Ratio Math. n. 7 - 1994
143 - 154

MODELLI GEOMETRICI PER Z, Q.

Raffaele Bruno
Istituto Tecnico Industriale "L. Da Vinci" - Foggia

INTRODUZIONE

Nell'insegnamento della Matematica, alla fine del Biennio delle Superiori o all'inizio del triennio, si sente la necessità di dare, per gli insiemi numerici, una presentazione non banale che non motivi la loro introduzione solo per far sì che determinate operazioni aritmetiche siano sempre possibili, ma che si connetta ad un edificio matematico più saldo e razionale e che sfrutti le moderne concezioni di prodotto cartesiano, di relazione, di isomorfismo, etc.

Una tale presentazione viene fatta su molti testi dell'ultima generazione, ma risulta spesso di difficile comprensione per gli studenti perché appesantita da troppo simbolismo o perché riportata, da testi universitari, senza particolari accorgimenti didattici.

Non voler rinunciare al rigore e nel contempo farsi capire dagli studenti, con l'ambizione ulteriore di ricreare parte della trama disciplinare in cui sono collegati molti concetti matematici, mi ha portato, dopo la lettura del "Manuale dei numeri e delle figure" (Maraschini - Palma / Editori Riuniti 1985), ad una presentazione degli insiemi numerici, scientificamente corretta, supportata da modelli geometrici, e dal gioco.

La Ricerca, a partire da **N,** si è estesa a **Z, Q, R, C,** ai numeri del calcolatore, ai numeri random ed è stata per il sottoscritto ricca di riflessioni ed approfondimenti.

Nelle pagine seguenti, in maniera molto sintetica (raccogliendo anche la richiesta di colleghi di poterne trarre dei lucidi), vengono introdotti **Z** e **Q** secondo la linea di ricerca effettuata.

L'insieme **Z** può essere costruito, in maniera non banale, a partire da **N** mediante la relazione d così definita:

$\forall$ (a,b), (c,d) $\in N^2$

$$(a, b)\ d\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

d è una relazione di equivalenza.

L'insieme quoziente $\mathbf{N}^2$ / d viene chiamato **Z.**

Ogni intero relativo è una classe di equivalenza.

(5, 3) d (7, 5) d (23, 21) d (2, 0) $\rightarrow$ +2

(4, 7) d (10, 13) d (100, 103) d (0, 3) $\rightarrow$ –3

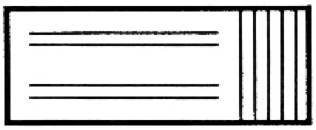
$\mathbf{Z} = \mathbf{N}^2 / d = \{[0,\ 0], [1, 0], [2, 0], \ldots [0, 1], [0, 2], \ldots\}$

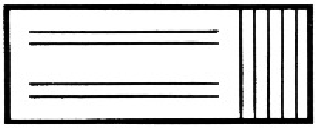
STUDENTI ?

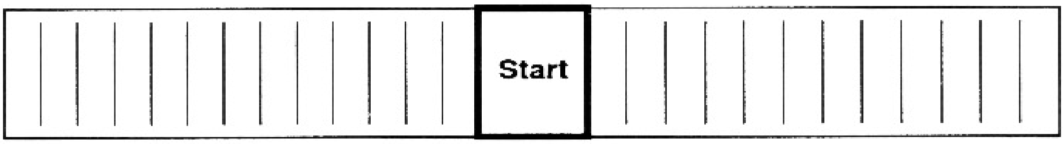
LA RELAZIONE d È UNA RELAZIONE DI EQUIDIFFERENZA

IN CLASSE:

Carte di due semi diversi+due jolli cui è attribuito il valore zero.







