Ratio Mathematica 9
(1995), 73-86

SU UNA CLASSE DI MODELLI MATEMATICI PER L'URBANISTICA

Antonio Maturo*, Loredana Renzullo*

SUNTO - Si studia una classe molto generale di *modelli matematici* per l'Urbanistica, dipendente da due parametri. Essa ha come casi particolari il *modello gravitazionale* e le sue più note generalizzazioni ed il *modello esponenziale*. Si esaminano le varie proprietà del modello al variare dei parametri. Successivamente si fissano le *proprietà matematiche* più generali che si ritiene debbano essere soddisfatte dai modelli matematici relativi agli spostamenti di individui.

ABSTRACT - In this paper a two parameter general *mathematical model* for the urbanistic applications is considered. The *exponential* and *gravitational models* are very particular cases. We examine the properties of the model with all the possible values of the parameters. Therefore we assign the most general *mathematical properties* that we think must be satisfied by the mathematical models concerning the people flows.

INTRODUZIONE

L'architetto interviene con un progetto per modificare, migliorandola, la situazione di un edificio, di una strada, di una parte della città, oppure per costruire qualcosa ex-novo. Esiste tuttavia il problema, spesso ignorato, di vedere l'effetto che gli interventi producono sulle altre parti della città, della regione e del territorio. Molti architetti intuiscono tale effetto descrivendolo in maniera qualitativa o empirica. Tuttavia, di solito, l'entità delle

* Dipartimento di Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro, Università G. d'Annunzio, Viale Pindaro 42, Pescara

conseguenze a distanza spaziale o temporale di un intervento può essere correttamente valutata solo per mezzo di adeguati modelli matematici che prendono in considerazione le variabili quantitative che influenzano il sistema e le relazioni fra esse. Può capitare che il singolo architetto, assillato dalla necessità di portare a termine rapidamente e con competenza tecnica i vari progetti, non abbia l'occasione di approfondire lo studio degli effetti *lontani* causati dalla casa che fa costruire o della strada che fa modificare. Spesso tale compito è lasciato ai politici e agli amministratori. Questi ultimi, a loro volta, capiscono che la singola opera ha un impatto su tutto l'ambiente circostante, ma riescono a percepirne la portata solo parzialmente senza riuscire a valutare quantitativamente in quale misura l'intervento interagisce con il complesso delle altre attività e dell'esistente e come cambiano tali interazioni al variare delle grandezze in gioco.

Una sufficiente comprensione del comportamento del sistema urbano sottoposto a modifiche è possibile solo se si utilizza un modello matematico in cui sono ben precisate le *variabili più significative* e le *più importanti relazioni quantitative* fra esse. Tali modelli sono spesso oggetto di numerose critiche basate in gran parte sul fatto che di solito vengono trascurate molte variabili ritenute *non essenziali*. Ciò, però, è necessario per non appesantire il modello rendendolo poco comprensibile, di uso complesso e quindi, in definitiva, di scarsa utilità pratica. Inoltre sono semplificate, spesso linearizzate, le relazioni fra le variabili. Di solito vengono prese in considerazione relazioni valide solo a livello macroscopico o statistico, spesso esprimendo dei comportamenti di massa intuiti dal ricercatore, in base a osservazioni, e che solo parzialmente possono essere sottoposti a verifica sperimentale.

Tuttavia, ricalcando una nota *pseudodefinizione* di *ricerca operativa*, i modelli matematici indicano come *fare male* quelle valutazioni che *altrimenti verrebbero fatte peggio*. Infatti un modello matematico dà comunque delle valutazioni quantitative che, se si rivelano insoddisfacenti ad un'analisi sperimentale, possono essere rese più corrette analizzando meglio, alla luce dell'esperienza, le ipotesi che sono alla base del modello, cercando quali delle variabili trascurate può essere necessario inserire nel modello ed analizzando con i metodi statistici e probabilistici come valutare, per mezzo di variabili casuali, l'effetto delle variabili trascurate, considerando ad esempio una distribuzione di probabilità per la loro somma ed infine istituendo dei metodi di controllo, ad esempio per mezzo della simulazione, dell'effetto delle variabili extrasperimentali.

