Ratio Mathematica 10
(1996), 91- 98

UN NUOVO APPROCCIO ALLA TEORIA DEI SISTEMI DIGITALI MULTICANALE

Fabio Mercanti*, **Luigi Cerritelli***, **Vincenzo Di Marcello****

SUNTO - Si propone l'uso di un nuovo *formalismo* per lo studio della teoria dei *Sistemi Digitali Multicanale* (SDM).

ABSTRACT - A new formalism to study of the theory of the *Multichannel Digital Systems (SDM)* has been formulated.

INTRODUZIONE

0. Lo studio della teoria dei *Sistemi Digitali Multicanale* (SDM), generalizzazione del concetto di *sistema* (vedere per esempio BERTALAMFFY [1]) inteso nella sua più ampia accezione, presenta non poche difficoltà dovute al formalismo di cui la teoria stessa fa uso. Scopo di questo lavoro è quello di introdurre un formalismo alternativo, sperabilmente più conveniente, che rientri in quello *tradizionale della matematica*.

Si ricorda rapidamente che un SDM (MELZI-MERCANTI [6], MELZI [4]) è un sistema *dinamico* (RINALDI [9]) per il quale lo *stato iniziale*, l'*input-output* e lo *stato istantaneo* sono costituiti da informazione codificata

---

* Politecnico di Milano, via Bonardi 3.
** Mathesis di Teramo.

secondo le regole di un'*algebra* $\mathcal{A}$, sulle quali si basa un certo meccanismo *algebrico-combinatorio*, per il quale si rimanda a MELZI-MERCANTI [5], MELZI [3].

Con opportune precisazioni, ivi si considera un *alfabeto* T costituito da un numero finito di caratteri. Le *parole* su T costituiscono una *grammatica* $\mathcal{G}$. Detto P($\mathcal{G}$) l'insieme delle parti di $\mathcal{G}$, gli elementi di P($\mathcal{G}$) formano un'*algebra di Boole* $\mathcal{B}$. Introducendo alcune altre opportune *relazioni*, oltre a quelle sussistenti in $\mathcal{B}$, e similmente altre *operazioni*, dette *$\mathcal{A}$-operazioni*, tra le parole di $\mathcal{G}$, si ottiene una *struttura algebrica* $\mathcal{A}$, estensione di $\mathcal{B}$. Le $\mathcal{A}$-operazioni (come suggerisce anche il loro nome: *selezione*, *selezione destra*, *selezione sinistra*, *taglio e concatenazione*) sono *verosimili modelli* delle operazioni di *sintesi polipeptidica*.

Il fatto che un SDM sia descrivibile con particolari mecccanismi algebrico-combinatori, agenti su informazione opportunamente codificata, lo rende particolarmente adatto alla formulazione di *modelli matematici* per lo studio di vari oggetti e fenomeni naturali, come ad esempio *sistemi biologici*, *sistemi economici*, *sistemi di edifici rispetto ai processi di manutenzione e degrado*, *fenomeni sismici*, ecc.. Se infatti l'idea tradizionale di sistema è dominata dai concetti di *proporzionalità e continuità*, l'idea di SDM è invece dominata dalla nozione di *soglia*, ossia dal fenomeno per il quale stimoli inferiori ad una certa intensità critica non provocano alcuna risposta in un dato sistema (MERCANTI [8]). Un esempio tipico di risultato in tal senso può trovarsi in MERCANTI [7], dove si *descrive* e si *giustifica* un particolare fenomeno della percezione, ritrovando e giustificando i risultati che si ottengono *sperimentalmente*. L'impostazione assiomatica delle teorie di un SDM forma una base interpretativa dei fenomeni nervosi, nel senso che consente di fondare una *teoria matematica dei fenomeni mentali* in senso lato.

Un SDM è la naturale generalizzazione del concetto di *neuromacchina* (MELZI [2])[1], dalla quale ha ereditato il formalismo che in questa trattazione si vuole rendere più semplice.

[1] Uno stadio, per la verità, intermedio tra il concetto di neuromacchina e quello di SDM è costituito da un *semiautoma* (MELZI [3]), non strettamente necessario alla presente trattazione.

PROCESSI DI ELABORAZIONE DI UNA NEUROMACCHINA

1. Una *neuromacchina* $\mathcal{N}$ è costituita da un insieme di *moduli* comunicanti tra loro in modo opportuno. In sintesi, il funzionamento di $\mathcal{N}$ è così descrivibile.

Siano $I_{\mathcal{N}}$, $O_{\mathcal{N}}$ rispettivamente gli insiemi degli *stimoli* e delle *risposte* di $\mathcal{N}$. Gli elementi di $I_{\mathcal{N}}$, $O_{\mathcal{N}}$ sono *parole*[2], cioè *stringhe* costruite secondo una certa *grammatica* di un dato *alfabeto,* ai cui simboli (neurocaratteri) si aggiungono i simboli metalinguistici « , », « $*$ », costruendo in tal modo certe *neuroparole.* Le neuroparole sono, quindi, stringhe costruite secondo la grammatica, su un neuroalfabeto comprendente un numero finito di simboli.

