Ratio Math. n. 7 - 1994
57 - 73

PROBABILITÀ CONDIZIONATE E APPRENDIMENTO DALL'ESPERIENZA: UN'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BAYES

Angelo Gilio
Dipartimento di Matematica - Universtà di Catania
Viale A. Doria, 6 - 95125 Catania

1. INTRODUZIONE

La matematica entra in molte situazioni della vita quotidiana, fornendoci concetti e metodi che permettono di analizzare problemi, al fine di prendere decisioni in modo razionale. Essendo in generale la nostra informazione incompleta, i problemi reali sono spesso caratterizzati da incertezza e di norma, prima di prendere delle decisioni, è opportuno ridurre tale incertezza predisponendo dei metodi per aumentare la nostra informazione. In tali situazioni la matematica ci mette a disposizione gli strumenti della statistica e del calcolo delle probabilità, al fine di esprimere, in base allo stato di conoscenza, le nostre valutazioni nei riguardi delle diverse ipotesi possibili. Lo strumento fondamentale per rappresentare in modo dinamico la conoscenza è quello della probabilità condizionata e del teorema di Bayes, che inquadra sul piano formale il meccanismo di "apprendimento dall'esperienza".

Il teorema di Bayes è lo strumento matematico con il quale, modificandosi lo stato di informazione, si calcolano le probabilità finali di determinate ipotesi, a partire da quelle iniziali delle stesse. Questa metodologia può essere sviluppata nella sua piena generalità se l'insegnamento della probabilità nella scuola viene basato sull'approccio soggettivo, secondo il quale, la probabilità di un evento, per un certo individuo, è la misura numerica del suo "grado di fiducia" nel verificarsi dell'evento stesso (cfr. de Finetti, 1970, Scozzafava, 1993). Tale grado di fiducia dipende strettamente dallo stato di informazione dell'individuo e si modifica sulla base di nuove informazioni. L'adozione della visione soggettiva nell'insegnamento della probabilità si rivela una scelta valida anche sotto l'aspetto formativo, che è un obiettivo fondamentale della scuola (cfr. Gilio, 1990, 1993, Scozzafava, 1990).

In questo lavoro il meccanismo di apprendimento dall'esperienza viene illustrato applicando la formula di Bayes con riferimento al caso di un acquirente che deve decidere se accettare o rifiutare un lotto di articoli, che il fornitore garantisce essere tutti esenti da difetti. L'acquirente, sospettando che vi sia un articolo difettoso, prima di accettare il lotto vuole effettuare dei controlli in modo tale che, subordinatamente all'ipotesi che un certo numero di articoli scelti a caso siano risultati esenti da difetti, la probabilità che il lotto contenga un pezzo difettoso sia minore o uguale di un prefissato valore α, giudicato accettabile dall'acquirente.

Il lavoro include un'Appendice in cui è riportato un programma in Turbo Pascal 6.0 realizzato da Angelo Bossi, studente iscritto al secondo anno di Ingegneria Chimica dell'Università "La Sapienza" di Roma (a.a. 1992/93).

Tale programma permette di:

1) scegliere la dimensione del lotto e il valore della soglia probabilistica α;

2) calcolare i valori e tracciare il diagramma delle funzioni che, al variare del numero di controlli effettuati, descrivono la relazione fra la probabilità finale e quella iniziale che nel lotto vi sia un articolo difettoso;

3) tabulare, in funzione del valore α e del numero di articoli da controllare, gli intervalli di valori di appartenenza della probabilità iniziale in corrispondenza dei quali la probabilità finale risulta minore o uguale ad α, determinando così l'accettazione del lotto da parte dell'acquirente.

L'uso di tali intervalli consente un approccio "qualitativo", nel senso che l'acquirente, per stabilire il numero di controlli da effettuare, non ha bisogno di specificare esattamente il valore della probabilità iniziale, ma soltanto l'intervallo di appartenenza.

2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Indichiamo con N la dimensione del lotto, cioè il numero totale di articoli, e con n il numero di controlli. Consideriamo gli eventi:

H = "il lotto contiene un articolo difettoso",
H^c = "il lotto non contiene articoli difettosi",
E_i = "l'i-esimo articolo controllato è non difettoso", $i = 1, 2, \ldots, n$.

