I PIANI DI MOBIUS, LAGUERRE E MINKOWSKI E LE QUADRICHE NON SINGOLARI DELLO SPAZIO PROIETTIVO FINITO

Giorgio FAINA
Dipartimento di Matematica - Università
Via Vanvitelli 1, 06100 Perugia

Inspired by the pioneering works of F. Buekenhout [3] and W. Benz [2] on the intrinsic characterizations of some non singular quadrics Q of a n-dimensional projective space, the aim of this paper is to emphasize the many interconnections between Benz geometries (i.e. Möbius, Laguerre and Minkowski planes) and nonsingular quadrics by surveying some recent characterization theorems of elliptic [6], parabolic [7] and hyperbolic [8] nonsingular quadrics of finite projective space PG(3,q) .

1. Introduzione

La caratterizzazione delle quadriche non singolari di uno spazio proiettivo finito è certamente uno degli argomenti più studiati nell'ambito delle Geometrie di Galois ed a tal fine, nel corso degli ultimi quaranta anni, sono state messe a punto varie teorie. Limitandoci alla trattazione di quelle più propriamente geometriche, gli approcci principali alla caratterizzazione delle quadriche finite non singolari sono due:

l' *approccio classico (o immerso)*, basato sulla caratterizzazione delle quadriche a partire da una coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$, dove $\mathcal{E}$ è un opportuno sottoinsieme dell'insieme dei punti di PG(d,q) ed $\mathfrak{Z}$ è una famiglia di parti di $\mathcal{E}$ soggetta ad opportune condizioni algebriche o geometriche.

Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica e del GNSAGA del CNR.

L' *approccio intrinseco*, basato sulla caratterizzazione delle quadriche a partire da una coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{I})$, dove $\mathcal{E}$ è un insieme astratto, non necessariamente immerso in uno spazio proiettivo, ed $\mathfrak{I}$ è una famiglia o di partizioni di $\mathcal{E}$, o di permutazioni di $\mathcal{E}$ o di sottoinsiemi di $\mathcal{E}$, soggetta a condizioni tali da permettere l'immersione (anche impropria) di $\mathcal{E}$ nell'insieme dei punti sostegno di una quadrica non singolare di un'opportuno PG(d,q).

L' ***approccio classico*** si è evoluto in due direzioni ben distinte:

a) quella detta dell' ***iperpiano tangente***, che riguarda lo studio di coppie $(\mathcal{E},\mathfrak{I})$ nelle quali $\mathcal{E}$ è soggetto a delle condizioni analoghe alla condizione di esistenza di un iperpiano tangente in ogni punto di una quadrica di PG(d,q). Gran parte dei risultati ottenuti con questo tipo di approccio sono stati un riflesso della sorprendente congettura di Kustaanheimo [12] del 1949 e della relativa dimostrazione data da B. Segre nel famoso seguente risultato [18].

TEOREMA 1.1. Se $\mathcal{O}$ è un'ovale (i.e. un insieme di q+1 punti a tre a tre non allineati) del piano proiettivo PG(2,q) di ordine dispari, allora $\mathcal{O}$ è una conica irriducibile.

Tale risultato fu immediatamente seguito da quello ottenuto da A. Barlotti [1] e, indipendentemente, da G. Panella [15], relativo alla classificazione delle quadriche ellittiche in PG(3,q), con q dispari.

TEOREMA 1.2. Se Ω è un ovoide (i.e. un insieme di q^2+1 punti a tre a tre non allineati) dello spazio proiettivo PG(3,q) di ordine dispari, allora Ω è una quadrica ellittica.

b) quella detta dei ***caratteri***, con la quale si affronta il problema della caratterizzazione delle quadriche a partire da sottoinsiemi di un PG(d,q) doddisfacenti ad opportune restrizioni sulla cardinalità delle loro intersezioni con certi sottospazi lineari r-dimensionali dello stesso spazio ambiente PG(d,q). Anche in questo caso, per meglio chiarire la problematica in discussione, citiamo due risultati ottenuti da F. Buekenhout [4] e J. Thas [20] rispettivamente.

Sia $\mathcal{T}$ un insieme di punti di uno spazio proiettivo *PG(d,q).* Si dice che $\mathcal{T}$ è un *Tallini set* di *PG(d,q)* se ogni retta che lo incontra in almeno tre punti è completamente contenuta in $\mathcal{T}$. Una *tangente* di un Tallini set $\mathcal{T}$ è una retta che o interseca $\mathcal{T}$ in esattamente un punto oppure è completamente contenuta in $\mathcal{T}$. Un *insieme quadratico (quadratic set)* è un Tallini set $\mathcal{T}$ con la seguente proprietà: per ogni punto A di $\mathcal{T}$, l'insieme

$$\mathcal{T}_A = \{B \mid B=A \text{ oppure } B\neq A \text{ e la retta AB è tangente}\}$$

o coincide con l'insieme dei punti di un iperpiano oppure è l'insieme di tutti i punti.