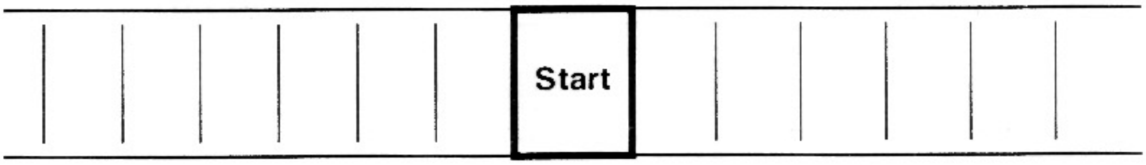
REGOLE DI GIOCO:

RIPETI:

1) Estrai una carta da ciascun mazzo;
2) Dalla partenza avanza, verso destra, di tante casella di quante ne indica il valore stabilito dalla prima carta e retrocedi, verso sinstra, di quanto ne indica la seconda carta;
3) Annota sotto la casella in cui sei giunto la coppia di numeri che ad essa ti ha portato
4) Rimetti le carte nei rispettivi mazzi e mischia

FINO ALLO STOP.

UNA POSSIBILE SITUAZIONE:



0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7,1
	2,7	2,6		2,4		2,2	3,2	4,2		6,2		8,2
	3,8			3,5		7,7		5,3				9,3
	4,9					9,9						

Invece di due mucchi di 14 carte, se si hanno a disposizione due sacchetti per il gioco della tombola o due urne con tante palline su cui sono disegnati "tutti" i numeri naturali ... ed un tracciato illimitato! CHE SI PUO' DEDURRE ?

Tutte le coppie (a, b) che portano ad una stessa casella a destra della partenza sono tali che:

$$a - b = cost$$

e simmetricamente tutte le coppie (a, b) che portano ad una stessa casella a sinistra sono tali che:

$$b - a = cost$$

e tutte le coppie che portano alla casella di partenza sono tali che:

$$a - b = b - a = 0$$

Le coppie di numeri che portano ad una stessa casella sono equidifferenti.

(1, 0), (2, 1), (3, 2), … (101, 100), … $\rightarrow$ Dx (1) $\rightarrow$ +1

(2, 0), (3, 1), (4, 2), … (108, 106), … $\rightarrow$ Dx (2) $\rightarrow$ +2

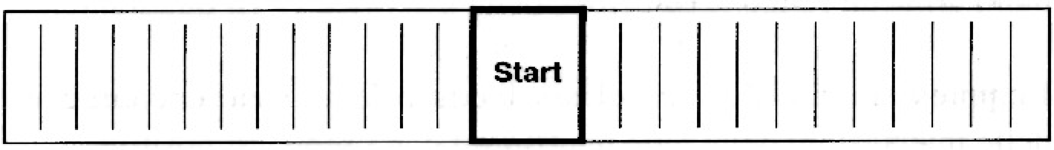
(n, 0), (2n, n), (3n, 2n), … $\rightarrow$ Dx (n) $\rightarrow$ +n

