Ratio Math. 8
(1994), 9 - 14

ELEMENTI DI TEORIA INGENUA DELLE MATRICI CUBICHE

Demetrio P. Errigo

SUNTO - Viene proposto un formalismo con definizioni elementari della teoria matriciale con riferimento ad una struttura matriciale tridimensionale. Da ultimo si è posto in relazione la non possibilità di trasposizione con gruppi di rotazione e di traslazione.

ABSTRACT - A formalism was resolved by elementary definitions of matrix theory with reference to e three dimensions matrix structure. Finally the not transposition's possibility was connected with rotation and translation sets

DEFINIZIONI

Sia un campo arbitrario K. Un insieme ordinato tridimensionale visualizzato come proiettato sui tre semipiani ortogonali, ognuno dei tre definito come (0), si chiama proiezione matriciale su K.
La composizione:

$$a_{lm(0)} \oplus a_{(0)mn} \oplus a_{l(0)n} = a_{lmn} \qquad (\text{con } l.m.n. = 1.2,\dots,N) \tag{1}$$

determina un insieme di N^3 scalari che a loro volta costituiscono la matrice cubica.
In ogni semipiano orientato ortogonale si individuano righe e colonne; il metodo di individuazione è proiettivo.

MATRICI UGUALI
Due matrici $A = [a_{lmn}]$ e $B = [b_{lmn}]$ si dicono uguali

$$\text{sse } [a_{lmn}]=[b_{lmn}] \qquad \text{per ogni } l.m.n= 1,2,\dots N.$$

MATRICE ZERO
Una matrice $A = [a_{lmn}]$ è detta Zero quando ogni suo elemento è zero:

$$a_{lmn} = 0 \text{ per ogni } l.m.n = 1.2,\dots N.$$

SOMMA (DIFFERENZA) DI MATRICI
se A e B sono due matrici della stessa dimensione, si definisce somma o differenza di A e B, la matrice C i cui elementi sono:

$$c_{lmn} = a_{lmn} \oplus b_{lmn} = a_{lm(0)} \pm b_{lm(0)} \oplus a_{(0)mn} \pm b_{(0)mn} \oplus a_{l(0)n} \pm b_{l(0)n} \qquad (2)$$

IL PRODOTTO DI UNO SCALARE K per la matrice cubica A, è la matrice ottenuta:

$$Ka_{lm(0)} \oplus Ka_{(0)mn} \oplus Ka_{l(0)n} = KA \qquad (3)$$

PRODOTTO DI MATRICI CUBICHE

Se A e B sono due matrici cubiche della stessa dimensione, si definisce il prodotto AB come la matrice cubica C i cui elementi proiettivi, per i quali <u>può</u> <u>non</u> <u>valere</u> la regola di commutazione, sono:

$$\left\{ \begin{aligned} c_{lm(0)} &= \Sigma\ a_{lk(0)}\, b_{km(0)} \\ c_{(0)mn} &= \Sigma\ a_{(0)mk}\, b_{(0)kn} \\ c_{l(0)n} &= \Sigma\ a_{l(0)k}\, b_{k(0)n} \end{aligned} \right. \qquad (4)$$

in particolare si possono sviluppare le potenze:

$$A^2 = AA\ ; \quad A^3 = A^2A; \ ...... \qquad (5)$$

ELEMENTO DI MATRICE

Ogni elemento di matrice cubica, può essere indicato o individuato dalla cella che lo contiene; detta cella può essere planare se appartenente ad una matrice proiezione (o ad una parallela) oppure spaziale.

SUCCESSIONI (con l,n,m, variabili da 1 ad N)

$$\left\{ \begin{aligned} a_{lmn}\,]_n &= \text{"prisma" con base la cella } a_{lm(0)}; \\ &\quad \text{composto di N elementi} = P_{lm(0)} \\ a_{lmn}\,]_l &= \text{"prisma" con base la cella } a_{(0)mn}; \\ &\quad \text{composto di N elementi} = P_{(0)mn} \\ a_{lmn}\,]_m &= \text{"prisma" con base la cella } a_{l(0)n}; \\ &\quad \text{composto di N elementi} = P_{l(0)n} \end{aligned} \right. \qquad (6)$$

I tre prismi individuano una ed una sola cella spaziale contenemte l'elemento a_{ijk} quando è soddisfatta la combinazione degli indici.

