Ratio Math. 8
(1994), 91 - 100

CONSIDERAZIONI PROBABILISTICHE SU ALCUNE STRATEGIE NEI GIOCHI D'AZZARDO

Antonio Maturo e Giuseppe Di Biase *

PREMESSA

Aldo Bartolini è un nostro amico appassionato di scommesse. Fa il preside di una scuola secondaria, è laureato in Lettere, ma, spiritualmente, un matematico. Egli, sentendosi abbandonato dalla dea bendata, si diverte ad elaborare strategie di gioco con la speranza di trovarne qualcuna che risulti vincente. L'ultima che ci ha illustrato ci è sembrata molto interessante ed allora abbiamo provato a formalizzarla e ad analizzarla dal punto di vista probabilistico, confrontandola anche con altre strategie più note.

LA STRATEGIA DI BARTOLINI

Supponiamo che si desiderino vincere in un determinato gioco n somme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e che il gioco sia formato da una successione di partite in

* Univ. "G. D'Annunzio" - Dip. Di Scienze - Viale Pindaro 42 - Pescara

ciascuna delle quali la probabilità p di vincere sia costante. Supponiamo inoltre che in ogni partita la somma che si può vincere sia uguale a quella che si può perdere. Ad esempio il gioco può consistere nel puntare rosso o nero alla roulette, nel giocare a mazzetti o a piatto con gli amici, nel giocare a testa o croce, etc. Per $p = 1/2$ il gioco è equo. Chiamiamo **gettone** ognuna delle somme a_i ed indichiamo con $S_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ la somma totale da vincere e con $n(0) = n$ il numero di gettoni da vincere prima di iniziare la serie delle partite.

Alla **prima partita** puntiamo i gettoni a_1 (il primo) ed a_n (l'ultimo) e quindi una somma pari a $a_{n+1} = a_1 + a_n$ con un unico gettone a_{n+1}. Ovviamente, se $n(0) = 1$ puntiamo il solo gettone a_1.

In caso di vincita, per $n > 2$, la somma che ci resta da vincere è $S_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$, divisa in n-2 gettoni mentre, per $n \leq 2$, il gioco si conclude poichè abbiamo vinto la somma voluta.

In caso di perdita dobbiamo ancora vincere la somma S_0 più la somma a_{n+1} che abbiamo perso. Ci resta, allora, da vincere ancora la somma $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}$ divisa in n+1 gettoni.

Continuiamo a giocare, considerando come somma da vincere la S_1.

Alla **(r+1)-esima partita**, supponendo che nelle prime r non si è vinta ancora la somma voluta, S_0, ci troviamo a dover vincere ancora una certa somma $S_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)}$, divisa in $n(r)$ gettoni.

Puntiamo i gettoni b_1 e $b_{n(r)}$ e quindi la somma $b_{n(r)+1} = b_1 + b_{n(r)}$.

Se vinciamo, la somma che resta da vincere è $S_{r+1} = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n(r)-1}$, divisa in $n(r)$-2 gettoni.

Se perdiamo dobbiamo ancora vincere la somma S_r più la somma $b_{n(r)+1}$ che abbiamo appena perso. Resta, dunque, da vincere ancora la somma $S_{r+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)} + b_{n(r)+1}$ divisa in $n(r)$+1 gettoni.

In altre parole, se $S_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)}$ è la somma da vincere ancora dopo r partite, la strategia di Bartolini consiste nel puntare alla partita (r+1)-esima un gettone equivalente alla somma:

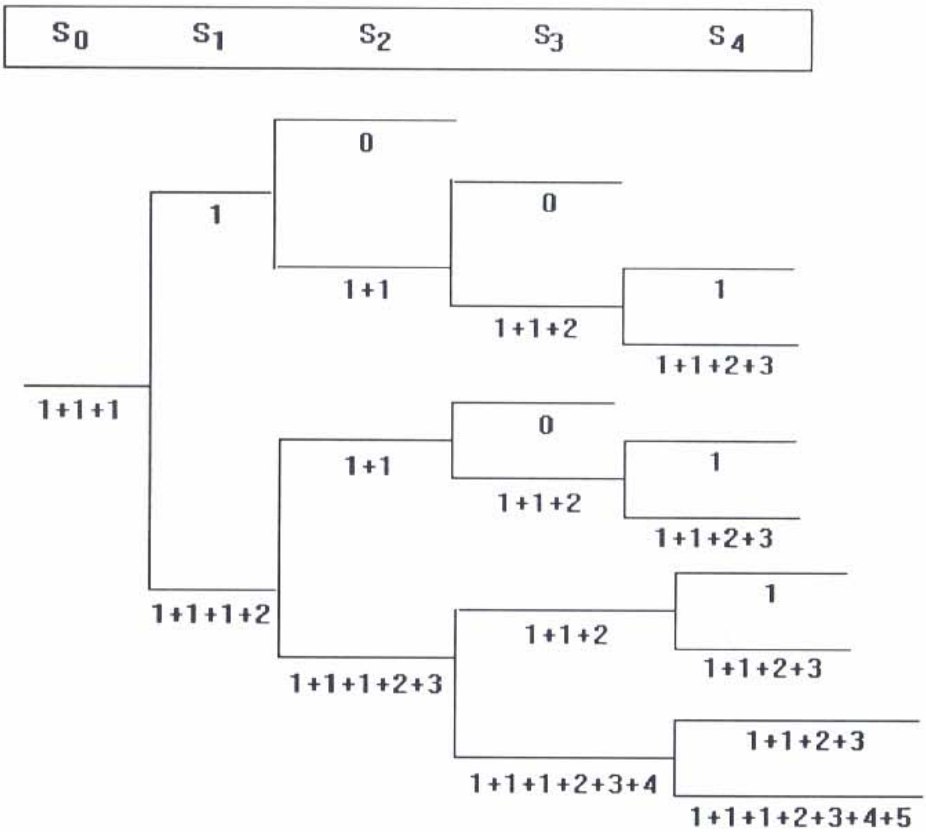
$$b_{n(r)+1} = b_1 + b_{n(r)}$$

e nel porre

$$S_{r+1} = \begin{cases} b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)+1} & \textit{se si perde} \\ b_2 + b_3 + \ldots + b_{n(r)-1} & \textit{se si vince} \end{cases}$$

Osserviamo che ad ogni partita, in caso di vincita, si guadagnano due gettoni e che, in caso di perdita, si perde solo un gettone. Quando $S_r = 0$ abbiamo raggiunto lo scopo prefissatoci poichè si è vinta la somma S_0 più le varie somme perse durante lo svolgimento della partita e, quindi, concludiamo il gioco.

Ad esempio supponiamo di voler vincere la somma $S_0 = 1+1+1$ divisa in tre gettoni. Al primo colpo è $S_1 = 1$ se si è vinto, oppure $S_1 = 1+1+1+2$ se si è perso. Per i quattro colpi successivi la situazione è descritta nel seguente diagramma ad albero in cui il numero scritto su ogni ramo rappresenta la somma che resta da vincere dopo ogni colpo.



CONFRONTO CON LA STRATEGIA DEL RADDOPPIO

La strategia del raddoppio consiste, in caso di perdita, nel puntare al colpo successivo il doppio di quanto si sia puntato precedentemente ed, in caso di vincita, nel concludere il gioco; precisamente se $S_0 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ è la somma totale da vincere alla **prima partita**, puntiamo tutti i gettoni e quindi la somma $a_{n+1} = S_0$. Se $n(0) = 1$ puntiamo un solo gettone.

In caso di **vincita il** gioco si conclude poichè abbiamo vinto la somma voluta.

In caso di perdita dobbiamo ancora vincere la somma iniziale S_0 più la somma a_{n+1} che abbiamo perso, ossia la somma $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = 2S_0$. E così via.

