Ratio Mathematica 9
(1995), 69-72

SU ALCUNI q^2 - INSIEMI DI AG(3,q) A TRE CARATTERI RISPETTO AI PIANI

Osvaldo Ferri* , Stefania Ferri*

SUNTO - Si studiano i q^2-insiemi K di AG(3,q) di classe $[1,q,n]_2$, rispetto ai piani. Si dimostra che deve necessariamente essere n=q+1, che K è di tipo $(1,q,q+1)_2$ e che è una q^2-calotta e quindi, se q è dispari, è un paraboloide ellittico.

ABSTRACT - In this paper the q^2-sets K of AG(3,q) of class $[1,q,n]_2$ are studied. We prove that it has to be: n=q+1, K of type $(1,q,q+1)_2$ ed K a q^2-cap, and hence, if q is odd, an elliptic paraboloid.

INTRODUZIONE

0. Sia K un q^2-insieme di uno spazio affine di Galois di dimensione tre e di ordine q, AG(3,q). Seguendo le notazioni di [6], chiameremo carattere di indice i, rispetto ai piani, di K, il numero t_i dei piani di AG(3,q) che intersecano K esattamente in i punti. Se $m_0,m_1,\dots,m_s$, sono interi tali che $m_0<m_1<m_2\dots<m_s$, diremo che K è di classe $[m_0,m_1,\dots,m_s]_2$, rispetto ai piani di AG(3,q) se essi possono intersecare K solamente in $m_0,m_1,\dots,m_s$ punti, cioè $t_m=0$ per ogni $m\neq m_0,m_1,\dots,m_s$; diremo che è di tipo $(m_0,m_1,\dots,m_s)_2$ se è di classe $[m_0,m_1,\dots,m_s]_2$ e $t_m\neq 0$ per ogni $m= m_0,m_1,\dots,m_s$. Inoltre l'intero m_s si chiama grado g_d di K.

In questo lavoro prendiamo in considerazione i q^2-insiemi di classe $[1,q,n]_2$ e proviamo che deve essere necessariamente n=q+1 e che K è di tipo $(1,q,q+1)_2$ ed è una q^2-calotta di AG(3,q).

---

* Dipartimento di Matematica, Università de L'Aquila.

SU ALCUNI q^2-INSIEMI DI AG(3,q)

1. Vogliamo provare il seguente:

TEOREMA 1 - *Un q^2-insieme di $AG(3,q)$ di classe $[1,q,n]_2$, rispetto ai piani, è tale che necessariamente $n=q+1$, risulta di tipo $(1,q,q+1)_2$ ed è una q^2-calotta, cioè, se q è dispari, un paraboloide ellittico.*

DIMOSTRAZIONE: E' noto, cfr. [8], che tra i caratteri di un k-insieme di dimensione d di AG(r,q) sussistono le relazioni:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{m_s} t_m = q^{r-d}\gamma_{r-1,d-1} \\ \sum_{m=1}^{m_s} mt_m = k\gamma_{r-1,d-1} \\ \sum_{m=2}^{m_s} m(m-1)t_m = k(k-1)\gamma_{r-2,d-2} \end{cases} \tag{1.1}$$

in cui, cfr. [6],

$$\gamma_{r,d} = \prod_{i=0}^{d} \frac{\theta_{r-i}}{\theta_{d-i}} \quad \text{per } d \geq 0 \quad \gamma_{r,-1} = 1 \tag{1.2}$$

e $\theta_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$.

Le (1.1) nel nostro caso diventano:

$$\begin{cases} t_1 + t_q + t_n = q^3 + q^2 + q \\ t_1 + qt_q + nt_n = q^2(q^2+q+1) \\ q(q-1)t_q + n(n-1)t_n = q^2(q^2-1)(q+1) \end{cases} \tag{1.3}$$

da cui si ricava:

$$t_1 = \frac{q^3}{n-1}, \quad t_q = q(q^2+q+1) - \frac{q^3}{n-q}, \quad t_n = \frac{q^3(q-1)}{(n-1)(n-q)}. \tag{1.4}$$

Facciamo ora vedere che *per ogni punto P di K passa almeno un piano unisecante e quindi $t_1 \geq q^2$.*

Infatti sia t una retta per P unisecante K, certamente esistente in quanto le rette che congiungono P con gli altri q^2-1 punti di K sono al massimo q^2-1, mentre le rette di AG(3,q) per P sono q^2+q+1 e $q^2+q+1 > q^2-1$ per ogni q.