(0, 1), (1, 2), (2, 3), … (126,127), … $\rightarrow$ Sn (1) $\rightarrow$ -1

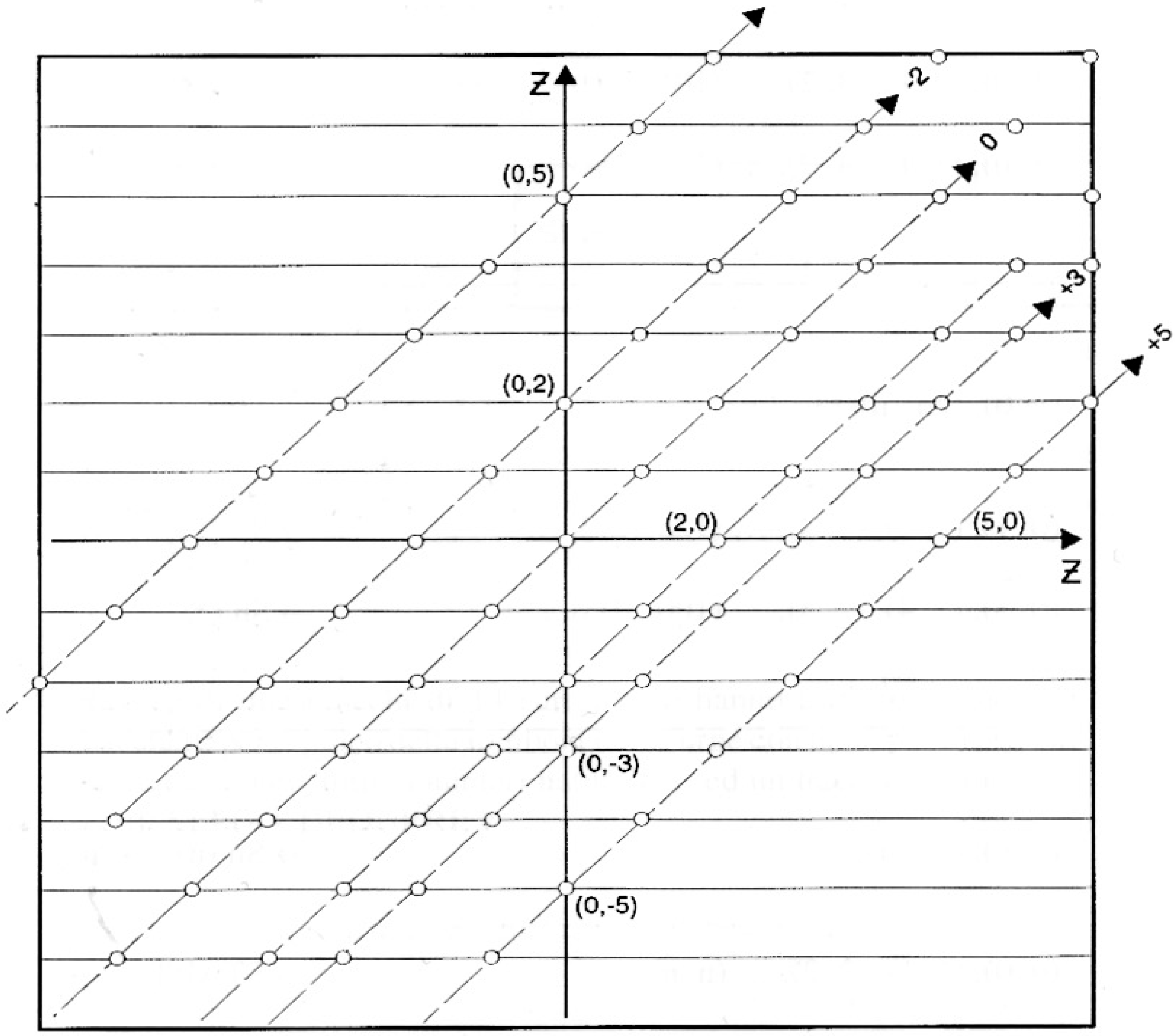
(0, 3), (1, 4), (2, 5), … (100, 103), … $\rightarrow$ Sn (3) $\rightarrow$ -3

(0, n), (n, 2n), … $\rightarrow$ Sn (n) $\rightarrow$ -n

(0, 0), (1, 1), (2, 2), … (n, n), … $\rightarrow$ START $\rightarrow$ 0



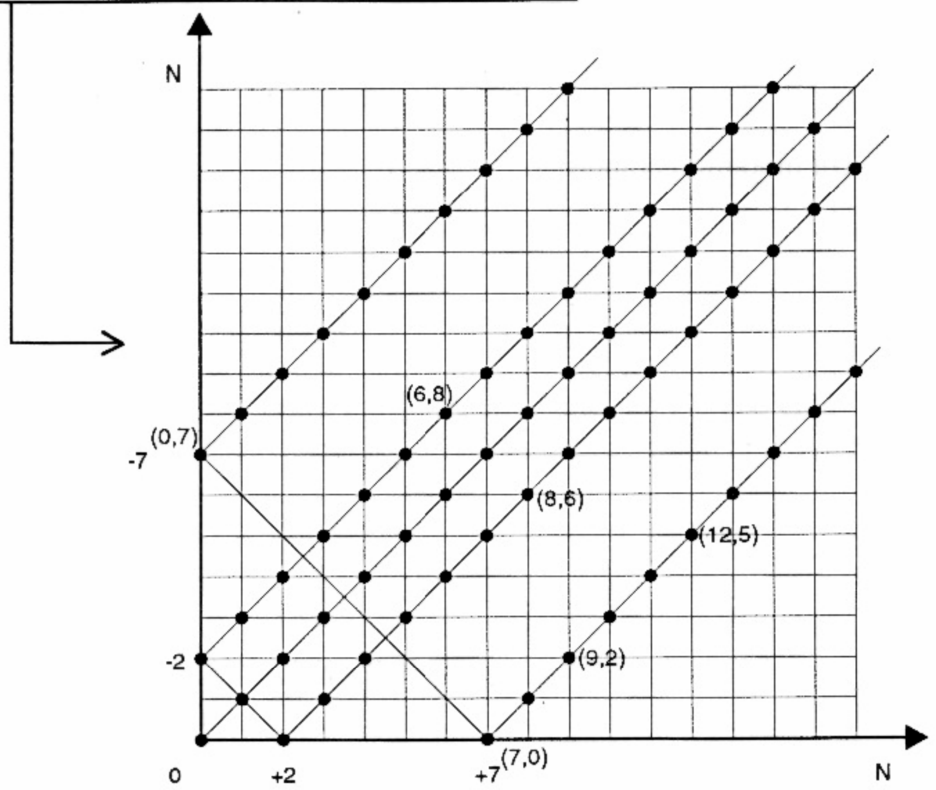
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1+2+3+4+5+6+7+8+9+10