I modelli si basano su delle ipotesi che danno luogo a delle equazioni differenziali, talvolta di tipo stocastico, e quindi a soluzioni rappresentate da famiglie di curve, superfici e varietà, dipendenti da parametri.

Per formulare un modello è importante capire:

(a) come si formulano le ipotesi;

(b) come si ottengono le varietà che descrivono il modello;

(c) come si generalizza il modello, ampliando le possibilità di utilizzazione e trattando modelli apparentemente diversi come casi particolari;

(d) come si passa da un modello deterministico ad uno probabilistico, ossia come si tiene conto delle variabili trascurate, valutando l'effetto di tante piccole variabili per mezzo di poche variabili aleatorie;

(e) come si confrontano i dati ottenuti sperimentalmente con quelli teorici del modello.

In questo lavoro si affrontano i vari problemi e si propongono delle soluzioni. Per far capire la metodologia suggerita, i criteri logici proposti etc., si parte dalla considerazione di un modello noto e abbastanza usato come quello gravitazionale, si analizza la logica su cui esso si basa e si mostra come esso possa essere generalizzato per vari scopi, ottenendo così modelli che hanno come casi particolari oltre a quelli gravitazionali altri di notevole interesse.

1 - ANALISI DEGLI SPOSTAMENTI PER MEZZO DEL MODELLO GRAVITAZIONALE

Siano $Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_n$ n zone e sia $S_{i,j}$ il numero di persone che si sposta (per lavoro, acquisti o altro, in via provvisoria o definitiva) dalla zona Z_i alla zona Z_j, con $i,j \in \{1,2, \ldots, n\}$.

Se si è interessati solo a spostamenti fra due zone diverse, si pone $S_{ii} = 0$, $\forall i \in \{1,2, \ldots, n\}$. Sia

$$S_{i.} \;=\; \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \qquad \text{(n° di persone che si spostano a partire da } Z_i \text{),}$$

$$S_{.j} \;=\; \sum_{i=1}^{n} S_{ij} \qquad \text{(n°di persone che si spostano arrivando in } Z_j \text{).}$$

Allora il numero totale di persone che si spostano è

$$S \;=\; \sum_{i=1}^{n} S_{i.} \;=\; \sum_{j=1}^{n} S_{.j}\,.$$

Indichiamo con A_i il numero di abitanti della zona Z_i. Si ottiene la matrice Σ degli spostamenti :

zona di arrivo →		Z_1	Z_2			Z_j			Z_n	colonna marginale
zona di partenza ↓	abitanti ↓ →	A_1	A_2			A_j			A_n	
Z_1	A_1	S_{11}	S_{12}			S_{1j}			S_{1n}	$S_{1.}$
Z_2	A_2	S_{21}	S_{22}			S_{2j}			S_{2n}	$S_{2.}$
.										
Z_i	A_i	S_{i1}	S_{i2}			S_{ij}			S_{in}	$S_{i.}$
Z_n	A_n	S_{n1}	S_{n2}			S_{nj}			S_{nn}	$S_{n.}$
riga marginale		$S_{.1}$	$S_{.2}$			$S_{.j}$			$S_{.n}$	S

Dalla matrice Σ, valutando le probabilità in senso frequentista, si ottengono le probabilità dei seguenti eventi :

E_{ij} = " un individuo di Z_i va in Z_j "

H_i = " un individuo di Z_i si sposta "

E_{ij} / H_i = " un individuo di Z_i, se si sposta, va in Z_j "

F_{ij} = " un individuo che arriva in Z_j proviene da Z_i " .