Ad ogni *stimolo* corrisponde una *risposta* di $\mathcal{N}$. In altri termini, una volta che sia stata introdotta nella neuromacchina $\mathcal{N}$ una parola $v \in I_{\mathcal{N}}$, la $\mathcal{N}$ proclama, entro un intervallo di tempo finito, una nuova parola $w \in O_{\mathcal{N}}$. La risposta di $\mathcal{N}$ è funzione dello stimolo v in entrata, nonché dello stato iniziale di $\mathcal{N}$ (stato α). Il tempo è suddiviso in intervalli che, per comodità, sono supposti di uguale durata, suddivisi in intervalli *dispari* ed in intervalli *pari*.

---

2 Nel modulo risiedono *caratteri materiali*, copie materiali dei caratteri di un *alfabeto finito* $c_0, c_1, \ldots, c_{h-1}$, detto *alfabeto materiale*, comprendente un simbolo privilegiato denotato con « • », in generale coincidente con c_0. Una neuroparola materiale è un allineamento ordinato dei precedenti neurocaratteri. In particolare, si chiama *liscia* una neuroparola non contenente occorrenze del carattere « • » e si usano le lettere latine maiuscole nel senso di variabili, indicanti neuroparole materiali non ridotte a singoli neurocaratteri.Inoltre, con evidente significato dei simboli, si dice che neuroparole del tipo $\bullet A$, $B\bullet$, $\bullet C\bullet$ sono, rispettivamente, *chiusa a sinistra, chiusa a destra* o, semplicemente, *chiusa*. Analogamente si può parlare di neuroparole *aperte* nello stesso senso. Le neuroparole lisce, con cui terminano le neuroparole aperte a destra, prendono il nome di *suffissi*; le neuroparole, con cui iniziano le neuroparole aperte a sinistra, sono dette *prefissi*. Per esempio, nelle neuroparole materiali $\bullet A_1\bullet A_2\bullet\ldots\bullet A_r\bullet B$, $\bullet C\bullet D_1\bullet\ldots\bullet D_s\bullet E$, $F\bullet G_1\bullet\ldots\bullet G_t$, B, E sono suffissi e C, F prefissi. Si dice, inoltre, che una neuroparola materiale è *feconda*, se è composta da neuroparole materiali lisce tutte chiuse, tranne eventualmente l'ultima, che può essere aperta a destra. Per esempio le neuroparole $A_1\bullet A_2\bullet\ldots A_r\bullet$ e $\bullet A_1\bullet A_2\bullet\ldots \bullet A_r\bullet B$, con $A_1, A_2, \ldots, A_r, B$ tutte lisce, sono entrambe feconde. Si conviene, infine, che l'insieme delle neuroparole materiali comprenda una neuroparola materiale *muta*. La costruzione delle neuroparole avviene, con evidente significato dei termini, a secondo che le parole stesse siano o no aperte, aperte a destra, aperte a sinistra (MELZI [2]).

Il meccanismo secondo cui avviene l'elaborazione entro la neuromacchina è stabilito dagli assiomi di MELZI [2].[3]

PUNTO DI VISTA ALTERNATIVO

2. Vogliamo ora considerare il funzionamento di una neuromacchina da un punto di vista leggermente differente. Negli intervalli di tempo (cfr. § 1) dispari[4] l'informazione può entrare oppure uscire da una neuromacchina sotto forma di una sola neuroparola o di più neuroparole separate fra loro dal simbolo « , », cioè sotto forma di una parola non contenente il simbolo « $*$ ».

Trascuriamo gli intervalli di tempo pari e introduciamo la variabile temporale t assumente valori interi (non negativi, se l'origine dei tempi è scelta coincidente con l'inizio dell'elaborazione).

Si può, così, descrivere un generico processo di elaborazione da parte di una neuromacchina dicendo che in *ogni* intervallo di tempo t entra in $\mathcal{N}$ un'informazione costituita da una parola x_t ed esce da $\mathcal{N}$ un'informazione costituita da una parola y_t. Tali parole x_t, y_t non contengono il simbolo « $*$ »

---

3 PRIMO ASSIOMA. Ogni modulo $\mathcal{H}_j$ componente una neuromacchina $\mathcal{H} = \mathcal{H}_j$ (j = 1, 2, ..., n, ...) contiene inizialmente un insieme α_j , funzione di j, di neuroparole materiali allo stato latente, e ricostruisce tutte e sole queste neuroparole durante ogni intervallo temporale δ_i di indice i pari quando esse sono state cancellate nell'intervallo precedente δ_{i-1} .

