}\ dx ,$$

non sono esprimibili mediante funzioni elementari. Per essi risulta:

$$\int \sqrt{sen x}\ dx = \int (cos x)^{o} (sen x)^{1/2}\ dx .$$

$$\frac{\alpha + 1}{2} = \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z} ; \quad \frac{\beta - 1}{2} = - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} ; \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} ;$$

$$\int \sqrt{cos x}\ dx = \int (sen x)^{o} (cos x)^{1/2}\ dx .$$

$$\frac{\alpha + 1}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} ; \quad \frac{\beta - 1}{2} = - \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} ; \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} ;$$

$$\int \sqrt{sen x \ cos x}\ dx = \int (sen x)^{1/2} (cos x)^{1/2}\ dx .$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} .$$

In generale, vale il:

TEOREMA 4.3

"*Gli integrali del tipo* $\int \sqrt[n]{sen x \ cos x}\ dx$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *ed* $n > 1$, *non sono esprimibili mediante funzioni elementari.*"

Dim. - Risulta:

$$\frac{\alpha + 1}{2} = \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} , \quad \forall\ n \neq \pm 1;$$

$$\frac{\beta - 1}{2} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} , \quad \forall\ n \neq \pm 1;$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z} , \quad \forall\ n \neq \pm 1 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R.H. RISCH, *Transaction of the American Mathematical Society*, 1969, 139, 167-189.

[2] PESSA-RIZZI, "*L'integrazione indefinita delle funzioni trascendenti*" - Periodico di matematiche n.2 del 1990.

[3] CASOLARO-PESSA-RIZZI, "*Algoritmi di decisioni per integrali indefiniti*" - Atti del Convegno Nazionale Mathesis 1991 "MATEMATICA MODERNA E INSEGNAMENTO".