TEOREMA 1.3. Un insieme quadratico di uno spazio proiettivo (non necessariamente finito) $\mathcal{P}$ o è una quadrica oppure è un ovoide di $\mathcal{P}$.

In [20], Thas modifica la situazione del precedente Teorema provando che:

TEOREMA 1.4. In un PG(d,q) un insieme $\mathcal{K}$ di punti tale che ogni iperpiano lo incontri o in 1 oppure in m punti distinti, con $m \geq 2$, e che abbia almeno un iperpiano tangente o è una retta oppure è un ovoide di PG(d,q).

Il metodo generale ***intrinseco*** si è, anch'esso, sviluppato lungo due direzioni:

a) l'approccio ***intrinseco relativo***, che consiste nello studio di coppie $(\mathfrak{E},\mathfrak{I})$ nelle quali $\mathfrak{E}$ è un sottoinsieme di punti di una struttura di incidenza $\mathcal{S}$ (ad es., un piano di Mobius, un piano di Laguerre, un piano di Minkowski, un quadrangolo generalizzato, uno spazio planare) ed ha come scopo quello di stabilire sotto quali condizioni su $\mathcal{S}$ e su $\mathfrak{I}$ è possibile estendere $\mathcal{S}$ ad un PG(d,q) in modo tale che $\mathfrak{E}$ risulti immerso (anche impropriamente) nell'insieme sostegno dei punti di una quadrica irriducibile di PG(d,q). Come al solito, per meglio chiarire la problematica relativa, ci soffermiamo su un significativo risultato ottenuto in questo ambito.

Sia (S,L) uno spazio di rette, cioè sia S un insieme i cui elementi chiameremo punti, L una famiglia di parti di S, i cui elementi chiameremo rette, tale che ogni retta di L contenga almeno due punti e per due punti distinti passi una sola retta. Supponiamo che esista una famiglia P di sottospazi di (S,L) tale che: $|P|\geq 2$, ogni $\pi\in P$ contenga tre punti indipendenti e per tre punti indipendenti passi un sol elemento di P. La terna (S,L,P) prende il nome di spazio planare e gli elementi di P si dicono piani.

Si dice calotta di uno spazio planare (S,L,P) ogni insieme di punti a tre a tre non allineati. Una calotta H di uno spazio planare (S,L,P) si dice ovoide se:

per ogni $X\in H$, l'unione delle rette tangenti in X ad H costituisce un sottoinsieme t_X di S tale che per ogni coppia di punti distinti $Y,Z\in t_X$, la retta per Y e Z è contenuta in t_X e tale che ogni piano per X incontra t_X in una retta.

D'ora in avanti supporremo che lo spazio planare (S,L,P) abbia tutte le rette con uguale cardinalità $k\geq 2$ ed i piani con uguale cardinalità v. A partire da questi concetti è stata provata la seguente caratterizzazione degli ovoidi (cfr. [19]).

TEOREMA 1.5. Se in uno spazio planare (S,L,P) esiste un ovoide H , allora lo spazio planare coincide con PG(3,q) ed H è una quadrica ellittica se $q=k-1$ è dispari, oppure un ovoide di PG(3,q) se $q=k-1$ è pari.

b) l'*approccio intrinseco assoluto*. Tale approccio permette di fornire caratterizzazioni delle quadriche non singolari di PG(d,q) a partire da una coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{J})$ dove $\mathcal{E}$ è un insieme astratto qualsiasi. La sua origine risale, implicitamente, al famoso lavoro di F. Buekenhout "Etude intrinséque des ovales", pubblicato nel 1966 (cfr. [3]), ed esplicitamente all'articolo di W. Benz, "Permutations and plane sections of a ruled quadric", pubblicato nel 1972 (cfr [2]).

Altre interessantissime ricerche inquadrabili in questo filone sono dovute a Korchmaros e Olanda [13] ed a Lo Re e Olanda [14]. In esse si caratterizzano gli ovoidi e le quadriche ellittiche di PG(3,q) e le quadriche iperboliche di PG(3,q), rispettivamente, a partire da un insieme astratto $\mathcal{E}$ e da una famiglia di permutazioni involutorie di $\mathcal{E}$. Questo tipo di approccio è il più recente, ed è ancora poco approfondito. Ci sembra pertanto opportuno dedicare questo lavoro ad alcuni recentissimi risultati ottenuti, in questo ordine di idee, dallo stesso autore ed ancora in corso di pubblicazione.

2. I piani di Benz

Prima di passare in rassegna tali risultati, è necessario richiamare alcune definizioni della Teoria dei piani di Benz. Per quanto riguarda, invece, le più familiari definizioni e le principali proprietà relative alle quadriche non singolari di PG(3,q), faremo costante riferimento a [10] e [11].