SECONDO ASSIOMA. Le neuroparole binarie circolano in $\mathcal{H}_j$ solo negli intervalli temporali δ_i di indice *i* dispari. Se in un intervallo temporale δ_i di indice dispari circola in $\mathcal{H}_j$ una neuroparola binaria γ^{-1} (XY), corrispondente di una neuroparola materiale XY, e in $\mathcal{H}_j$ risiedono una neuroparola materiale del tipo $\bullet A \bullet X$ e una neuroparola materiale del tipo $Y \bullet B$ (X e Y lisce e aperte, A aperta, B aperta a sinistra, lisce o no, eventualmente vuote), allora entro l'intervallo temporale δ_i le neuroparole materiali $\bullet A \bullet X$ e $\bullet Y \bullet B$ vengono cancellate da $\mathcal{H}_j$ e in questo modulo vengono a risiedere le neuroparole materiali $\bullet A \bullet$ e $\bullet B$.

TERZO ASSIOMA. Se in un intervallo temporale δ_i di indice *i* dispari nel modulo $\mathcal{H}_j$ si forma una neuroparola materiale chiusa del tipo $\bullet A_1 \bullet A_2 \bullet A \bullet ... \bullet A_r \bullet$, con A_1, A_2, ..., A_r lisce, allora tale neuroparola viene cancellata nel corso dell'intervallo pari successivo δ_{i+1} e nell'intervallo dispari δ_{i+2} in $\mathcal{H}_j$ circolano le copie binarie delle neuroparole A_h (h = 1, 2, ..., r).

QUARTO ASSIOMA. Se in un intervallo temporale δ_i di indice i dispari in un modulo $\mathcal{H}_j$ circola la copia binaria γ^{-1} (A_h) di una componente liscia di una neuroparola materiale neoformata in $\mathcal{H}_j$, la neuroparola binaria γ^{-1} (A_h) circola, nello stesso intervallo di tempo, in tutti i moduli di $\mathcal{H}$ (MELZI [2]).

4 Gli intervalli di tempo pari servono unicamente per ricostituire lo stato iniziale α della neuromacchina (cfr. § 1).

e possono essere mute. In generale le parole x_t sono formate da neuroparole costituenti in parte *dati* da elaborare e in parte *risultati parziali* dell'elaborazione[5]. In tal senso ogni y_t è funzione delle parole $x_{t'}$ ($t' < t$).

MATRICI COME RAPPRESENTAZIONI DI PAROLE

3. Siano $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ rispettivamente, gli insiemi delle neuroparole con cui sono formate le parole *stimoli* e *risposte* di $\mathcal{N}$, cioè gli elementi di $I_{\mathcal{N}}$, $O_{\mathcal{N}}$ (cfr. § 1). Consideriamo l'insieme *unione* di $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, cioè l'insieme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}} = \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{N}}.$$

Supponiamo $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ ordinato secondo una legge qualsiasi e denotiamo con U_h ($h = 1, 2, \dots, m$) gli elementi di $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ ordinati secondo tale legge. Ogni U_h può, così, essere posto in corrispondenza biunivoca con una matrice unicolonnare u_h a n righe, stabilendo che a U_h corrisponda la matrice i cui elementi sono tutti nulli, ad eccezione di quello della h -esima riga che è uguale a 1. Si pone, cioè

$$U_h \leftrightarrow u_h = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

In tale modo ogni neuroparola appartenente ad $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, oppure a $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$, può essere individuata mediante una matrice unicolonnare u_h.

Analogamente ad ogni parola, costituita da neuroparole separate fra loro dal simbolo « , », si può associare una matrice unicolonnare, a n righe, i cui elementi sono tutti nulli, ad eccezione di quelli, uguali a 1, corrispondenti alle neuroparole che formano la parola in questione. Si stabilisce, cioè, la corrispondenza

---

[5] Si può supporre con MELZI [2] che un *osservatore* Ω possa opportunamente interagire con $\mathcal{N}$, proclamando certe neuroparole. In tal senso, le parole x_t sono costituite da neuroparole proclamate sia da Ω (*dati da elaborare*) sia da $\mathcal{N}$ (*risultati parziali*).

$$V = U_i, U_j, \ldots, U_l \leftrightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Con tale convenzione la parola muta è descritta da una matrice i cui elementi sono tutti nulli.