Formalizzando quanto detto, se $S_r = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)}$ è la somma da vincere ancora dopo r partite, la strategia del raddoppio consiste nel puntare alla **partita** **(r+1)-esima** la somma

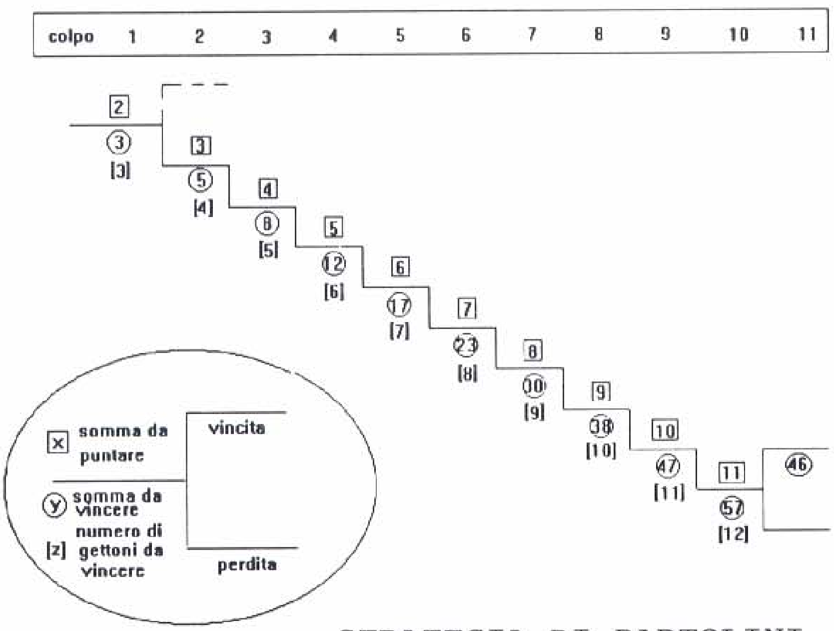
$$b_{n(r)+1} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)}$$

ottenendo

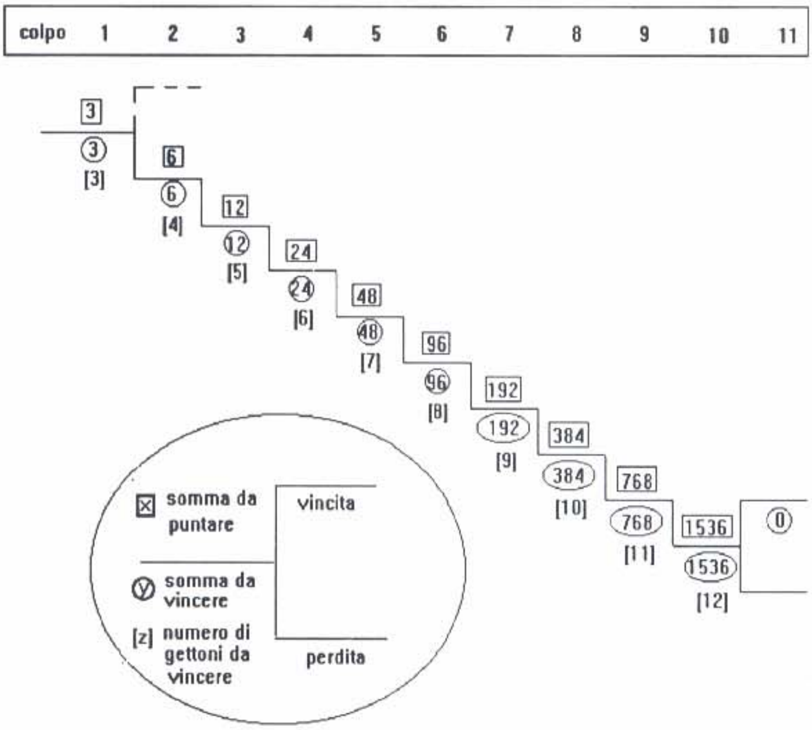
$$S_{n(r)+1} = \begin{cases} 0 & \textit{se si vince} \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_{n(r)+1} & \textit{se si perde} \end{cases}$$

Osserviamo che, in caso di vincita, si guadagnano $n(r)$ gettoni e che, in caso di perdita, si perde solo un gettone.
Per valutare il rischio delle due strategie descritte consideriamo il caso di una serie di dieci esiti consecutivi sfavorevoli al giocatore.