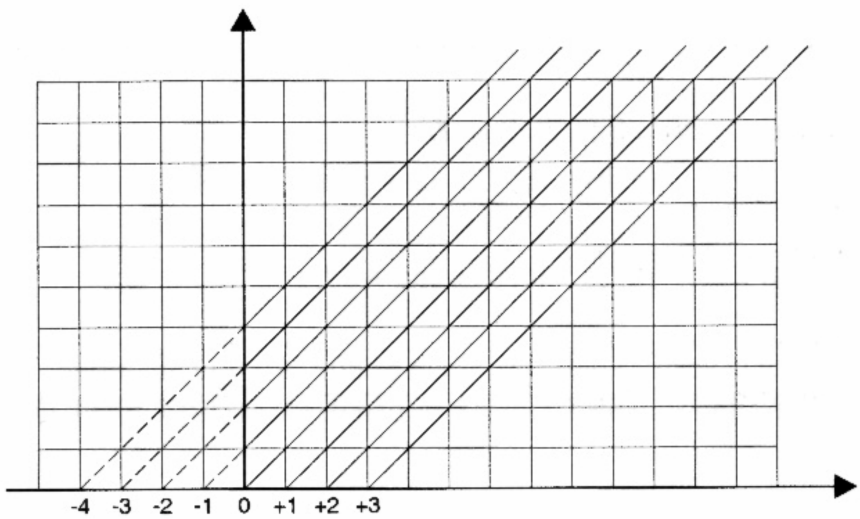
In tale modello, una classe di equivalenza [x, y] risulta formata da punti allineati lungo la direzione della bisettrice I - III quadrante.

I rappresentanti delle varie classi di equivalenza sono le coordinate delle intersezioni delle rette puntiformi con i semiassi positivi.

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA
DELLE COPPIE EQUIDIFFERENTI