Posto $P(H) = p$, introduciamo le funzioni $f_1(p)$, $f_2(p)$, ..., $f_n(p)$ così definite:

$$f_k(p) = P(H \mid E_1 E_2 \ldots E_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

dove il simbolo $E_1 E_2 \ldots E_k$ rappresenta l'evento intersezione degli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Il valore p è la probabilità iniziale secondo l'acquirente che sia vero l'evento H, mentre $f_k(p)$ rappresenta in funzione di p la probabilità finale di H dopo k controlli, cioè la probabilità di H condizionata all'ipotesi che siano stati controllati k articoli e che siano risultati tutti non difettosi.

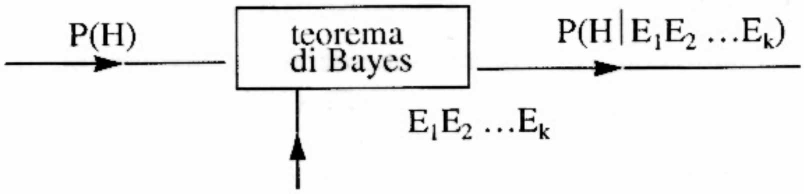
La regola in base alla quale l'acquirente decide di accettare o rifiutare il lotto è la seguente: procedendo con estrazioni a caso (senza restituzione) si effettuano controlli successivi su articoli del lotto. Il lotto viene rifiutato se uno degli articoli controllati risulta difettoso. Se, invece, gli articoli man mano esaminati risultano tutti non difettosi la procedura viene interrotta e il lotto viene accettato, in corrispondenza del valore n tale che:

$$f_n(p) = P(H \mid E_1 E_2 \ldots E_n) \leq \alpha,$$

dove la soglia probabilistica α è scelta dall'acquirente.

Ovviamente, se $p \leq \alpha$ l'acquirente accetta il lotto senza effettuare controlli.

Il meccanismo di aggiornamento delle probabilità è rappresentato nello schema seguente:



Esso si basa sull'uso iterato della seguente formula:

$$P(H|E_1E_2 \dots E_k) = \frac{P(H)\, P(E_1E_2 \dots E_k|H)}{P(H)\, P(E_1E_2 \dots E_k|H) + P(H^c)\, P(E_1E_2 \dots E_k|H^c)},$$

che, applicata per $k = 1, 2, \dots, n$, fornisce ad ogni passo le probabilità finali dell'evento H date da:

$$P(H|E_1) = \frac{P(H)\, P(E_1|H)}{P(H)\, P(E_1|H) + P(H^c)\, P(E_1|H^c)},$$

$$P(H|E_1E_2) = \frac{P(H)\, P(E_1E_2|H)}{P(H)\, P(E_1E_2|H) + P(H^c)\, P(E_1E_2|H^c)},$$

....

$$P(H|E_1E_2 \dots E_n) = \frac{P(H)\, P(E_1E_2 \dots E_n|H)}{P(H)\, P(E_1E_2 \dots E_n|H) + P(H^c)\, P(E_1E_2 \dots E_n|H^c)}.$$

Nel nostro caso si ha:

$$P(E_1|H) = \frac{N-1}{N}, \qquad P(E_1E_2|H) = \frac{N-1}{N}\,\frac{N-2}{N-1} = \frac{N-2}{N},$$

....

$$P(E_1E_2 \dots E_n|H) = \frac{N-1}{N}\,\frac{N-2}{N-1} \cdots \frac{N-n}{N-n+1} = \frac{N-n}{N},$$

$$P(E_1|H^c) = P(E_1E_2|H^c) = \dots P(E_1E_2 \dots E_n|H^c) = 1,$$

da cui si ottiene:

$$P(H|E_1) = \frac{p\,\frac{N-1}{N}}{p\,\frac{N-1}{N} + (1-p)} = \frac{(N-1)\,p}{N-p} = f_1(p)\ ,$$

$$P(H|E_1E_2) = \frac{p\,\frac{N-2}{N}}{p\,\frac{N-2}{N} + (1-p)} = \frac{(N-2)\,p}{N-2p} = f_2(p)\ ,$$

....

$$P(H|E_1E_2 \ldots E_n) = \frac{p\,\frac{N-n}{N}}{p\,\frac{N-n}{N} + (1-p)} = \frac{(N-n)\,p}{N-np} = f_n(p)\ .$$

Nel caso in esame, la condizione $f_n(p) = P(H|E_1E_2 \ldots E_n) \leq \alpha$ equivale alla disuguaglianza $\frac{(N-n)\,p}{N-np} \leq \alpha$, che è soddisfatta se e solo se $p \leq \frac{N\alpha}{N - n(1-\alpha)}$.