Risulta

$$p(E_{ij}) = \frac{S_{ij}}{A_i}, \qquad p(H_i) = \frac{S_{i.}}{A_i},$$

$$p(E_{ij} / H_i) = \frac{S_{ij}}{S_{i.}}, \qquad p(F_{ij}) = \frac{S_{ij}}{S_{.j}}.$$

Dalla matrice degli spostamenti si possono allora ottenere le matrici delle probabilità:

$$p_{ij} = \mathrm{p}(E_{ij}), \qquad q_{ij} = \mathrm{p}(E_{ij} / H_i), \qquad f_{ij} = \mathrm{p}(F_{ij}).$$

Ponendo $h_i = \mathrm{p}(H_i)$, segue :

$$p_{ij} = q_{ij}\, h_i ,$$

formula che si poteva dedurre dal teorema della probabilità composta essendo $E_{ij} \subseteq H_i$ e quindi :

$$\mathrm{p}(E_{ij}) = \mathrm{p}(E_{ij}\, H_i) = \mathrm{p}(E_{ij} / H_i)\ \mathrm{p}(H_i).$$

Per spiegare gli spostamenti da un punto di vista teorico alcuni hanno assunto l'ipotesi che l'entità S_{ij} degli spostamenti da Z_i a Z_j sia proporzionale al numero degli abitanti di Z_i, a quello di Z_j e all'inverso del quadrato delle distanze. Quindi è stata considerata la formula :

$$S_{ij} = c\frac{A_i A_j}{r_{ij}^2} \tag{1}$$

con r_{ij} distanza fra Z_i e Z_j .

La formula (1) può essere giustificata dal fatto di considerare i numeri di abitanti delle zone Z_i e Z_j come misure di due *masse* che si attraggono. Applicando la *legge di gravitazione universale* , la forza di attrazione fra la massa in Z_i e quella in Z_j è allora:

$$F_{ij} = k\frac{A_i A_j}{r_{ij}^2} . \tag{2}$$

Ammettendo per le *masse degli individui* un comportamento simile a quello dei *corpi elastici* , per la legge di Hooke si ha una deformazione S_{ij} , conseguenza della forza F_{ij} del tipo :

$$S_{ij} = h\, F_{ij} . \tag{3}$$

Ponendo $h\,k = c$ si ottiene la (1).

Indichiamo, in seguito, con a^* la stima di una grandezza a in base al modello teorico considerato.

Il confronto fra il modello teorico (1) ed una distribuzione di spostamenti osservata può essere fatto utilizzando le probabilità

$$q_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{i.}} \qquad \text{e} \qquad q_{ij}^* = \frac{S_{ij}^*}{S_{i.}^*}.$$

Si ha $S_{i.}^* = c \sum_{j=1}^{n} \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}$, $S_{ij}^* = c \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}$, per cui

$$q_{ij}^* = \left(\frac{A_j}{r_{ij}^2} \right) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{r_{ij}^2} \,. \tag{4}$$

Il confronto fra le q_{ij} e le q_{ij}^*, dati, rispettivamente, *empirici e teorici*, ci permette di valutare la bontà del *modello* .

La costante c può essere determinata imponendo che

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i.}^* = \sum_{j=1}^{n} S_{.j}^* = S \,.$$

Infatti si ha

$$S = c \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}$$

e quindi

$$c = S / \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_i A_j}{r_{ij}^2}. \tag{5}$$

2 - UNA ANALISI ED UNA GENERALIZZAZIONE DEL MODELLO GRAVITAZIONALE

Nella formula (1) A_i è la *massa attratta* e A_j è la *massa che attrae*. Dal punto di vista urbanistico non necessariamente tali grandezze devono essere omogenee.