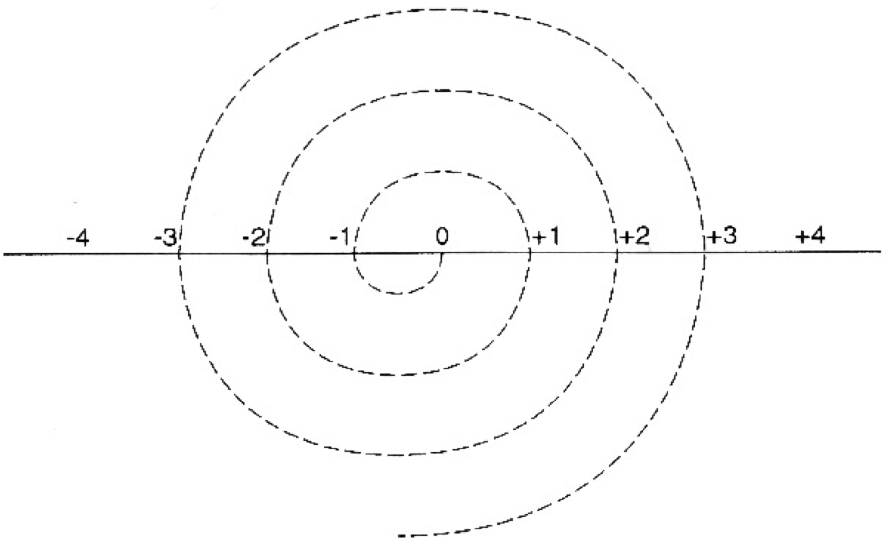
COSTRUZIONE LINEARE DI Z



$\mathbf{Z}$ è equipotente ad $\mathbf{N}$

$$f: n \in \mathbf{N} \dashrightarrow f(n) \in \mathbf{Z} = \begin{cases} n/2 & \text{se n pari} \\ -(n+1)/2 & \text{se n dispari} \end{cases}$$

Un modello geometrico:



Una tale introduzione di $\mathbf{Z}$ rende meno traumatica per gli studenti anche delle definizioni, in $\mathbf{Z}$ delle operazioni di:

Somma $\quad \forall$ (a,b), (c, d) $\in \mathbf{Z}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, b + d) \in \mathbf{Z}$$

Prodotto $\quad (a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc) \in \mathbf{Z}$

Permette la verifica delle proprietà e delle strutture algebriche indotte e di dare una giustificazione non banale della "REGOLA DEI SEGNI".

COSTRUZIONE DI **Q** a partire da **Z**, introducendo la relazione ς

così definita: $\forall\ (a, b), (c, d)\ \mathbf{Z}^2\quad b, c \neq 0$

$$(a, b)\ \varsigma\ (c, d) \leftrightarrow ad = bc$$

ς è una relazione di equivalenza;

$\Rightarrow$ possiamo considerare l'insieme quoziente $\mathbf{Z}^2 / \varsigma$ che chiamiamo **Q.**

OGNI NUMERO RAZIONALE È UNA CLASSE DI EQUIVALENZA

$(6, 8)\ \varsigma\ (12, 16)\ \varsigma\ (-3, -4) \ldots \quad \rightarrow [3, 4] \rightarrow 3/4$

$(-2, 5)\ \varsigma\ (2, 5)\ \varsigma\ (6, -15) \ldots \quad \rightarrow [-2,5] \rightarrow -2/5$

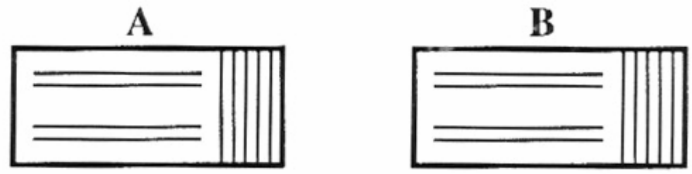
$(2, 4)\ \varsigma\ (-6, -12)\ \varsigma\ (10, 20) \ldots \quad \rightarrow [1,2] \rightarrow 1/2$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Z}^2 / \varsigma = \{[a, b]\ (b \neq 0)\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2 \wedge \text{a primo con b}\}$$

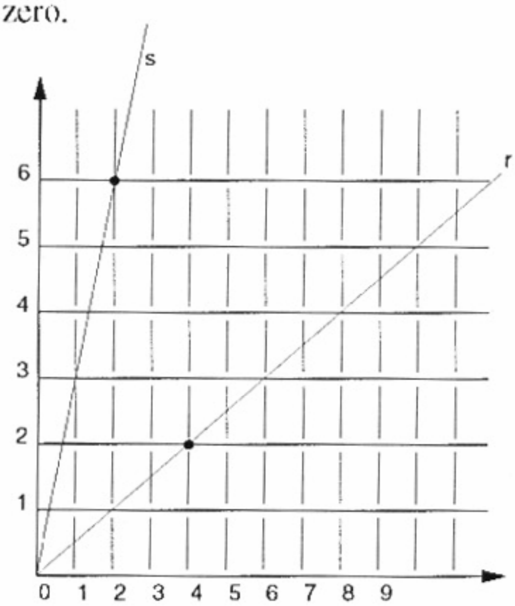
LA RELAZIONE È UNA RELAZIONE DI EQUIRAPPORTO

LA RELAZIONE ς È UNA RELAZIONE DI EQUIRAPPORTO:

IN CLASSE:



Carte di due semi diversi + un jolly cui è attribuito il valore zero.