Ad esempio, per $N = 6$ si ha

$$P(H|E_1) = f_1(p) = \frac{5p}{6-p}, \qquad P(H|E_1E_2) = f_2(p) = \frac{4p}{6-2p}\ ,$$

$$\ldots, \qquad P(H|E_1E_2) \ldots E_5 = f_5(p) = \frac{p}{6-5p}\ .$$

Se l'acquirente giudica accettabile una soglia probabilistica $\alpha = 0.2$, utilizzando la disuguaglianza $p \leq \frac{N\alpha}{N - n(1-\alpha)}$ con $N = 6$, $\alpha = 0.2$, $n = 1, 2, \ldots$, ai fini dell'accettazione del lotto sarà sufficiente un controllo se la probabilità iniziale p è tale che $f_1(p) \leq 0.2$, cioè se $p \leq \frac{3}{13} \cong 0.2308$.

Se la probabilità iniziale p è maggiore di $\frac{3}{13}$ saranno sufficienti due controlli se risulta $f_2(p) \leq 0.2$, cioè se è soddisfatta la condizione $p \leq \frac{3}{11} \cong 0.2727$.

Nel caso $p > \frac{3}{11}$ la procedura termina dopo tre passi se si ha $f_3(p) \leq 0.2$, cioè se $p \leq \frac{1}{3} \cong 0.3333$.

Nel caso $p > \frac{1}{3}$ la procedura termina dopo quattro passi se $f_4(p) \leq 0.2$, cioè se $p \leq \frac{3}{7} \cong 0.4286$.

Nel caso $p > \frac{3}{7}$ la procedura termina dopo cinque passi se $f_5(p) \leq 0.2$, cioè se $p \leq \frac{3}{5} = 0.6$.

Osserviamo infine che nel caso $p > 0.6$ la condizione $f_n(p) \leq \alpha$ è soddisfatta solo per $n = N = 6$, cui corrisponde $f_6(p) = 0$. In questo caso infatti il "sospetto" iniziale dell'acquirente, rappresentato dalla probabilità iniziale $P(H) = p$, è troppo alto e, affinché la probabilità di H scenda al di sotto di α, è necessario controllare tutti gli articoli. Al contrario, nel caso $p \leq 0.2$ l'acquirente accetta il lotto senza effettuare controlli.

In questo esempio, quindi, l'intervallo $[0, 1]$ dei possibili valori di p viene suddiviso nei sottointervalli

$$I_0 = [0, 0.2], \quad I_1 = (0.2, \tfrac{3}{13}], \quad I_2 = (\tfrac{3}{13}, \tfrac{3}{11}],$$

$$I_3 = (\tfrac{3}{11}, \tfrac{1}{3}], \quad I_4 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{7}], \quad I_5 = (\tfrac{3}{7}, \tfrac{3}{5}], \quad I_6 = (\tfrac{3}{5}, 1].$$

Il numero (minimo) di controlli che l'acquirente deve predisporre è pari all'intero n tale che $p \in I_n$.

In generale, per un lotto di N pezzi, utilizzando la disuguaglianza

$p \leq \frac{N\alpha}{N - n(1 - \alpha)}$ si ottengono i sottointervalli:

$$I_0 = [0, \alpha], \qquad I_1 = (\alpha, \frac{N\alpha}{N - (1 - \alpha)}], \qquad I_2 = (\frac{N\alpha}{N - (1 - \alpha)}, \frac{N\alpha}{N - 2(1 - \alpha)}],$$

$$\dots, I_n = (\frac{N\alpha}{N - (n - 1)(1 - \alpha)}, \frac{N\alpha}{N - n(1 - \alpha)}], \dots, I_N = (\frac{N\alpha}{N - (N - 1)(1 - \alpha)}, 1]$$

e si ha $f_n(p) \leq \alpha$ se $p \in I_n$.