Un *piano di Benz* è una terna ordinata $(\mathcal{P},\mathcal{B},R)$, dove $\mathcal{P}$ è un insieme astratto i cui elementi sono detti *punti*, $\mathcal{B}$ è una famiglia di parti di $\mathcal{P}$ i cui elementi sono detti *cerchi* ed R è una famiglia di relazioni di equivalenza su $\mathcal{P}$, tale che valgono in essa i seguenti assiomi (due punti X e Y di $\mathcal{P}$ si dicono dipendenti se esiste una relazione di equivalenza $\varrho\in R$ tale che $X\varrho Y$, altrimenti essi si dicono indipendenti):

(B1) per ogni terna di punti a due a due indipendenti $X,Y,Z\in\mathcal{P}$ esiste un unico cerchio $\gamma(X,Y,Z)\in\mathcal{B}$ che li contiene;

(B2) per ogni cerchio $\gamma\in\mathcal{B}$ e per ogni coppia di punti indipendenti $X,Y\in\mathcal{P}$, con $X\in\gamma$, esiste un unico cerchio $\beta(Y,\gamma,X)$ che contiene Y ed è tangente a γ in X (cioè interseca γ soltanto in X se $Y\notin\gamma$ e coincide con γ se $Y\in\gamma$);

(B3) per ogni punto $X\in\mathcal{P}$, per ogni cerchio $\gamma\in\mathcal{B}$ e per ogni relazione di equivalenza $\varrho\in R$ esiste esattamente un punto $Y\in\gamma$ tale che $X\varrho Y$;

(B4) per ogni coppia di punti $X,Y\in\mathcal{P}$ e per ogni coppia di differenti relazioni di equivalenza $\varrho,\varrho'\in R$ esiste esattamente un punto $Z\in\mathcal{P}$ tale che $X\varrho Z$ e $Z\varrho' Y$.

(B5) esistono quattro punti non appartenenti ad un medesimo cerchio ed a due a due indipendenti.

Nel caso in cui $R\equiv\emptyset$, un piano di Benz si dice piano di Möbius; in tal caso gli assiomi (B3) e (B4) sono sovrabbondanti.

Nel caso in cui $|R|=1$, un piano di Benz si dice piano di Laguerre. In tal caso l'assioma (B4) è sovrabbondante.

Nel caso in cui $|R|=2$, un piano di Benz si dice piano di Minkowski.

4. Gli Ovoidi Generalizzati ed i Piani di Möbius

Sia Ω un ovoide di PG(3,q) ed r una qualsiasi retta esterna ad Ω. Al variare del piano π nel fascio di piani di asse r, resta individuata una partizione di Ω formata dagli insiemi $\pi\cap\Omega$. E' ben noto che ogni piano interseca Ω o in un unico punto oppure in n+1 punti distinti. E' altresì evidente che se π e π' sono due piani tali che $\pi\cap\pi'\cap\Omega=\emptyset$, allora i *cerchi* $\pi\cap\Omega$ e $\pi\cap\Omega'$ sono contenuti in una unica partizione di Ω, quella relativa al fascio di piani di asse la retta $\pi\cap\pi'$ esterna ad Ω.
Le nozioni di ovoide e di piano di Möbius sono strettamente legate tra loro. Infatti, la struttura di incidenza $I(\Omega)=(\mathcal{P},\mathcal{B},|)$, con $\mathcal{P}\equiv\Omega$, $\mathcal{B}\equiv\{\pi\cap\Omega : \pi$ piano di PG(3,q) non tangente ad $\Omega\}$ e $|=\in$, è un piano di Möbius (o inversivo) finito di ordine q. Un piano di Möbius isomorfo ad un $I(\Omega)$ è detto *ovoidale*.
Tutti i piani di Möbius finiti a noi noti sono ovoidali. In virtù del già citato Teorema 1.2 di Barlotti, ogni piano di Möbius finito di ordine q dispari che si conosca è isomorfo ad $I(\Omega)$, con Ω quadrica ellittica di un opportuno PG(3,q). Per q pari, invece, sono note due distinte classi di ovoidi: la quadrica ellittica e l'ovoide di Suzuki-Tits (cfr. [22]) e non è escluso che possano esistere altre classi di ovoidi. D'altro canto, è ben noto un teorema di P. Dembowski nel quale si prova che ogni piano di Möbius finito è ovoidale [5]. Pertanto, nel caso pari, l'ordine di un piano di Möbius è sempre della forma $q=2^h$.
A questo punto ci sembra naturale porsi il seguente problema:

dato un arbitrario insieme finito $\mathcal{E}$ ed una famiglia $\mathfrak{F}$ di partizioni di $\mathcal{E}$, quali condizioni è necessario imporre su $\mathfrak{F}$ affinché si possa definire su $\mathcal{E}$ una struttura di piano di Möbius (ovoidale o non) oppure di ovoide di un opportuno spazio proiettivo PG(3,q)?