Ponendo $S_0 = 1 + 1 + 1$ si ottengono i seguenti diagrammi.



STRATEGIA DI BARTOLINI



STRATEGIA DEL RADDOPPIO

E' evidente che utilizzando quest'ultima strategia l'entità del rischio per il giocatore è di gran lunga superiore. Infatti al decimo colpo egli deve puntare la somma 1536 per vincere la somma iniziale di tre. Tale vincita è comunque assoluta. Invece con il metodo di Bartolini per raggiungere il medesimo obiettivo finale non è sufficiente vincere al decimo colpo, ma occorre continuare a giocare sperando nella buona sorte! La somma da puntare è 11 e rimane da vincere ancora la somma 46 in caso favorevole.

I valori precedenti si ricavano immediatamente osservando che la somma da puntare ad ogni colpo, in caso di eventi consecutivi negativi, cresce in progressione aritmetica utilizzando un metodo, ed in progressione geometrica utilizzando l'altro.

Precisamente, usando la strategia di Bartolini, essendo $S_0 = 1+1+1$, si ha che il primo termine della progressione aritmetica è $b_1 = 2$, la ragione $q = 1$, l'n-esimo termine, che rappresenta la somma che bisogna puntare all'n-simo colpo è $b_n = b_1 + (n-1)q$ (nell'esempio $b_{10} = 11$). Inoltre la somma dei primi $(n-1)$ termini, che rappresenta la somma che si è persa dopo $(n-1)$ colpi negativi, è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{b_1 + b_{n-1}}{2}(n-1)$$

(nell'esempio $S = 54$).

Con la strategia del raddoppio si ha, invece, una progressione geometrica di primo termine $b_1 = 3$, ragione $q = 2$, n-esimo termine $b_n = b_1 q^{n-1}$ e somma dei primi n termini:

$$S = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} b_1.$$

Nell'esempio effettuato si ha che $b_{10} = 1536$ e che $S = 1533$.

ANALISI PROBABILISTICA

Analizziamo alcune variabili aleatorie collegate ai giochi effettuati facendo l'ipotesi che, se rimane un solo gettone, si possa vincere il gettone rimanente più un gettone simbolico di valore nullo e che, dopo il termine della partita, si vincono o si perdono solo gettoni di valore nullo.

Indichiamo, per ogni numero r naturale, con X_r il numero dei gettoni vinti alla r-esima partita. Col metodo del raddoppio risulta:

$$X_r = \begin{cases} -1 & \textit{con probabilità } q = 1-p \\ n(r-1) & \textit{con probabilità } p \end{cases}$$

Il valor medio e la varianza di X_r sono allora:

$$M(X_r) = (-1)(1-p) + n(r-1)\,p = [n(r-1)+1]\,p - 1$$

$$V(X_r) = (1-p) + [n(r-1)]^2 p - \{[n(r-1) + 1]\,p - 1\}^2$$

$$= [n(r-1)+1]^2\, p\, q.$$

Col metodo di Bartolini la variabile "numero dei gettoni vinti" assume i valori:

$$X_r = \begin{cases} -1 & \textit{con probabilità } q = 1-p \\ +2 & \textit{con probabilità } p \end{cases}$$

Per l'ipotesi effettuata, per ogni r naturale, si ha:

$$M(X_r) = 3p - 1\ ; \qquad V(X_r) = 9pq.$$

Indichiamo con N_r la variabile aleatoria che descrive il numero di gettoni vinti in r colpi. Risulta:

$$N_r = X_1 + X_2 + \dots + X_r$$

Torniamo ora specificatamente alla strategia di gioco suggeritaci dal Preside Bartolini. Poichè le X_i, $i = 1, 2, \dots, r$, sono indipendenti, il valor medio e la varianza di N_r sono:

$$M(N_r) = \sum_{i=1}^{r} M(X_i) = r(3p-1)$$

$$V(N_r) = \sum_{i=1}^{r} V(X_i) = 9rpq\,.$$

La prima relazione esprime il fatto che, per vincere gli n gettoni iniziali, occorrono in media un numero r di partite tale che $M(N_r) = n$, ossia $r(3p-1) = n$, cioè $r \geq n/(3p-1)$.