3. ASPETTI GENERALI

Il problema fin qui esaminato costituisce una versione semplificata di una situazione più generale. Infatti abbiamo supposto che il lotto contiene al più un pezzo difettoso, cioè il numero aleatorio X di articoli difettosi nel lotto può assumere soltanto il valore 1 (corrispondente all'ipotesi H) oppure il valore 0 (corrispondente all'ipotesi H^c). In generale, però, i valori possibili di X sono gli interi da 0 fino ad N e, introdotti gli eventi

$$H_k = \text{“nel lotto vi sono k pezzi difettosi”}, \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

l'acquirente dovrebbe valutare le probabilità iniziali

$$P(H_k), \qquad k = 0, 1, \dots, N$$

per poi calcolare, per $n = 1, 2, \dots$, le probabilità finali

$$P(H_k | E_1 E_2 \dots E_n), \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

utilizzando la formula di Bayes.

La versione semplificata si può adottare nei casi in cui le ipotesi H_2, H_3, …, H_N vengono trascurate perché si ritengono “molto piccole” le loro probabilità. In effetti in molte situazioni si ha $P(H_k) \cong 0$ per $k \geq 2$ e quindi $P(X \geq 1) \cong P(X = 1)$.

Si consideri ad esempio il caso in cui X rappresenta il numero di bombe nascoste nei bagagli di un aereo, oppure X rappresenta il numero di componenti guasti del motore di tale aereo, e così via.

Nel caso specifico, inoltre, la versione semplificata si può giustificare sulla base di un atteggiamento probabilistico ben preciso dell'acquirente. Infatti, la probabilità di trovare pezzi difettosi durante i controlli (e quindi di rifiutare il lotto) è tanto più alta quanti più pezzi difettosi vi sono nel lotto. Quindi, dal punto di vista dell'acquirente, è ragionevole ritenere che il fornitore, ammesso che abbia deciso di inserire qualche articolo difettoso nel lotto, ha in tal caso interesse ad inserirne un numero molto basso. Pertanto, sotto l'aspetto probabilistico, il modo migliore di premunirsi contro la presenza di articoli difettosi è quello di supporre che al più ve ne sia uno, il che corrisponde ad assumere:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1), \quad \text{cioè} \quad P(X \geq 2) = 0.$$

Questo atteggiamento si può caratterizzare in modo formale. Infatti, posto:

$$P(X = 0) = 1 - p, \quad P(X = k) = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$P(X \geq 1) = p = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_N,$$

con p assegnato, si può verificare che, fra tutte le distribuzioni di probabilità iniziali del tipo

$$\pi = (1 - p, \lambda_1, \ldots, \lambda_N),$$

quella che richiede il numero più grande di controlli, affinché sia soddisfatta la condizione (di accettazione del lotto)

$$P(X \geq 1 \mid E_1 E_2 \ldots E_n) \leq \alpha,$$

è la distribuzione π_0 tale che $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_N = 0$, cioè

$$\pi_0 = (1 - p, \ p, \ 0, \ldots, 0),$$

per la quale si ha $P(X \geq 1) = P(X = 1)$.

Infatti, tenendo conto che $P(E_1 E_2 \ldots E_n | X = 0) = 1$, si ha:

$$P(X = 0 | E_1E_2 \ldots E_n) = \frac{P(X = 0)\ \ P(E_1E_2 \ldots E_n | X = 0)}{\sum_{k=0}^{N} P(X = k)\ \ P(E_1E_2 \ldots E_n | X = k)} =$$

$$= \frac{(1 - p)}{(1 - p) + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k\ \ P(E_1E_2 \ldots E_n | X = k)} .$$

Osserviamo, inoltre che la probabilità $P(E_1 E_2 \ldots E_n | X = k)$ è pari al rapporto $\binom{N-k}{n} / \binom{N}{n}$ se l'evento $E_1 E_2 \ldots E_n$ è compatibile con l'evento $(X = k)$, mentre è nulla se tali eventi sono incompatibili. Pertanto, risulta

$$P(E_1E_2 \ldots E_n | X = 1) \geq P(E_1E_2 \ldots E_n | X = 2) \geq \ldots \geq P(E_1E_2 \ldots E_n | X = n),$$

da cui segue

$$P(X = 0 | E_1E_2 \ldots E_n) \geq \frac{(1 - p)}{(1 - p) + \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \right) P(E_1E_2 \ldots E_n | X = 1)} =$$

$$= \frac{(1 - p)}{(1 - p) + p\,\frac{N - n}{N}} = \frac{N(1 - p)}{N - np}$$

e quindi

$$P(X \geq 1 | E_1E_2 \ldots E_n) = 1 - P(X = 0 | E_1E_2 \ldots E_n) \leq$$

$$\leq 1 - \frac{N(1 - p)}{N - np} = \frac{(N - n)p}{N - np} = P(H | E_1E_2 \ldots E_n) = f_n(p) .$$