In [6] sono stati dimostrati alcuni risultati inerenti a questo problema, ma prima di trattarli è necessario fornire alcune definizioni.
Siano $\mathcal{E}$ un insieme astratto finito ed $\mathfrak{I}$ una famiglia di partizioni di $\mathcal{E}$. Si denoti con $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti quei sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ che appartengono ad almeno una partizione di $\mathfrak{I}$. Nel seguito, gli elementi di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{B}$ saranno detti *punti* e *cerchi*, rispettivamente.

Onde evitare lo studio di casi banali, d'ora in avanti, denotata con v la cardinalità di $\mathcal{E}$ e fissato un intero positivo $n \geq 3$, supporremo che:

(2.1) ogni cerchio $\gamma \in \mathcal{B}$ contiene o uno o n punti;

(2.2) esistono in $\mathcal{B}$ due cerchi di cardinalità n (o n-cerchi) disgiunti e tali che la loro unione è propriamente contenuta in $\mathcal{E}$.

La coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{I})$ si dice *ovoide generalizzato di tipo n* (o, più brevemente, OG(n)) se valgono le seguenti proprietà:

(A.1) per ogni terna di punti distinti passa uno ed un solo cerchio;

(A.2) ogni coppia di cerchi disgiunti è contenuta in una ed una sola partizione;

In base alle osservazioni riportate all'inizio di questo numero, possiamo osservare quanto segue.

Se Ω è un ovoide (ad es., una quadrica ellittica non singolare) di PG(3,q), ad ogni retta r esterna ad Ω resta associato un fascio di piani ed ognuno di tali piani interseca Ω o in un punto oppure in $n=q+1$ punti distinti. Pertanto, ad ogni retta r esterna ad Ω resta associata una partizione $\mathcal{P}(r)$ di Ω stessa e, denotata con $\mathfrak{I}$ la famiglia di tutte le partizioni $\mathcal{P}(r)$ ottenute al variare di r nell'insieme delle rette esterne ad Ω, la coppia $(\Omega,\mathfrak{I})$ fornisce un esempio di OG(q+1).

Un esempio di OG(n) non derivabile da alcun ovoide proiettivo né da alcun piano di Möbius è, invece, il seguente: sia $\mathcal{E}$ un insieme di cardinalità 7 e sia $\mathcal{B}_3$ la famiglia di tutte le terne di punti distinti di $\mathcal{E}$. Inoltre, sia $\mathfrak{I}$ la famiglia di tutte le partizioni di $\mathcal{E}$ formate da due terne disgiunte di $\mathcal{B}_3$ e dal residuo punto di $\mathcal{E}$ non contenuto in esse e la partizione di $\mathcal{E}$ formata da tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ di cardinalità 1 sia anch'essa in $\mathfrak{I}$. E' facile verificare che $(\mathcal{E},\mathfrak{I})$ è un OG(3). Inoltre, poiché non esistono piani inversivi di cardinalità 7, tale struttura non è derivabile da alcun ovoide proiettivo né da alcun piano inversivo ovoidale o non.

Esistono anche OG(n) tali che l'insieme degli 1-cerchi è vuoto. Si consideri, infatti, un qualsiasi insieme $\mathcal{E}$ di cardinalità 9 e si denoti con $\mathcal{B}$ la famiglia di tutte le terne non ordinate di punti di $\mathcal{E}$. Se $\mathfrak{Z}$ denota la famiglia delle partizioni di $\mathcal{E}$ costituite da tre terne disgiunte di $\mathfrak{Z}$, allora la coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un esempio di OG(3) con $\mathcal{B}_1=\emptyset$. Anche in questo esempio $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ non è derivabile da alcun ovoide proiettivo né da alcun piano inversivo ovoidale o non.

Al fine di snellire la successiva trattazione denoteremo con:

$\mathcal{B}_n$ la famiglia di tutti gli n-cerchi di $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}_1$ la famiglia di tutti i cerchi di $\mathcal{B}$ aventi cardinalità 1 (o 1-cerchi)

$\mathfrak{Z}(\gamma)$ la famiglia delle partizioni di $\mathfrak{Z}$ che contengono un fissato cerchio γ di $\mathcal{B}$

$\mathcal{B}(X)$ la famiglia dei cerchi di $\mathcal{B}$ che contengono un assegnato punto X di $\mathcal{E}$

Se in un OG(n) vale la successiva proprietà (A.3), diremo che esso è proiettivo e lo denoteremo con POG(n):

(A.3) esiste almeno un 1-cerchio $\{X\}$ tale che $|\mathcal{B}(X)|=|\mathfrak{Z}\{X\}|+n$.

In [6] sono stati provati i seguenti risultati.

TEOREMA 3.1. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PGO(n), allora $(\mathcal{E},\mathcal{B}_n)$ è un piano di Mobius di ordine q=n-1.