TRACCIA

Se $a_{iii} = 1$ la matrice cubica elemento-diagonale viene definita matrice cubica elemento-diagonale Unità o Identità, I = A° la cui traccia vale:

$$TrI = N.$$

Vale per essa la regola AI = IA = A e la proprietà dello scalare: se KI è una matrice elemento-diagonale cubica di elementi K, la sua Traccia vale

$$\mathrm{Tr}\ KI = K\,\Sigma\, a_{iii} = KN \qquad (a_{iii} = 1) \tag{7}$$

INVERTIBILITA'

Per le matrici cubiche è ammessa l'invertibilità, e se A è invertibile, allora

$$AB = I = (BA)$$

e B sarà chiamata matrice inversa di A e sarà denominata come A^{-1} di elementi $a^{-1}{}_{lmn}$.

MATRICE TRASPOSTA

Dato che ad ogni elemento aijk corrispondono tre celle base, traspostando ciascuna delle tre matrici planari base (o proiezione) si ottengono ancora tre "prismi" con le seguenti definizioni:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \int a_{lmn}\ ]_n & = P_{ml(O)} & = \sim P_{lm(O)} \\ \int a_{lmn}\ ]_l & = P_{(O)nm} & = \sim P_{(O)mn} \\ \int a_{lmn}\ ]_m & = P_{n(O)l} & = \sim P_{l(O)n} \end{array} \right. \tag{8}$$

La combinazione degli indici della (1) non è soddisfatta se non nel caso di una matrice cubica elemento-diagonale costituita dal "pseudo-prisma"

$$\int a_{iii}\ ]_i \ = \ P \tag{9}$$

corrispondente alle tre matrici proiezioni diagonali.

Pertanto non esiste trasposta in senso proprio.

Dalle definizioni (6) ne deriva che un elemento $a_{(ijk)^*}$ può essere considerato intersezione di tre matrici ortogonali

$$a_{(ijk)^*} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_{i^*jk}\ \ (i^* = \text{cost};\ j,k = 1,2,\ldots N) \\ M_{ij^*k}\ \ (J^* = \text{cost};\ i,k = 1,2,\ldots N) \\ M_{ijk^*}\ \ (k^* = \text{cost};\ i,j = 1,2,\ldots N) \end{array} \right. \tag{10}$$

Dalle definizioni (8) d'altra parte si nota che non esistendo la trasposta in senso proprio, ad $a_{(ijk)}*$ corrispondono tre "prismi" ognuno dei quali può costruirsi con l'intersezione di due matrici ortogonali.

In senso lato si può dire che la trasposta dell'intersezione di tre matrici ortogonali è costituita da tre coppie di matrici ortogonali.

Sempre in senso lato si può quindi concludere che la trasposta dell'intersezione di tre matrici ortogo. ıli è costituita da tre coppie di matrici ortogonali traspostate, e a sua volta le ɔstituisce.

Data la permutazione di indici, poi, si ha anche:

$$\approx a_{(ijk)^*} = a_{(ijk)^*} \tag{11}$$

la cui trasposta è:

$$\sim a_{(ijk)^*} \to \{ \quad \begin{matrix} M_{j^*ik} ; & M_{ji^*k} \\ M_{ik^*j} ; & M_{ikj^*} \\ M_{k^*ji} ; & M_{kji^*} \end{matrix} \tag{12}$$

(indici con * = cost; varianza indici **non*** = 1.2 ... N)

APPENDICE

§ 1

In uno spazio cartesiano ortogonale di dimensioni finite in cui vigono solo proprietà di parallelismo e di normalità, si possono definire "generatori di concetti" o "generatori di insiemi di operazioni", i seguenti enti:

- "elemento";
- "prisma" (come insieme di elementi, lineare)
- "matrice" (come insieme di elementi, planare),

dei quali solo l'"elemento" è un ente reale e rappresentativo, mentre il prisma e la matrice sono in ogni caso solo enti rappresentativi..

Gli enti di cui sopra avranno le seguenti relazioni di appartenenza:

1) due elementi distinti individuano un prisma cui essi appartengono

1') due matrici distinte individuano un prisma che ad esse appartiene

2) un prisma ed un elemento che non appartenga al prisma individuano una matrice cui essi appartengono

2') una matrice ed un prisma che non appartenga alla matrice individuano un elemento che ad essi appartiene.

§ 2

Gli enti di cui al § precedente generano forme fondamentali classificabili in tre gruppi:

1^ gruppo: forme di prima specie

- la punteggiata: insieme finito di tutti gli elementi che appartengono ad un "prisma";
- la bipunteggiata: i due "prisma" di una "matrice" che individuano un elemento;
- il bipiano: le due "matrici" non parallele che individuano un "prisma".