In conclusione, subordinatamente all'ipotesi che gli articoli man mano esaminati siano tutti esenti da difetti, la distribuzione di probabilità iniziale $\pi = (1 - p, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ che "ritarda" il più possibile l'accettazione del lotto, cioè per la quale la probabilità $P(X \geq 1 | E_1E_2 \dots E_n)$ scende più lentamente al disotto della soglia α, è data da $\pi_0 = (1 - p, p, 0, \dots, 0)$.
Tale distribuzione concentra il valore $p = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N$ sull'evento $(X = 1)$, corrispondente all'ipotesi H nella versione semplificata del problema.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE FINETTI B. (1970), *Teoria delle probabilità*. Einaudi Editore, Torino.

[2] GILIO A. (1990), *Aspetti algebrici e geometrici nell'insegnamento della probabilità soggettiva*, Archimede, 1, Genn. - Marzo, 32 - 41.

[3] GILIO A. (1993), *Probabilità di eventi come previsioni di numeri aleatori*, Induzioni, 7, Luglio - Dicembre, 39 - 48.

[4] SCOZZAFAVA R. (1990), *Per un insegnamento "fusionista" della probabilità e della statistica nelle scuole secondarie*, Matematica Oggi: dalle idee alla scuola (a cura di Fulvia Furinghetti), Cidi di Genova, Irrsae Liguria, Edizioni Scolastiche Bruno Mondadori, 251 - 256.

[5] SCOZZAFAVA R. (1993), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Ed. Veschi, Masson (Milano).

APPENDICE

Programma per calcolatore in Turbo Pascal 6.0

In questa Appendice viene riportato un programma in Turbo Pascal 6.0 realizzato dallo studente Angelo Bossi, che consente di analizzare il problema con l'aiuto del calcolatore e permette in particolare di:

1) scegliere il valore dei parametri N, α;

2) calcolare i valori e tracciare il grafico delle funzioni $f_1(p)$, $f_2(p)$, ..., $f_{N-1}(p)$;

3) determinare gli intervalli I_1, I_2, ..., I_n.