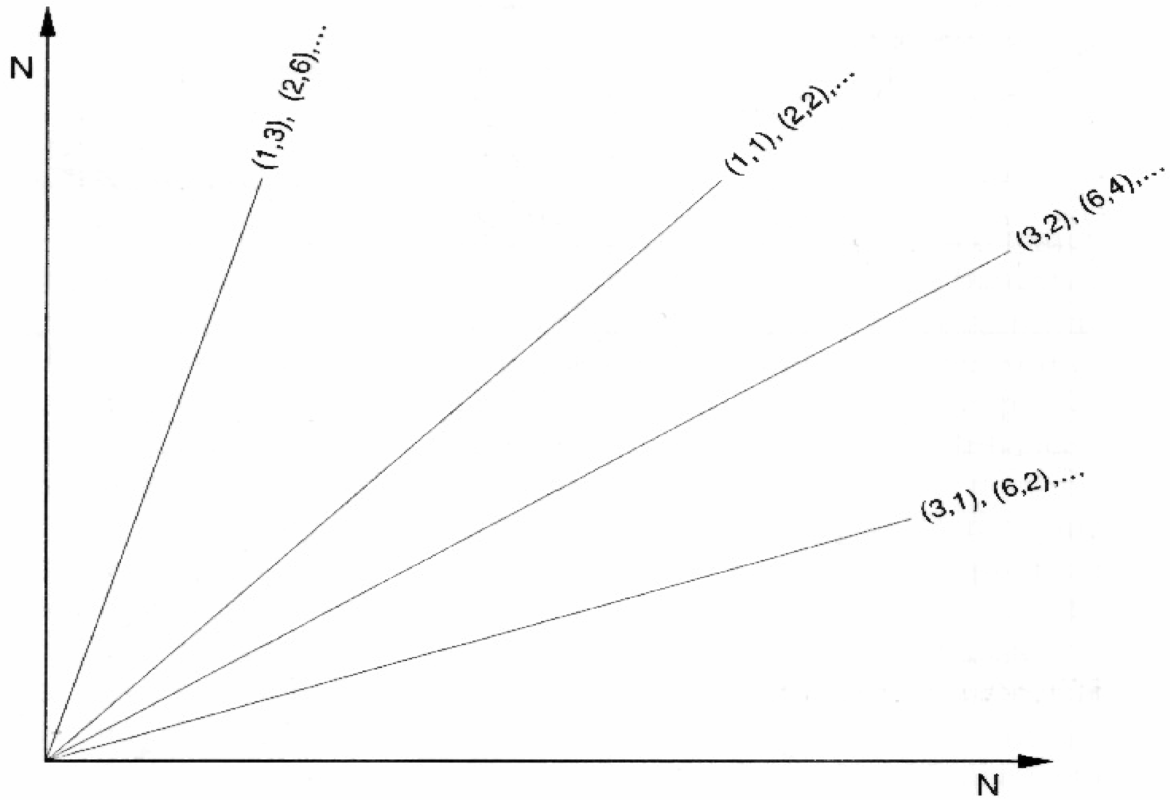


REGOLE DI GIOCO:

RIPETI:

1) Estrai una carta dal mucchio A e una dal mucchio B;
2) Dalla partenza avanza, in orizzontale, di tanti posti di quanto è il valore a della prima carta e da tale punto, avanza, in verticale di tanti posti di quanto è il valore b della seconda carta;
3) Segna il punto in cui sei giunto;
4) Disegna una semiretta dall'origine a tale punto;
5) Annota, dopo aver dato un nome alla semiretta, la coppia di numeri che ti ha permesso di disegnarla;
6) *Metti le carte sui due rispettivi mucchi e mischia;*
7) FINO ALLO STOP DEL DOCENTE.

CI SONO PIÙ COPPIE DI NUMERI CHE TI FANNO DISEGNARE LA STESSA SEMIRETTA ?



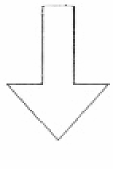
Estendendo il gioco a N x N ...