LEMMA 3.2. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PGO(n), allora ogni partizione di $\mathfrak{Z}$ contiene esattamente due 1-cerchi e ad ogni n-cerchio γ resta associata una permutazione involutoria $I(\gamma)$ dei punti di $\mathcal{E}$ che ha come punti uniti tutti e soli i punti di γ.

Denoteremo, d'ora in avanti, con Γ_n la famiglia di tutte le permutazioni involutorie $I(\gamma)$ di cui al precedente lemma.

Come è stato già ricordato, se q è pari, tutti i piani di Mobius di ordine q sono ovoidali e non si conoscono ancora piani inversivi non ovoidali di ordine q dispari (cfr [5], p. 254). Inoltre, (cfr. [1]), se q è dispari, ogni ovoide proiettivo di PG(3,q) è l'insieme dei punti di una quadrica ellittica dello stesso PG(3,q).

TEOREMA 3.3. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PGO(n), con q=n-1 pari, allora $q=2^h$ per un opportuno intero $h\geq 2$ e l'insieme $\mathcal{E}$ è un ovoide proiettivo di PG(3,q).

TEOREMA 3.4. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PGO(n), con q=n-1 dispari, tale che per ogni coppia di punti distinti di $\mathcal{E}$ ogni involuzione di Γ_n che li scambia è permutabile con ogni involuzione di Γ_n che li fissa, allora $\mathcal{E}$ è un ovoide proiettivo (i.e. una quadrica ellittica) di PG(3,q).

4. Coni generalizzati e Piani di Laguerre

Sia Ω un ovale del piano proiettivo π=PG(2,q). Sia V un punto di PG(3,q)$\setminus\pi$ e sia Σ il cono che proietta Ω da V. Le nozioni di cono e di piano di Laguerre sono strettamente legate tra loro. Infatti, siano: $\mathcal{P}\equiv\Sigma\setminus\{V\}$, $\mathcal{B}_1$ l'insieme di tutti i generatori di Σ, $\mathcal{B}_2$ la famiglia degli insiemi ottenuti intersecando Σ con i piani di PG(3,q) non contenenti V ed $|$ sia la naturale incidenza. E' facile dimostrare che la struttura di incidenza $L(\Omega):=(\mathcal{P},\mathcal{B},|)$, con $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$, è un piano di Laguerre di ordine q. Un piano di Laguerre isomorfo ad un $L(\Omega)$ è anche detto *ovoidale*. Se l'ovale Ω è una conica irriducibile, allora ogni piano di Laguerre isomorfo a $L(\Omega)$ è detto *classico*. Tutti i piani di Laguerre finiti a noi noti sono ovoidali. Dal teorema 1.1 discende immediatamente che ogni piano di Laguerre finito di ordine dispari è classico.

Si osservi, inoltre, che: posto $\mathcal{E}=\Sigma\setminus\{V\}$, ad ogni retta di PG(3,q) esterna ad $\mathcal{E}$ corrisponde una partizione di $\mathcal{E}$ stesso e, come nel numero precedente, è naturale porsi il seguente problema:

dato un arbitrario insieme finito $\mathcal{E}$ ed una famiglia $\mathfrak{Z}$ di partizioni di $\mathcal{E}$, quali condizioni è necessario imporre su $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ affinché si possa definire su $\mathcal{E}$ una struttura di piano di Laguerre (ovoidale o non) oppure di cono quadrico di un opportuno spazio proiettivo PG(3,q)?

In [7] sono stati dimostrati alcuni risultati inerenti a questo problema, ma prima di trattarli è necessario fornire alcune definizioni.

Siano $\mathcal{E}$ un insieme astratto finito ed $\mathfrak{Z}$ una famiglia di partizioni di $\mathcal{E}$. Si denoti con $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti quei sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ che appartengono ad almeno una partizione di $\mathfrak{Z}$. Nel seguito, gli elementi di $\mathcal{E}$ e di $\mathcal{B}$ saranno detti *punti* e *cerchi*, rispettivamente. Due punti X e Y di $\mathcal{E}$ si diranno *dipendenti* se non esiste alcun cerchio di $\mathcal{B}$ che li contiene simultaneamente. Se X ed Y sono dipendenti denoteremo ciò con il seguente simbolo: $X\|Y$.

Come nel caso degli OG(n), onde evitare lo studio di casi banali, d'ora in avanti supporremo che valgano anche in questo numero le condizioni (2.1) e (2.2).

La coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ si dice *cono generalizzato di tipo n* (o, più brevemente, CG(n)) se valgono le seguenti proprietà:

(A.1) per ogni terna di punti a due a due indipendenti passa uno ed un solo cerchio;

(A.2) ogni coppia di cerchi disgiunti è contenuta in una ed una sola partizione;

(A.3) comunque si fissino un cerchio γ ed un punto $X\in\mathcal{E}\setminus\gamma$, esiste in γ esattamente un punto X_γ tale che $X_\gamma\|X$.