Il programma consiste in una serie di procedure, alcune delle quali riguardano la presentazione grafica, mentre altre si riferiscono agli aspetti probabilistici e numerici del problema.

```
Program Tabula Guasti;
Uses Crt, Dos, Graph;
Const
  MaxNum=300;{Modificare questo valore per variare la dimensione dell'array}
  CoordX=60;
  CoordY=450;
  Triangle1: array[1..4] of PointType =
   ((x: 620; y: 450 ),(x: 600 ; y:440 ),
    (x: 600 ; y:460 ),(x: 620 ; y:450 ));
  Triangle2: array[1..4] of PointType =
   ((x: 60; y:0 ),(x: 50; y:20 ),
    (x: 70; y:20),(x: 60; y:0 ));
Var n,l,m,h,k,conta,x,alfaind,probind,g,inizio,fine,ind,i1,i2:Integer;
   GrDriver,GrMode,ErrCode:Integer;
   y1,alfa,y,prob:Real;
   tab:array[1..MaxNum] of Integer;
   ch,risposta,scelta,modo,ris:Char;
   label 1,2,3,4;
Procedure Intro;   {Pagina introduttiva}
begin
   for conta:=1 to 8 do WriteLn;
   WriteLn('            Programmato in Turbo Pascal 6.0 da Angelo Bossi');
   for conta:=1 to 8 do WriteLn;
   Write('       ');
   WriteLn('N.B.=E'' possibile graficare le N-1 curve solo per N < ',MaxNum);
   Write(' Per entrare in ambiente grafico e'' necessaria una scheda');
   WriteLn(' grafica VGA o EGA');
```

```
    WriteLn('                    Premi <INVIO> per continuare...');
    for conta:=1 to 3 do WriteLn;
    TextColor(0);ReadLn;TextColor(15);
end;

Procedure Tabula;
{Questa procedura calcola le probabilita' al variare di alfa e n
 e ne stampa il valore;per migliorare la leggibilita' della
 tabella e' stato introdotta una visualizzazione a pagina}
label 1;
begin
1: ClrScr;
   TextColor(10);
   WriteLn(' 1) Per tutti i possibili valori della soglia');
   WriteLn(' 2) Solo per un particolare valore della soglia');
   WriteLn;TextColor(15);
   Write(' Qual e'' la tua scelta? ');
   ReadLn(ris);
   if ris='1' then begin i1:=1; i2:=19; end;
   if ris='2' then begin
     WriteLn;Write(' Immetti il valore della soglia:=');
     ReadLn(alfa);
     if (alfa<0) or (alfa>1) then goto 1;
     i1:=1;
     i2:=1;
   end;
   if (ris<>'1') and (ris<>'2') then goto 1;
   l:=1;          {Inizializzazione per la tabulazione}
   repeat
    ClrScr;
    TextColor(10);
    Writeln('                        TABULAZIONE SU ',n,' PEZZI');
    if ris='1' then Writeln else for k:=1 to 10 do WriteLn;
    TextColor(15);
    Write('  ');
{Condizione per la tabulazione a pagine}
    if (l+7-n)<0 then m:=l+7 else m:=n-1;
    for conta:=l to m  do begin
       if conta<10 then Write('        ',conta)
       else if conta<100 then Write('       ',conta)
           else Write('      ',conta);
    end;
    TextColor(15);
    Writeln;
{Questi 2 cicli FOR sono la parte centrale di questa procedura;
 tramite una ricorsione infatti viene calcolato ,memorizzato
 in un array e poi stampato il valore di alfa e di n}
    for k:=i1 to i2 do begin
       if ris='1' then alfa:=k/20;
       g:=Round(alfa*100);    {normalizzazione di alfa}
       if g<10 then Write('0.0',g,';  ') else Write('0.',g,';  ');
       for h:=l to m do begin
          tab[h]:=Round((10000*alfa*n)/((n-h)+alfa*h));
          if tab[h]<1000 then Write('0.0',tab[h],';  ')
```

```
          else Write('0.',tab[h],';  ');
      end;
      Writeln;
    end;
    if ris='2' then for k:=1 to 10 do WriteLn;
    Write('Premi <INVIO>');
    TextColor(0);
    ReadLn;
    l:=m+1;
  until l>n-1; {Condizione per la fine della tabulazione a pagine}
  TextColor(10);
  Write('                    Fine Tabulazione');
  Sound(880);Delay(150);NoSound;
  ReadLn;
end;

Procedure Tabula1;
{Questa procedura calcola la F(p) al variare della probabilita'
 e del numero dei componenti del lotto e ne stampa il valore;
 per migliorare la leggibilita' della tabella e' stato introdotta
 una visualizzazione a pagina}
label 1;
begin
1: ClrScr;
  TextColor(10);
  WriteLn(' 1) Per tutti i possibili valori della probabilita''');
  WriteLn(' 2) Solo per un particolare valore della probabilita''');
  WriteLn;TextColor(15);
  Write(' Qual e'' la tua scelta? ');
  ReadLn(ris);