Interessa ora valutare la probabilità che "prima o poi" si riesca a vincere il numero di gettoni prefissati. Consideriamo in proposito l'evento E_r = "il numero dei gettoni vinti in r partite è almeno uguale a quello che ci prefiggevamo inizialmente" che si può esprimere nella seguente maniera:

$$E_r = \text{"}N_r \geq n\text{"}$$

e l'evento F_r = " gli n gettoni sono vinti in non più di r partite".

Essendo $F_r = \bigcup_{i=1}^{r} E_i$ si ha che $E_r \subseteq F_r$, per cui $prob(E_r) \leq prob(F_r)$.

Pertanto una minorazione della probabilità dell'evento che ci interessa calcolare si ottiene determinando la probabilità dell' evento E_r.

Per fare questo utilizziamo il Teorema del limite centrale. Esso ci assicura che, posto $m_r = M(N_r)$ e $\sigma_r = \sqrt{V(N_r)}$, per n "abbastanza grande", la variabile casuale centrata ridotta $Z_r = \dfrac{N_r - m_r}{\sigma_r}$ ha distribuzione normale standard, ossia che, detta $\Phi(x)$ la funzione di ripartizione della legge normale standard, per ogni numero reale y risulta:

$$prob(N_r < y) = prob\left(Z_r < \frac{y - m_r}{\sigma_r}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\,dx = \Phi(y)\,.$$

Pertanto:

$$prob(N_r \geq n) = 1 - prob(Z_r < \frac{n-m_r}{\sigma_r}) = 1 - \Phi(\frac{n-m_r}{\sigma_r}) = \Phi(\frac{m_r - n}{\sigma_r})$$

Per r uguale al numero medio di partite per vincere gli n gettoni iniziali, ossia $r = n / (3p - 1)$, si ha $m_r = n$ e quindi $prob(E_r) = \Phi(0) = 1/2$.

Posto:

$$m_r - n = k\sigma_r \qquad , k \geq 0 \qquad (1)$$

dalle tavole della funzione di ripartizione della normale standard si ottiene la seguente tabella, per i vari valori di k, delle probabilità che il numero di gettoni vinti in r partite sia almeno uguale a quello prefissato:

k	0	1	1.29	2	2.33	3
$prob(E_r)$	0.5	0.8413	0.9	0.9772	0.99	0.9987

Dalla (1) elevando al quadrato e sostituendo i valori di m_r e σ_r si ricava una equazione di secondo grado in r:

$$(3p-1)^2 r^2 - \left[2n(3p-1) + 9p(1-p)k^2\right]r + n^2 = 0. \qquad (2)$$

Risolvendo la (2) si ottiene:

$$r = \frac{2n(3p-1)+9p(1-p)k^2 \pm \sqrt{a}}{2(3p-1)^2} \qquad (3)$$

dove $a = (2n(3p-1)+9p(1-p)k^2)^2 - 4(3p-1)^2 n^2$.

Dalla seguente relazione, valida per $x \geq y \geq 0$:

$$\sqrt{x-y} \geq \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

si deduce che, per $k > 0$, nella (3) non può valere il segno negativo. Altrimenti sarebbe:

$$r \leq \frac{2n(3p-1)+9p(1-p)k^2 - b + 2(3p-1)n}{2(3p-1)^2},$$

con $b = 2n(3p-1)+9p(1-p)k^2$, ossia $r \leq \frac{n}{3p-1}$, il che è assurdo poichè ciò avviene per $k \leq 0$. Allora si ha:

$$r = \frac{2n(3p-1)+9p(1-p)k^2+\sqrt{c}}{2(3p-1)^2} \tag{4}$$

dove c = $36nk^2(3p-1)p(1-p)+81p^2(1-p)^2k^4$.

Consideriamo il caso particolare p = 1/2, che è il più interessante poichè si riferisce ad un gioco equo.