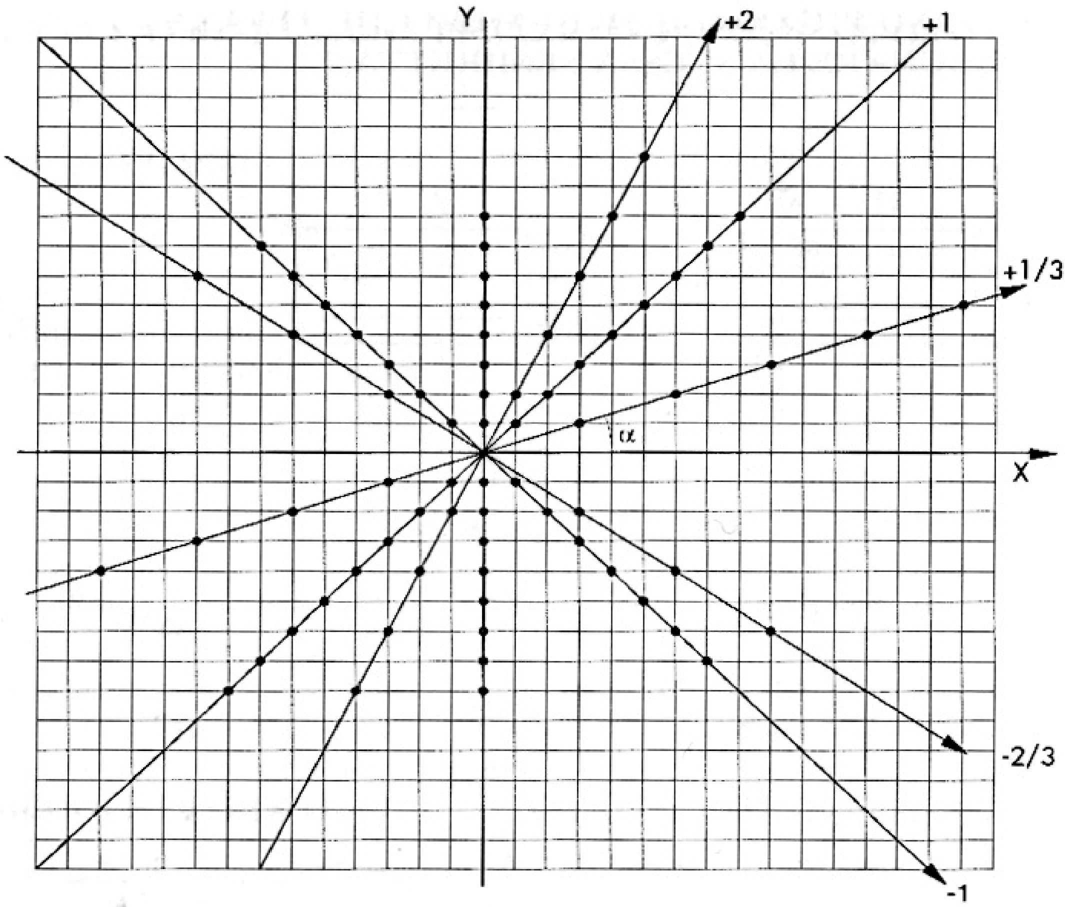
* Ogni Coppia (a, b) porta ad una sola semiretta;

* due coppie (a, b), (c, d) individuano una stessa semiretta se:

$$a : b = c : d \rightarrow ac = bd$$

Estendendo il gioco (con operazioni di simmetria) a Z x Z





COPPIE DELLA STESSA CLASSE HANNO PER IMMAGINE PUNTI ALLINEATI LUNGO UNA DIREZIONE PASSANTE PER L'ORIGINE DEGLI ASSI

* I punti dell'asse delle ascisse non sono immagine di alcuna coppia (a, b) dovendo essere b = 0.

Un numero Q + ↔ la retta puntiforme forma un angolo $\alpha \langle 90°$
Un numero Q - ↔ " " " " $90° \langle \alpha \langle 180°$
Un numero = = ↔ " " " " $\alpha = 90°$