  if ris='1' then begin i1:=1; i2:=19; end;
  if ris='2' then begin
    WriteLn;Write(' Immetti il valore della probabilita'':=');
    ReadLn(prob);
    if (prob<0) or (prob>1) then goto 1;
    i1:=1;
    i2:=1;
  end;
  if (ris<>'1') and (ris<>'2') then goto 1;
  l:=1;          {Inizializzazione per la tabulazione}
  repeat
   ClrScr;
   TextColor(10);
   Writeln('                    TABULAZIONE SU ',n,' PEZZI');
   if ris='1' then Writeln else for k:=1 to 10 do WriteLn;
   TextColor(15);
{Condizione per la tabulazione a pagine}
   if (l+7-n)<0 then m:=l+7 else m:=n-1;
   if m<100 then Write('  p ') else Write('  p  ');
   for conta:=l to m  do begin
      if conta<10 then Write('    F',conta,'(p)')
      else if conta<100 then Write('   F',conta,'(p)')
          else Write('  F',conta,'(p)');
   end;
```

```
    TextColor(15);
    Writeln;
    for k:=i1 to i2 do begin
       if ris='1' then prob:=k/20;
       g:=Round(prob*100);    {normalizzazione della probabilita'}
       if g<10 then Write('0.0',g,';  ') else Write('0.',g,';  ');
       for h:=l to m do begin
          tab[h]:=Round((10000*prob*(n-h))/(n-prob*h));
          if tab[h]<10 then Write('0.000',tab[h],';  ')
            else if tab[h]<100 then Write('0.00',tab[h],';  ')
                else if tab[h]<1000 then Write('0.0',tab[h],';  ')
                  else Write('0.',tab[h],';  ');
       end;
       Writeln;
    end;
    if ris='2' then for k:=1 to 10 do WriteLn;
    Write('Premi <INVIO>');
    TextColor(0);
    ReadLn;
    l:=m+1;
  until l>n-1; {Condizione per la fine della tabulazione a pagine}
  TextColor(10);
  Write('                           Fine Tabulazione');
  Sound(880);Delay(150);NoSound;
  ReadLn;
end;

Procedure Curve;
{I 2 cicli FOR ,come nella procedura TABULA, sono qui usati
 per calcolare le coordinate(espresse in pixel) delle curve}
begin
    for h:=inizio to fine do begin
        SetColor(h+8);SetLineStyle(0,0,1);
        if (h mod 8)=0 then SetColor(h+1);
        MoveTo(CoordX,CoordY);  {sposto il cursore nell'origine degli assi}
        for x:=1 to 100 do begin
           y:=((n-h)*x/100)/(n-(h*x/100));
           LineTo(CoordX+x*5,Round(CoordY-(y*400)));
        end;
        SetColor(15);
        SetLineStyle(1,0,1);
{Tracciano l'indicatore di alfa e le relative probabilita' e viceversa}
        if ch='1' then begin
           alfaind:=60+Round((500*alfa*n)/((n-h)+alfa*h));
           Line(60,GetMaxY-Round(alfa*400)-29,
               alfaind,GetMaxY-Round(alfa*400)-29);
           Line(alfaind,450,alfaind,GetMaxY-Round(alfa*400)-29);
        end;
        if ch='2' then begin
           y1:=((n-h)*prob)/(n-(h*prob));
           probind:=GetMaxY-Round((y1*400)+28);
           if h=inizio then ind:=probind;
           Line(Round((prob*500)+60),450,Round((prob*500)+60),ind);
           Line(60,probind-1,Round((prob*500)+60),probind-1);
```

```
        end;
      end;
end;
Procedure Grafica;
{Questa procedura, sfruttando i dati di TABULA o TABULA1 permette la
 visualizzazione grafica delle curve rappresentanti le probabilita'
 in un sistema cartesiano(F(p),P)}
label 2,4;
begin
   TextColor(15);
   WriteLn;
4:  if ch='1' then begin
      Write(' Inserisci la soglia probabilistica alfa:=');
      ReadLn(alfa);
      if (alfa>1) and (alfa<0) then goto 4;
   end else begin
   Write(' Inserisci la probabilita'':=');
      ReadLn(prob);
      if (prob>1) and (prob<0) then goto 4;
   end;
   ClrScr;
   GrDriver := Detect;
   InitGraph(GrDriver,GrMode,'');      {Inizializzazione grafica}
   ErrCode := GraphResult;
   if ErrCode = grOk then
   begin
      if (GrDriver<>9) and (GrDriver<>4) then goto 2;
      SetColor(15);
      SetLineStyle(0,0,1);
      Line(30,450,600,450);
      Line(60,20,60,480);  {Assi Cartesiani}
      Line(60,50,560,50);
      Line(560,50,560,450);
      FillPoly(SizeOf(Triangle1) div SizeOf(PointType), Triangle1);
      FillPoly(SizeOf(Triangle2) div SizeOf(PointType), Triangle2);
{Scala di valori}
      for conta:=1 to 20 do