I piani per t sono s-secanti, q-secanti o n-secanti K. Denotati con v_i (i=1,q,n) i numeri di tali piani, si ha:

$$\begin{cases} v_1+v_q+v_n=q+1 \\ (q-1)v_q+(n-1)v_n=q^2-1 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Se fosse $v_1=0$ si avrebbe dalla $(1.5)_I$ $v_q+v_n=q+1$ e cioè $v_n=q+1-v_q$ che sostituito nella $(1.5)_{II}$ dà $v_q=q+1$ e $v_n=0$, cioè tutti i piani per t sarebbero q-secanti K ed i punti di K sarebbero $(q+1)q-1=q^2+q+1 > q^2$ che è assurdo. Quindi per ogni punto di K passa almeno un piano 1-secante K e cioè $t_1 \geq q^2$.

Allora dalla prima delle (1.4) si ha:

$$\frac{q^3}{n-1} \geq q^2 \Rightarrow n-1 \leq q \Rightarrow n \leq q+1.$$

Ma essendo, per ipotesi, $n \geq q+1$ ne segue $n=q+1$.

Sempre dalle (1.4) si ha allora:

$$t_1=q^2 \ , \ t_q=q^2+q \ , \ t_{q+1}=q^2(q-1) \ ,$$

e quindi il q^2-insieme risulta, essendo i caratteri tutti diversi da zero, di tipo $(1,q,q+1)_2$.

Dimostriamo ora che *K è una calotta cioè i suoi punti sono a tre a tre non allineati.*

Sia s una retta h-secante K, con $2 \leq h \leq q$, certamente esistente perché K possiede piani q-secanti ($q \geq 2$). Detti w_q e w_{q+1} i numeri dei piani, per s, che siano rispettivamente q-secanti e (q+1)-secanti K, si ha:

$$\begin{cases} w_q+w_{q+1}=q+1 \\ (q-h)w_q+(q+1-h)w_{q+1}=q^2-h \end{cases} \qquad (1.6)$$

Dalle $(1.6)_{II}$ si ha: $(q-h)(w_q+w_{q+1})+w_{q+1}=q^2-h$ e, per la $(1.6)_I$, segue: $(q-h)(q+1)+w_{q+1}=q^2-h$ cioè $w_{q+1}=(h-1)q$.

Essendo $w_{q+1} \leq q+1$ si ha $(h-1)q \leq q+1$ e cioè $h \leq 2+1/q$ cioè $h \leq 2$. Avendo supposto $h \geq 2$ ne segue che h=2 e quindi K è una q^2-calotta. Tale q^2-calotta di AG(3,q) è in PG(3,q), ampliamento di AG(3,q), necessariamente incompleta e si completa in una (q^2+1)-calotta mediante un punto del piano improprio che risulta tangente alla (q^2+1)-calotta.

Se q è dispari la (q^2+1)-calotta di PG(3,q) è una quadrica ellittica e quindi la q^2-calotta di AG(3,q) è un paraboloide ellittico.

Il teorema 1 risulta così provato.

BIBLIOGRAFIA

1. O. FERRI, *Sulle caratteristiche grafiche delle quadriche nello spazio affine*. Riv. Mat. Univ. Parma (5) 2 (1993) 325-330.
2. B. SEGRE, *Lectures of modern geometries*. Cremonese Roma 1961.
3. G. TALLINI, *Sulle k-calotte degli spazi lineari finiti*. 1.2. Atti Acc. Naz. Lincei Rend. 20 (1956) 311-317, 442-466.
4. G. TALLINI, *Sulle k-calotte di uno spazio lineare finito*. Ann. Mat. Pura Appl. 42 (1956), 119-164.
5. G. TALLINI, *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. Appl. 16 (1957) 328-351.
6. G. TALLINI, *Problemi e risultati sulle geometrie di Galois*, relaz. n. 30 Ist. Mat. Univ. Napoli (1973) 1-30.
7. G. TALLINI, *Grafici e characterization of algebraic varieties in a Galois spaces*, Teorie combinatorie (Roma, settembre 1973) Accad. Naz. Lincei 1976.
8. G. TALLINI, *k-insiemi e blocking-set in PG(2,q) ed AG(2,q)*. Quaderni di Geometrie Comb. Dipartimento Mat. Univ. L'Aquila, dicembre 1982.
9. G. TALLINI, *Teoria dei K-insiemi in uno spazio di Galois*, *Teoria dei codici correttori*. Sem. Geom. Comb. Dip. Mat. Univ. Roma La Sapienza. Quaderno 64, 1985.