Può essere ragionevole accettare che la massa attratta sia rappresentata dal numero di persone, ma probabilmente la massa che attrae può essere data dalla misura di certe caratteristiche della zona di arrivo. In generale, per ogni zona Z_i, indichiamo con $m(Z_i)$ la *massa attratta* posta in Z_i e con $a(Z_i)$ la *misura dell'attrattività* della zona. Il modello gravitazionale, allora, si può generalizzare ammettendo la formula:

$$S_{ij} = c\frac{m(Z_i)\ a(Z_j)}{r_{ij}^2}. \tag{6}$$

Ammettiamo che le zone Z_i formino una partizione di una certa regione considerata ed indichiamo con δ il diametro della partizione. Al tendere di δ a zero le zone tendono a diventare puntiformi. Poniamo

x = punto di partenza;
y = punto di arrivo;
$\mu = \mu(x)$ = densità in x della massa attratta;
$\alpha = \alpha(y)$ = densità in y della misura di attrattività;
$r = r(x,y)$ = distanza fra x ed y;
$\sigma = \sigma(x,y)$ = densità degli spostamenti fra x ed y.

Per ogni i,j indichiamo con ΔZ_i l'area della zona Z_i e con $S(Z_i,Z_j)$ il numero di spostamenti dalla zona Z_i alla zona Z_j. Si ottiene

$$\mu(x) = \lim_{Z_i \to x} \frac{m(Z_i)}{\Delta Z_i}, \tag{7}$$

$$\alpha(y) = \lim_{Z_j \to y} \frac{a(Z_j)}{\Delta Z_j}, \tag{8}$$

$$\sigma(x,y) = \lim_{\substack{Z_i \to x \\ Z_j \to y}} \frac{S(Z_i,Z_j)}{\Delta Z_i \Delta Z_j}. \tag{9}$$

Dividiamo ambo i membri della (6) per $\Delta Z_i \Delta Z_j$. Facendo tendere il diametro δ della partizione a zero, tenuto conto della (7), (8) e (9), si ottiene

$$\sigma(x,y) = c \, \frac{\mu(x)\alpha(y)}{r^2(x,y)} . \tag{10}$$

Dalla (10), derivando, segue

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} = c \, \frac{\alpha}{r^2} = \frac{\sigma}{\mu} ; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = \frac{\sigma}{\alpha} ; \tag{12}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = (-2)\frac{\sigma}{r} ; \tag{13}$$

da cui

$$d\sigma = \frac{\sigma d\mu}{\mu} + \frac{\sigma d\alpha}{\alpha} - 2 \, \frac{\sigma dr}{r} . \tag{14}$$

Dalla (14), dividendo ambo i membri per σ ed integrando si risale alla (10).

Una immediata generalizzazione del modello gravitazionale si ottiene sostituendo la (13) con la

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = (-h)\frac{\sigma}{r} , \text{ con } h>0 \tag{15}$$

e lasciando invariate le (11) e (12). Si ottiene

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\alpha}{\alpha} + (-h)\,\frac{dr}{r} , \text{ con } h > 0, \tag{16}$$

e integrando si ha

$$\sigma(x,y) = c \, \frac{\mu(x)\alpha(y)}{r^h(x,y)} . \tag{17}$$

Per h=2 si ha il modello gravitazionale. La costante h misura, in un certo senso, l'avversione ai lunghi spostamenti. Per h elevato si verificano, in pratica, solo piccoli spostamenti. Ciò avviene, ad esempio, se si vogliono effettuare acquisti di poco conto. Per h piccolo si verificano facilmente anche lunghi spostamenti. Ad esempio è il caso di acquisti importanti come un'automobile o di spostamenti per motivi di lavoro.

Chiamiamo *modelli quasi gravitazionali* quelli che verificano la (17).

3 - SU UN 'AMPIA CLASSE DI MODELLI ATTRATTIVI

Una generalizzazione della (13) abbastanza ampia si ottiene ponendo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = -\frac{h}{r^{\beta}}\sigma \quad , \text{ con } \beta \in \mathcal{R} \text{ e } h > 0 \tag{18}$$

e lasciando invariate la (11) e la (12).

Il rapporto $\frac{\partial \sigma}{\partial r}/\sigma$ è negativo, come nel modello quasi gravitazionale. Il suo valore assoluto decresce al crescere di r per $\beta > 0$, cresce al crescere di r per $\beta < 0$ ed è costante rispetto ad r per β=0.