         Line(12+conta*25+35,448,12+conta*25+35,452);
      for conta:=1 to 20 do
         Line(conta*25+35,445,conta*25+35,455);
      for conta:=1 to 11 do
         Line(conta*50+10,442,conta*50+10,458);
      for conta:=1 to 20 do
         Line(58,GetMaxY-(10+conta*20+9),62,GetMaxY-(10+conta*20+9));
      for conta:=1 to 20 do
         Line(55,GetMaxY-(conta*20+9),65,GetMaxY-(conta*20+9));
      for conta:=1 to 11 do
         Line(52,GetMaxY-(conta*40-11),68,GetMaxY-(conta*40-11));
      SetColor(10);
      SetTextStyle(2,0,6);OutTextXY(25,460,'0.0');
      OutTextXY(100,460,'0.1');OutTextXY(25,400,'0.1');
      OutTextXY(150,460,'0.2');OutTextXY(25,360,'0.2');
      OutTextXY(200,460,'0.3');OutTextXY(25,320,'0.3');
      OutTextXY(250,460,'0.4');OutTextXY(25,280,'0.4');
```

```
        OutTextXY(300,460,'0.5');OutTextXY(25,240,'0.5');
        OutTextXY(350,460,'0.6');OutTextXY(25,200,'0.6');
        OutTextXY(400,460,'0.7');OutTextXY(25,160,'0.7');
        OutTextXY(450,460,'0.8');OutTextXY(25,120,'0.8');
        OutTextXY(500,460,'0.9');OutTextXY(25, 80,'0.9');
        OutTextXY(550,460,'1.0');OutTextXY(25, 40,'1.0');
        SetColor(14);SetTextStyle(1,0,2);
        OutTextXY(10,0,'F(p)');OutTextXY(600,457,'P');
        Curve;      {Richiamo la procedure che traccia le curve}
        SetLineStyle(0,0,1);
        Line(60,50,560,50);
        Line(560,50,560,450);
        SetColor(14);SetTextStyle(2,0,6);
        OutTextXY(250,5,'Premi <INVIO>');
        Sound(880);Delay(150);NoSound;
        TextColor(0);
        ReadLn;
2:      CloseGraph;
   end;
end;

{PROGRAMMA PRINCIPALE}
begin
   ClrScr;
   TextBackGround(0);
   TextColor(15);
   Intro;
1:  ClrScr;
   TextColor(15);
   Write(' Inserisci il numero dei componenti del lotto :=');
   ReadLn(n);
   if (n<2) or (n>MaxNum) then goto 1;
4:  ClrScr;
   TextColor(10);
   WriteLn(' 1) Tabulazione');
   WriteLn(' 2) Grafico');
   WriteLn(' 3) Modifica i valori');
   WriteLn(' 4) Uscita');
   TextColor(15);
   WriteLn;
   Write(' Qual e'' la tua scelta? ');
   ReadLn(scelta);
   if scelta='1' then goto 2 else
     if scelta='2' then goto 3 else
       if scelta='3' then goto 1 else
         if scelta='4' then begin ClrScr;Exit; end else goto 4;
   Sound(831);Delay(150);NoSound;
2:  ClrScr;
   TextColor(10);
   WriteLn('1) Calcolo della probabilita'' data la soglia probabilistica');
   WriteLn('2) Calcolo della F(p) data la probabilita''');
   WriteLn('3) Uscita');
   TextColor(15);
   WriteLn;
```

```
    Write('Qual e'' la tua scelta? ');
    ReadLn(modo);
    if modo='1' then Tabula else
      if modo='2' then Tabula1 else
        if modo='3' then begin ClrScr;Exit; end else goto 2;
    goto 4;
3:  ClrScr;
    TextColor(10);
    WriteLn(' 1) Indicatore di F(p)');
    WriteLn(' 2) Indicatore di p');
    WriteLn;
    TextColor(15);
    Write(' Qula e'' la tua scelta ? ');
    ReadLn(ch);
    if (ch<>'1') and (ch<>'2') then goto 3;
    ClrScr;
    TextColor(10);
    WriteLn(' 1) Grafico di tutte le curve');
    WriteLn(' 2) Grafico di un sottinsieme di tutte le curve');
    WriteLn(' 3) Grafico di una sola curva');
    WriteLn(' 4) Uscita');
    WriteLn;
    WriteLn;TextColor(15);
    Write(' Qual e'' la tua scelta ? ');
    ReadLn(risposta);
    if risposta='1' then begin inizio:=1; fine:=n-1; Grafica; end;
    if risposta='2' then begin
    Writeln;
    Write(' Componente iniziale del lotto:=');
    ReadLn(inizio);
    if (inizio<0) or (inizio>n-1) then goto 3;
    WriteLn;
    Write(' Componente finale del lotto:=');
    ReadLn(fine);
    if (fine>n-1) or (fine<inizio) then goto 3;
    Grafica;
    end;
    if risposta='3' then begin
    WriteLn;
    Write(' Componente del lotto:=');
    ReadLn(inizio);
    if (inizio<0) or (inizio>n-1) then goto 3;
    fine:=inizio;
    Grafica;
    end;
    if risposta='4' then begin
      ClrScr;
      exit;
    end;
    if (risposta<>'1') and (risposta<>'2') and
      (risposta<>'3') and (risposta<>'4') then goto 3;
    goto 4;
   end.
```