Un CG(n) si dice proiettivo, e si denota con PCG(n), se in esso vale la seguente proprietà:

(A.4) Esiste almeno una coppia di punti indipendenti che è contenuta in esattamente $s=n-1$ cerchi.

Osserviamo, innanzitutto, che (A.4) è indipendente dagli altri assiomi. Infatti, sia $\mathcal{E}:=\{X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2,Y_3,Z_1,Z_2,Z_3\}$, con $|\mathcal{E}|=9$, e sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutte le terne di punti di $\mathcal{E}$ del tipo $\{X_i,Y_j,Z_k\}$, $i,j,k=1,2,3$. Sia, infine, $\mathfrak{Z}$ la famiglia delle partizioni di $\mathcal{E}$ ognuna delle quali è costituita da tre terne disgiunte di $\mathcal{B}$. E' facile verificare che $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ verifica (A.1), (A.2) ed (A.3) con $m=1$ ed $n=3$ ma anche che $s=3\neq n-1$.

Invece, a partire da un cono quadrico di PG(3,q), si ottiene un esempio di PCG(n), con $n=q+1$. Infatti, sia Σ un cono quadrico di vertice V in PG(3,q). Posto $\mathcal{E}=\Sigma\setminus\{V\}$, ad ogni retta dello spazio esterna a Σ corrisponde in modo naturale una partizione di $\mathcal{E}$ stesso individuata dalle intersezioni con $\mathcal{E}$ dei singoli piani del fascio di asse la retta stessa. Denotata con $\mathfrak{Z}$ la famiglia delle partizioni di $\mathcal{E}$ ottenibili nel modo anzidetto, è facile verificare che $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un CG(n), con $n=q+1$ ed $s=n-1=q$.

In accordo con la terminologia adottata sui piani di Laguerre, sui piani di Laguerre ovoidali e sui piani di Laguerre classici, in [7] sono stati dimostrati i seguenti risultati:

TEOREMA 4.1. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PCG(n), allora esiste una partizione $\mathcal{L}$ di $\mathcal{E}$ tale che la struttura di incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L}\cup\mathcal{B}, I)$, dove con I si indica la naturale relazione d'incidenza, è un piano di Laguerre.

Un CG(n) si dice *regolare* se soddisfa le due seguenti condizioni:

(TF) Per ogni terna di coppie (X_i,γ_i), con $X_i\in\mathcal{E}$, $X_i\in\gamma_i$, $X_1\neq X_2\neq X_3\neq X_1$, $i=1,2,3$, tali che almeno due dei punti X_i sono indipendenti e nessun cerchio tangente a γ_i in X_i è tangente anche a γ_j in X_j per $i\neq j$, esiste un punto $Y\in\mathcal{E}\setminus\{X_1,X_2,X_3\}$ tale che i cerchi β_i, $i=1,2,3$, dove β_i è l'unico cerchio per Y tangente in X_i a γ_i, sono a due a due tangenti in Y.

(DF) Per ogni coppia (X_1,γ_1), (X_2,γ_2), con X_1 ed X_2 indipendenti e tali che nessun cerchio è tangente sia a γ_1 in X_1 che a γ_2 in X_2, e tale che fissato un qualsiasi punto Y, indipendente sia con X_1 che con X_2, e denotata con $\partial(Y)$ la famiglia dei punti di $\mathcal{E}$ dipendenti con Y, esiste in $\partial(Y)$ un punto Z tale che i cerchi β_1 e β_2, dove β_i è l'unico cerchio per Z tangente a γ_i in X_i $(i=1,2)$, sono tangenti tra loro.

TEOREMA 4.2. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PCG(n) regolare, con n dispari, allora esiste una partizione $\mathcal{L}$ di $\mathcal{E}$ tale che la struttura di incidenza $(\mathcal{E}, \mathcal{L}\cup\mathcal{B}, I)$, dove con I si indica la naturale relazione d'incidenza, è un piano di Laguerre classico.

COROLLARIO Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PCG(n) regolare con n dispari, allora $\mathcal{E}$ coincide con l'insieme dei punti di un cono quadrico di

PG(3,q), con q=n-1, privato del suo vertice ed ogni cerchio di $\mathbb{B}$ coincide con l'insieme intersezione di un opportuno piano di PG(3,q), non passante per il vertice del cono, ed $\mathcal{E}$.