Si ottiene :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\mu}{\mu} + \frac{d\alpha}{\alpha} + (-h)\,\frac{dr}{r^{\beta}} \quad , \text{ con } h > 0, \tag{19}$$

da cui

$$log\sigma = log\,\mu + log\,\alpha + \int -\frac{h}{r^{\beta}}\,dr. \tag{20}$$

Per $\beta \neq 1$ si ha

$$\int -\frac{h}{r^{\beta}}\,dr = \frac{-h}{-\beta+1}\,r^{-\beta+1} + k. \tag{21}$$

Per $\beta = 1$ si ha

$$\int -\frac{h}{r} dr = - h \log r + k \tag{22}$$

Poniamo in ambo i casi $k = \log c$, con c costante positiva. Si ottiene allora:

$$\log \sigma = \log c \, \mu \, \alpha + F(r), \tag{23}$$

con

$$F(r) = \begin{cases} -\dfrac{h}{-\beta+1} r^{-\beta+1} & per \ \beta \neq 1 \\ -h \ \log r & per \ \ \beta = 1 \end{cases} \tag{24}$$

e quindi

$$\sigma = c \, \mu \, \alpha \, e^{F(r)} \, . \tag{25}$$

Analizziamo i vari casi:

(a) **caso** $\beta < 1$

Si ha che $-\dfrac{h}{-\beta+1} < 0$. Inoltre $r^{-\beta+1}$ è strettamente crescente. Si ha che $F(r)$ è non positiva e strettamente decrescente e risulta $F(0) = 0$, $\lim_{r \to +\infty} F(r) = -\infty$. Allora, per la (25), σ *è strettamente decrescente*, uguale a $c \, \mu \, \alpha$ per $r=0$ e *nullo* per $r=+\infty$.

Per $\beta = 0$, la (25) si riduce alla :

$$\sigma = c \, \mu \, \alpha \, e^{-hr} \tag{26}$$

e si ottiene il **modello esponenziale** .

(b) **caso** $\beta > 1$

Si ha che $-\frac{h}{-\beta+1} > 0$. Inoltre $r^{-\beta+1}$ è strettamente decrescente. La *F(r)* è non negativa e strettamente decrescente. Inoltre $\lim_{r \to +0} F(r) = +\infty$, $\lim_{r \to +\infty} F(r) = 0$. Allora, per la (25), σ *è strettamente decrescente*, uguale a $+\infty$ per $r=0$ e uguale a $c\,\mu\,\alpha$ per $r=+\infty$.

(c) **caso** $\beta = 1$

E' il caso di frontiera fra i due precedenti. La *F(r)* è positiva per r<1, si annulla per r=1 ed è negativa per r>1. Inoltre è strettamente decrescente e si ha $\lim_{r \to +0} F(r) = +\infty$, $\lim_{r \to +\infty} F(r) = -\infty$, per cui σ *è strettamente decrescente*, uguale a $+\infty$ per $r=0$, uguale a $c\,\mu\,\alpha$ per $r=1$ e si annulla per $r=+\infty$. Si ottiene il modello quasi gravitazionale.

4 - CONSIDERAZIONI GENERALI

La (18) è un caso particolare della

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = -f(r)\sigma \tag{27}$$

con le condizioni :

(a) $f(r) > 0$, $\forall\ r > 0$;

(b) $f(r)$ è integrabile secondo Riemann in ogni intervallo chiuso contenuto in $(0,+\infty)$.