2^ gruppo: forme di seconda specie

- la "matrice" punteggiata e la "matrice" rigata: rispettivamente insieme di tutti gli elementi o di tutte le righe e colonne ("prismi") che appartengono ad una "matrice";

- la tristella di **"prismi"** e la tristella di "matrici": rispettivamente l'insieme di tre **"prismi"** o delle tre "matrici" che individuano un elemento.

3^ gruppo: forme di terza specie
- spazio di elementi: la matrice cubica
- spazio di **"prismi"**: la matrice cubica

- spazio di **"matrici"**: la matrice cubica.

OSSERVAZIONE

Considerato uno spazio contenente un numero finito di elementi ordinati (matrice cubica) nel quale ogni "prisma" contenga N elementi, si ha:
- ogni matrice contiene N^2 elementi e 2N "prismi" (righe, colonne);
- la matrice cubica contiene N^3 elementi;
- la matrice cubica contiene $3N^2$ "prismi" lineari;
- la matrice cubica contiene 3N "matrici" planari.

§ 3

Dato un elemento a di matrice cubica di indici prefissati (ijk)*, cioè $a_{(ijk)^*}$, ad esso corrispondono i tre "prismi":

$$\left\{ \begin{array}{ll} P\ a_{i^*j^*k} & (k = 1,2,\ldots N) \\ P\ a_{ij^*k^*} & (i = 1,2,\ldots N) \\ P\ a_{i^*jk^*} & (j = 1,2,\ldots N) \end{array} \right.$$

e ad esso corrispondono pure le tre "matrici":

$$\left\{ \begin{array}{ll} M\ a_{i^*jk} & (j,k = 1,2,\ldots N) \\ M\ a_{ij^*k} & (i,k = 1,2,\ldots N) \\ M\ a_{ijk^*} & (i,j = 1,2,\ldots N) \end{array} \right.$$

Nota: la varianza è unicamente per gli indici non star; da questo punto verrà tralasciata supponendola sottintesa.

Eseguendo la trasposizione, all'elemento $\sim a_{(ijk)^*}$ corrispondono tre "prismi" e cioè rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} P\ a_{j^*i^*k} \\ P\ a_{ik^*j^*} \\ P\ a_{k^*ji^*} \end{array} \right.$$

e ad esso e rispettivamente ad essi corrispondono tre coppie di "matrici" e cioè rispettivamente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} [M\ a_{j^*ik}\ ; M\ a_{k^*ji}] & \text{(primo prisma)} \\ [M\ a_{ji^*k}\ ; M\ a_{ik^*j}] & \text{(secondo prisma)} \\ [M\ a_{ikj^*}\ ; M\ a_{kji^*}] & \text{(terzo prisma)} \end{array} \right.$$

In definitiva la trasposizione trasforma forme di seconda specie in forme di prima specie e precisamente:

- la tristella di "prismi" in tre punteggiate;
- la tristella di "matrici" in tre bipiani.

Si può risolvere la trasposizione studiando cóntemporaneamente la trasposizione tra forme di prima specie da un lato e di seconda specie dall'altro, cioè con le trasposte delle trasposte, secondo la sottonotata tabella:

n°	1^ specie	trasposta	1^specie
a)	P $a_{i^*j^*k}$	---------->	P $a_{j^*i^*k}$
b)	P $a_{ij^*k^*}$	---------->	P $a_{ik^*j^*}$
c)	P $a_{i^*jk^*}$	---------->	P $a_{k^*ji^*}$

n°	2^ specie	trasposta	2^ specie
d)	M a_{i^*jk}	----------->	M a_{j^*ik} ; M a_{k^*ji}
e)	M a_{ij^*k}	----------->	M a_{ji^*k} ; M a_{ik^*j}
f)	M a_{ijk^*}	----------->	M a_{ikj^*} ; M a_{kji^*}

e con le seguenti ipotesi:

1^: rotazione di $\pi/2$ con l'asse parallelo all'asse k in posiz.	$i = j$ (R_k);
2^: " " " " " i "	$j = k$ (R_i);
3^: " " " " " j "	$k = i$ (R_j);
4^: n.2 traslazioni lungo il primo asse (T_i);	
5^: " " " secondo " (T_j);	
6^: " " " terzo " (T_k).	

Ci si è così condotti allo studio di un gruppo di rotazioni per le forme di prima specie e di un gruppo di traslazioni per le forme di seconda specie.

BIBLIOGRAFIA

1. F. AYRES Jr, *Matrices*, McGraw-Hill Book Company, 1962
2. M. CERASOLI-F. EUGENI-M. PROTASI, *Matematica Discreta*, Zanichelli, 1988
3. B. SEGRE, *Geometria Analitico-Descrittiva*, Patròn , 1950