5. Iperbolodi generalizzati e piani di Minkowski

Siano $\mathcal{H}$ una quadrica iperbolica di PG(3,q), $\mathbb{P}:=\mathcal{H}$, $\mathbb{B}_1=\mathbb{B}_1'\cup\mathbb{B}_1''$, dove $\mathbb{B}_1'$ e $\mathbb{B}_2'$ sono le due famiglie di generatori di $\mathcal{H}$, $\mathbb{B}_2$ la famiglia delle intersezioni di $\mathcal{H}$ con i piani non tangenti ad $\mathcal{H}$ stesso ed $|$ la naturale relazione d'incidenza. Allora la struttura di incidenza $M(\mathcal{H})=(\mathbb{P},\mathbb{B}_1\cup\mathbb{B}_2,|)$ è un piano di Minkowski di ordine q. Ogni piano di Minkowski isomorfo ad un $M(\mathcal{H})$ si dice *classico*.

Ricordiamo che in [17] è stata dimostrata l'esistenza di piani di Minkowski di ordine n dispari che sono non classici. Invece, in [9] ed indipendentemente in [16], è stato dimostrato che ogni piano di Minkowski di ordine pari è classico. Perciò nel caso pari l'ordine di un piano di Minkowski è sempre della forma $n=2^h$.

Si osservi, inoltre, che: posto $\mathcal{E}=\mathcal{H}$, ad ogni retta r di PG(3,q) esterna ad $\mathcal{E}$ corrisponde una partizione di $\mathcal{E}$ stesso generata dai piani del fascio di asse la stessa retta r.

A questo punto, come nei numeri precedenti, è naturale porsi l'analogo seguente quesito:

dato un arbitrario insieme finito $\mathcal{E}$ ed una famiglia $\mathfrak{I}$ di partizioni di $\mathcal{E}$, quali condizioni è necessario imporre su $(\mathcal{E},\mathfrak{I})$ affinché si possa definire su $\mathcal{E}$ una struttura di piano di Minkowski (classico o non) oppure di quadrica iperbolica di un opportuno spazio proiettivo PG(3,q)?

Prima di affrontare tale questione, diamo alcune definizioni. Come nei numeri precedenti, siano $\mathcal{E}$ un insieme astratto finito ed $\mathfrak{I}$ una famiglia di partizioni di $\mathcal{E}$. Si denoti con $\mathbb{B}$ la famiglia di tutti quei sottoinsiemi di $\mathcal{E}$ che appartengono ad almeno una partizione di $\mathfrak{I}$. Inoltre, come nei numeri precedenti, si definiscano le nozioni di punto, di cerchio, di dipendenza tra due punti così come si supponganno soddisfatte le (2.1) e (2.2).

La coppia $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ si dice *iperboloide generalizzato di tipo n* (o, più brevemente, IG(n)) se valgono le seguenti proprietà:

(A.1) per ogni terna di punti a due a due indipendenti passa uno ed un solo cerchio;

(A.2) ogni coppia di cerchi disgiunti è contenuta in una ed una sola partizione;

(A.3) comunque si fissino un cerchio γ ed un punto $X\in\mathcal{E}\setminus\gamma$, esistono in γ esattamente due punti $X_{1\gamma}$ e $X_{2\gamma}$ tali che $X_{1\gamma}\|X\|X_{2\gamma}$.

Nel seguito, per brevità, spesso indicheremo con $\gamma(X)$ la famiglia dei punti del cerchio γ indipendenti rispetto ad un fissato punto $X\notin\gamma$.

Un IG(n) si dice proiettivo, e si denota con PIG(n), se in esso vale la seguente proprietà:

(A.4) Esiste almeno una coppia di punti indipendenti che è contenuta in esattamente $s=n-2$ cerchi.

Se H è una quadrica iperbolica non-singolare di PG(3,q), la coppia $(H,\mathfrak{Z})$, dove $\mathfrak{Z}$ indica la famiglia delle partizioni dell'insieme dei punti che costituiscono H individuate da tutte le rette esterne ad H stesso, ci fornisce un esempio di PIG(n) con $n=q+1$.

In virtù di (A.3), fissato un qualsiasi cerchio $\gamma\in\mathcal{B}$, si può definire almeno una applicazione

$$\varphi(\gamma):\mathcal{E}\setminus\gamma \to \gamma\mathrm{x}\gamma$$

tale che ad ogni punto X del dominio faccia corrispondere una coppia ordinata $(X_{1\gamma},X_{2\gamma})$ di punti di γ dipendenti con X stesso.

Allora, fissate una qualsiasi partizione $\mathcal{P}\in\mathfrak{Z}$ ed una qualsiasi famiglia $\Psi=\{\varphi(\beta)\mid\beta\in\mathcal{P}\}$ di applicazioni, denoteremo con $r_i(\Psi)(X)$, [o, se il contesto lo permetterà, semplicemente con $r_i(X)$] l'insieme $\{X_{i\beta}\mid\beta\in\mathcal{P},\ X\notin\beta\}\cup\{X\}$, $i=1,2$, dove $(X_{1\beta},X_{2\beta})=\varphi(\beta)(X)$.