Dalla (27), fissato $r_0 \in (0,+\infty)$, si ottiene :

$$log\ \sigma = -\int_{r_0}^{r} f(t)\,dt + \log\lambda, \quad con\ \lambda = \lambda\,(\alpha, \mu),$$

e quindi

$$\sigma = \lambda \, e^{-\int_{r_0}^{r} f(t)\,dt} \tag{28}$$

Se ammettiamo le condizioni :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sigma \quad , \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\mu} = \frac{1}{\mu}\sigma \tag{29}$$

si ottiene

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \frac{1}{\alpha}\lambda \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = \frac{1}{\mu}\lambda \tag{30}$$

da cui

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}d\alpha \quad + \frac{1}{\mu}d\mu ,$$

$log\ \lambda \ = \ log\ \alpha + log\ \mu + log\ c$, con c costante ,:

$$\lambda \ = \ c\,\alpha\,\mu$$

e quindi

$$\sigma \ = \ c\,\alpha\,\mu \ e^{-\int_{r_0}^{r} f(t)\,dt} \tag{31}$$

La funzione:

$$F(r) \ = -\int_{r_0}^{r} f(r)\ dr \ . \tag{32}$$

è continua e, poiché $f(r) > 0$, $\forall\ r>0$, è strettamente decrescente. Inoltre è positiva per $r < r_0$ ed è negativa per $r > r_0$. Se esiste un intervallo [0,a], con a>0, in cui $f(r)$ è limitata allora si può assumere, nella (32), $r_0 = 0$. In tal caso, per ogni $r > 0$, risulta $F(r) < 0$ e $F(0) = 0$.

Un caso notevole è quello in cui $f(r)$ è *monotona*. Allora è necessariamente soddisfatta la condizione di integrabilità (b).

Se la $f(r)$ è crescente (in particolare costante), essendo non negativa, esiste un intervallo [0,a], con a>0, in cui $f(r)$ è limitata. Assumendo $r_0 = 0$ segue che $F(0) = 0$. Inoltre $\forall\, n \in N_1$ risulta:

$$\int_{r_0+n}^{r_0+n+1} f(t)\,dt \le \int_{r_0+n+1}^{r_0+n+2} f(t)\,dt \text{ , per cui } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$$

e quindi $F(+\infty) = -\infty$. In tal caso σ *è strettamente decrescente*, uguale a $c\,\mu\,\alpha$ per $r=0$ e *nullo* per $r=+\infty$.

In particolare si ottiene questo caso per

$$f(r) = -\frac{h}{r^{\beta}}, \quad con\ \beta \le 0 \quad , \quad h > 0.$$

Se la $f(r)$ è strettamente decrescente risulta $F(0) > 0$ e può verificarsi che tale valore sia finito o infinito. Inoltre

$$\int_{r_0+n}^{r_0+n+1} f(t)\,dt > \int_{r_0+n+1}^{r_0+n+2} f(t)\,dt \ ,$$

per cui può essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty \quad \text{oppure} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = k,$$

con k numero reale positivo. Nel primo caso è ancora $F(+\infty) = -\infty$ e quindi $\sigma(+\infty) = 0$, nel secondo caso risulta $\sigma(+\infty) = c\,\alpha\,\mu\ e^{-k}$.

In particolare si ottiene il primo caso per

$$f(r) = -\frac{h}{r^{\beta}}, \quad con\ 0 < \beta \le 1 \quad , \quad h > 0$$

ed il secondo caso per

$$f(r) = -\frac{h}{r^{\beta}}, \quad con\ \beta > 1 \quad , \quad h > 0.$$

BIBLIOGRAFIA

1. C. BERTUGLIA, G. RABINO, *Modello per l'organizzazione di un comprensorio,* Guida Editori Napoli, 1975
2. J. BOUDEVILLE, *Lo spazio e i poli di sviluppo,* Franco Angeli, 1977
3. R. CAMAGNI, *Economia Urbana, Principi e modelli teorici*, La Nuova Italia Scientifica Edizioni
4. N. CERA, A. MATURO, *Calcolo delle probabilità e statistica con applicazioni allo studio del territorio,* Montefeltro Edizioni Urbino, 1980
5. F. FORTE E ALTRI, *Metodologia urbanistica, ricerca operativa, modellistica urbana,* Guida Editori Napoli, 1972
6. J. MASSER, *Modelli analitici per la pianificazione urbana e regionale*, Officina Edizioni Roma, 1976