4. Se in uno stesso intervallo di tempo circolano le parole (cfr. (2))

$$V = U_i, U_j, \ldots, U_l,$$

$$W = U_a, U_b, \ldots, U_c,$$

si può equivalentemente dire che circola l'unica parola

$$Z = V, W = U_i, U_j, \ldots, U_l, U_a, U_b, \ldots, U_c.$$

Se v, w, z sono le matrici (1) associate, rispettivamente, alle parole V, W, Z, vale la relazione

$$z = v \oplus w \ ,$$

nella quale l'operazione indicata con il simbolo « $\oplus$ » è una particolare *somma*. Essa è analoga all'usuale somma matriciale, purché valgano le seguenti regole

$$\begin{cases} 0 \oplus 0 = 0 \\ 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1 \\ 1 \oplus 1 = 1 \end{cases}$$

L'operazione inversa non viene definita.

EQUAZIONI CANONICHE DELLE NEUROMACCHINE

5. Siano x_t, y_t le matrici (2) corrispondenti rispettivamente alle parole X_t, Y_t. Il processo di elaborazione dei dati mediante una neuromacchina può essere considerato, così, come il calcolo delle y_t in funzione delle $x_{t'}$, essendo $t' < t$ (cfr. § 2). Nel caso di un processo comprendente n+1 passi di elaborazione (cioè di durata uguale a n+1 intervalli di tempo) si possono, pertanto, scrivere le seguenti relazioni

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_o) \\ y_2 = f_2(x_o, x_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_o, x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases} \tag{3}$$

dove f_1, f_2,..., f_n denotano funzioni qualsiasi generalmente non lineari. Poiché le parole x_t in entrata di $\mathcal{N}$ sono costituite da neuroparole proclamate in parte dall'osservatore e in parte dalla stessa neuromacchina[6], le x_h, con h = 1,2,...,n-1, si possono scomporre come segue

$$x_h = y_h \oplus x'_h, \tag{4}$$

dove x'_h rappresenta il contributo dell'osservatore, o, in generale, dell'esterno.

Tenendo conto delle (4) le (3) possono, così, essere scritte nella *forma canonica*

$$\begin{cases} y_1 = F_1(x_o) \\ y_2 = F_2(x_o, x'_1, y_1) \\ y_3 = F_3(x_o, x'_1, x'_2, y_1, y_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = F_n(x_o, x'_1, \dots, x'_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \tag{5}$$

Poiché ogni risposta di ogni neuromacchina è proclamata entro un tempo finito, per ogni neuromacchina esiste un numero finito di funzioni, $F_1, F_2, \dots, F_n$ che ne caratterizzano il comportamento. Ogni neuromacchina

---

[6] Cfr. Nota [5].

può, così, essere considerata equivalente ad una opportuna n-pla di funzioni $F_1, F_2, \dots, F_n$.

CONCLUSIONI

6. Si presentano i seguenti due problemi fondamentali.

Problema diretto. Dato lo stimolo, determinare la risposta, cioè, date le quantità x_o, $x'_1, \dots, x'_{n-1}$, determinare le quantità $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Se sono note le funzioni $F_1, F_2, \dots, F_n$, ciò si ottiene immediatamente dalle (5).

Problema inverso. Data la risposta, determinare lo stimolo (o gli stimoli) che l'hanno causata, cioè, date le quantità $y_1, y_2, \dots, y_n$, determinare le quantità $x_o, x'_1, \dots, x'_{n-1}$.

Ciò richiede la risoluzione delle (5) rispetto alle $x_o, x'_1, \dots, x'_{n-1}$.

7. Le risposte ai problemi diretto e inverso del § 6, ottenute passando attraverso le formulazioni (1) e (2), forniscono una palese esemplificazione della semplificazione del linguaggio finora usato nello studio delle neuromacchine e, quindi, degli SDM. La semplificazione non è solo *simbolica*, ma consente anche l'uso di *strumenti classici* della matematica. In tal senso è attualmente allo studio una riformulazione dell'algebra $\mathcal{A}$ di [5], [3] (cfr. § 0) secondo le risultanze sopra esposte.

BIBLIOGRAFIA

1. L. von BERTALAMAFFY, *Teoria generale dei sistemi*, ISEDI, Milano 1971.
2. G. MELZI, *Una definizione assiomatica del concetto di neuromacchina*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 5 (1981), 9-74.
3. G. MELZI, *Sulla definizione di semiautoma*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 10 (1988), 23-50.
4. G. MELZI, *Sistemi dinamici digitali e loro possibili applicazioni*, Ratio Math, 2 (1991), 157-160.
5. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 9 (1988), 107-121.
6. G. MELZI e F. MERCANTI, *Teoria dei sistemi e Sistemi Digitali Multicanale*, Sinopie, Politecnico di Milano, 2 (1989), 34-35.
7. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia fra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Ratio Math., 2 (1991), 161-165.
8. F. MERCANTI, *La descrizione matematica dei fenomeni a soglia*, Per.di mat., Vol. 69, 2 (1993), 56-60.
9. S. RINALDI, *Teoria dei sistemi*, Clup., Politecnico di Milano 1977.