Un PIG(n), $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$, si dice *regolare* se ogni $\varphi(\gamma)$ è iniettiva $(\gamma\in\mathcal{B})$ e se, rispetto ad almeno una partizione $\mathcal{P}\in\mathfrak{Z}$, esiste una famiglia $\Psi=\{\varphi(\gamma)\mid\gamma\in\mathcal{P}\}$ tale che $r_i(\Psi)(X)=r_i(\Psi)(X_{i\partial})$ per ogni $\partial\in\mathcal{P}$.

A partire dal concetto di iperboloide generalizzato appena introdotto, in [8] sono stati dimostrati i seguenti risultati:

Teorema 5.1. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PIG(n) regolare, allora esiste in $\mathcal{E}$ una famiglia $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$ di sottoinsiemi tale che la struttura d'incidenza $(\mathcal{E},\mathcal{L}\cup\mathcal{B},|)$, dove con $|$ si indica la naturale relazione d'incidenza, è un piano di Minkowski di ordine q=n-1.

Dal Teorema 5.1 e dal fondamentale Teorema di W. Heise [9] e N. Percsy [16], segue immediatamente che vale il seguente

Teorema 5.2. Se $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ è un PIG(n) regolare con q=n-1 pari,allora $(\mathcal{E},\mathcal{L}\cup\mathcal{B},I)$ è un piano di Minkowski classico ed $\mathcal{E}$ è l'insieme dei punti di una quadrica iperbolica di PG(3,q).

Dato un PIG(n) regolare e fissato un qualsiasi cerchio $\gamma\in\mathcal{B}$ ed un qualsiasi punto $X\in\mathcal{E}\setminus\gamma$, se esiste un punto $Y\in\mathcal{E}\setminus\gamma$ tale che, con riferimento ad una particolare Ψ, $X_{1\gamma}=Y_{2\gamma}$ e $X_{2\gamma}=Y_{1\gamma}$, allora diremo che X ed Y sono *opposti* rispetto a γ. Se X e Y sono opposti rispetto a γ allora essi sono indipendenti. Infatti, se $X\|Y$, allora si avrebbe che o $X_{1\gamma}=Y_{1\gamma}$ o $X_{2\gamma}=Y_{1\gamma}$ e quindi che $X_{1\gamma}=X_{2\gamma}$ il che è *assurdo. Vale allora anche il seguente*

Teorema 5.3. Sia $(\mathcal{E},\mathfrak{Z})$ un PIG(n) regolare e tale che per ogni coppia di punti X, Y di $\mathcal{E}$ tra loro opposti rispetto ad un fissato cerchio $\gamma\in\mathcal{B}$ e per ogni cerchio ∂, contenente sia X che Y, si verifichi che, se $Z\in\partial$, allora esiste un punto $U\in\partial$ opposto a Z rispetto a γ.

Allora la struttura d'incidenza $(\mathcal{E},\mathcal{L}\cup\mathcal{B},I)$ è un piano di Minkowski di ordine q=n-1 ed $\mathcal{E}$ è l'insieme dei punti di una quadrica iperbolica di PG(3,q).

BIBLIOGRAFIA

1. BARLOTTI, A., Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo, *Boll. Un. Mat. Ital.* **10** (1955), 498–506.
2. BENZ, W., Permutations and plane sections of a ruled quadric, *Symposia Math.*, Academic Press, New York, 5 (1971), 325-339.
3. BUEKENHOUT, F., Etude intrinsèque des ovales, *Rend. Mat. Appl.* **25** (1966), 333-393.
4. BUEKENHOUT, F., Ensembles quadratiques des espaces projectifs, *Math. Z.* **110** (1969), 306–318.
5. DEMBOWSKI, P., Finite geometries, Springer Berlin, 1968.
6. FAINA, G., Ovoidi generalizzati, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **46** (1988), 247–257.
7. FAINA, G., On embeddable Laguerre Planes, preprint.
8. FAINA, G., Generalized Minkowski planes, preprint.
9. HEISE, W., Minkowski-Ebenen gerader Ordnung, *J. Geom.* 5 (1974), 83.
10. HIRSCHFELD, J.W.P., Projective Geometries over Finite Fields, Clarendon Press, Oxford 1979.
11. HIRSCHFELD, J.W.P., Finite Projective Spaces of Three Dimensions, Clarendon Press, Oxford 1985.
12. JARNEFELT, G. and KUSTAANHEIMO, P., An observation on finite geometries, *Skan. Math. Kong. Trondheim* **11** (1949), 166–182.
13. KORCHMAROS, G. and OLANDA, D., On egglike inversive planes, *J. of Geom.* **21** (1983), 53-58.
14. LO RE, P.M. and OLANDA, D., On Embeddable Minkowski Planes, *J. Geom.* **21** (1983), 138–145.
15. PANELLA, G., Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito, *Boll. Un. Mat. Ital.* **10** (1955), 507–513.
16. PERCSY, N., Announcement at Finite Geometries Session, Oberwolfach 1974.