Dalla (4) segue:

$$r = 2n + 4.5k^2 + 2\sqrt{4.5nk^2 + 5.0625k^4}\ .$$

In corrispondenza di alcuni valori di k e di n abbiamo la seguente tabella di valori di r :

r	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=1$	2	12.68	39.9	84.95
$n=5$	10	25	54.15	100
$n=10$	20	38.65	70.31	117.6

Possiamo leggere la tabella nella seguente maniera. Bastano rispettivamente 2, 10 e 20 partite affinchè sia 1/2 la probabilità che il numero dei gettoni vinti sia maggiore o uguale rispettivamente a 1, 5 e 10.

Si ha una confidenza maggiore o uguale all'84% di vincere rispettivamente almeno 1, 5, 10 gettoni in 13, 25, 39 partite. Per avere una sicurezza maggiore o uguale al 99.87% di vincere bastano rispettivamente almeno 85, 100, 118 partite.

Consideriamo casi più realistici con $p < 1/2$, ad esempio per p = 15/37 $\cong$ 0.4 la (4) diventa:

$$r = 5n + 27k^2 + 12.5\sqrt{1.728nk^2 + 4.6656k^4}\ .$$

Per $k=0$ e $k=1$ abbiamo la seguente tabella di valori di r :

r	n = 1	n = 5	n = 10
k = 0	5	25	50
k = 1	63.6	97.6	135.56

La sicurezza di vincere all'84% si ottiene per n = 1, con 64 partite e, per n = 10, con 136 partite.

I risultati ottenuti sembrano, in media, dar ragione al Preside Bartolini sebbene l'ultima volta, recatosi al Casinò con il Prof. Franco Eugeni, egli abbia perduto non solo i suoi denari, ma anche quelli dell'amico. Comunque i calcoli effettuati invoglieranno i nostri amici a riprovarci, difatti si è visto che, con un opportuno numero di partite, la probabilità di vincere in media è alta, anche se il gioco non è equo. Ciò, però, è in contraddizione con i noti teoremi sulla rovina del giocatore. Il paradosso consiste nel fatto che si è identificato il gettone da puntare con il valore delle somme da puntare nei vari colpi.

CONCLUSIONI

Il paradosso si spiega col fatto che l'analisi effettuata è in contraddizione con il significato di valor medio di una variabile casuale.

Infatti, se A_r è la somma giocata nella r-esima partita e V_r è la vincita alla r-esima partita, risulta:

$$V_r = \begin{cases} -A_r & \text{con probabilità } q = 1 - p \\ +A_r & \text{con probabilità } p \end{cases}$$

per cui $M(V_r) = A_r(2p - 1)$.

Se N è il numero di partite giocate e V è la vincita totale, risulta:

$$M(V) = \sum_{r=1}^{N} M(V_r) = \sum_{r=1}^{N} A_r(2p - 1),$$

da cui segue che la vincita totale media è nulla se e solo se $p = 1/2$, negativa se e solo se $p < 1/2$.

La contraddizione si supera osservando che bisogna porre due vincoli al gioco:

(a) la somma totale T a disposizione del giocatore;
(b) il numero massimo N di partite.

Esistono allora i seguenti eventi alternativi:

E_1 = " Bartolini vince gli n gettoni ";
E_2 = " Bartolini perde la somma T ";
E_3 = " le partite terminano senza che si verifichi nessuno dei due eventi E_1 ed E_2 ".

Siano p_1 e p_2 le probabilità degli eventi E_1 ed E_2.

Supponiamo, per fissare le idee, che il numero di partite sia illimitato e che sia $p = 1/2$.

La variabile casuale vincita totale V allora può assumere il valore $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$ con probabilità p_1 ed il valore -T con probabilità p_2.

Il suo valor medio è:

$$M(V) = p_1 S - p_2 T.$$

Avendo fatto l'ipotesi di gioco equo si ha che $M(V) = 0$, per cui:

$$p_2 / p_1 = S / T \qquad (5)$$

Per $T \to +\infty$ si ha che $p_2 \to 0$ e, quindi, l'evento E_1 si verifica con certezza. In caso contrario la (5), essendo in genere $T >> S$, mostra che contro un'elevata probabilità di vincere la somma S esiste una bassa probabilità da parte del giocatore di perdere tutti i suoi averi.