Ratio Mathematica 9
(1995), 55-60

SISTEMI DIGITALI MULTICANALE E TEORIA DELL'INFORMAZIONE I. ENTROPIA, RIDONDANZA E CODIFICA

Fabio Mercanti*

SUNTO - Si analizzano le possibilità di applicazione della *Teoria dell'informazione* alla *Teoria dei Sistemi Digitali Multicanale (SDM).*

ABSTRACT - The possibility of applications of the *Information Theory* to the *Multichannel Digital Systems (SDM) Theory* has been analyzed.

0. In questa nota si indagano, e in qualche caso si anticipano, i risultati degli studi sui rapporti tra *energia* ed *informazione* in un *Sistema Digitale Multicanale* (SDM), con particolare riguardo alle sue interpretazioni *biologiche* ed *economiche*. Più precisamente si pongono le basi per mostrare come nel fenomeno biologico della *percezione*, studiata in MERCANTI [6], la quantità di informazione trasmessa dall'SDM sia misurabile in termini di *entropia* e di *ridondanza*, nel senso di SHANNON [9], [10], [11].

I risultati ottenuti possono essere utilizzati per lo studio di altri sistemi biologici od economici, come quelli descritti in MERCANTI [7]. Più in generale, il senso di una ricerca su oggetti astratti del tipo degli SDM è quello che un sistema percettivo, un ecosistema, un reattore chimico, un distretto fisiologico, un sistema economico, una rete nervosa o addirittura un

* Politecnico di Milano, via Bonardi 3.

gruppo animale od umano si lascino descrivere spontaneamente, a parte le inevitabili precisazioni, come un SDM (MELZI [2]).

1. Per comodità del lettore, questo paragrafo è dedicato ad alcuni prerequisiti indispensabili per il prosieguo, riguardanti le teorie relative agli SDM.

1.1. Un SDM (MELZI [2], MELZI-MERCANTI [4]) è un *sistema dinamico* (RINALDI [8]), lo *stato iniziale* e l'*input-output* del quale sono costituiti da *informazione codificata*, secondo certe *parole* su un dato alfabeto; queste parole interagiscono secondo il seguente meccanismo *algebrico-combinatorio* (MELZI-MERCANTI [3]).

1.1.1. Data una *grammatica* $\mathcal{G}$, costituita dalle *parole* su un *alfabeto* T ad un numero finito di caratteri, gli elementi dell'insieme $P(\mathcal{G})$, insieme delle parti di $\mathcal{G}$, formano un'*algebra* di Boole B. Introducendo, oltre alle operazioni di B, altre opportune relazioni ed operazioni, dette $\mathcal{A}$-*operazioni*, tra le parole di $\mathcal{G}$, si ottiene una *struttura algebrica* $\mathcal{A}$, estensione di B.

1.1.2. Con l'insieme dei *termini* dell'algebra $\mathcal{A}$ è possibile costruire certe $\mathcal{A}$-*funzioni* da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$, le variabili *indipendenti* e il *valore* delle quali sono, rispettivamente, insiemi di parole ed $\mathcal{A}$-*espressioni* (insieme dei termini dell'algebra $\mathcal{A}$).

1.2 Sulla base di quanto detto precedentemente, un SDM può essere definito come un *vettore*

$$S= [C_o, C_1,\dots,C_n], \tag{1}$$

ad elementi in $P(\mathcal{G})$ (cfr. 1.1) e funzione di un tempo *discreto* t_i, dove C_o è lo *stato* dell'SDM al tempo t_i, $C_1, C_2,\dots,C_r$ sono i *canali di entrata* al tempo t_i e $C_{r+1},\dots C_n$ sono i *canali di uscita* sempre al tempo t_i.

Tra lo stato C_o e i canali di entrata e di uscita valgono le *relazioni funzionali*

$$C_o(t_{i+1}) = F(C_o(t_i)), \dots, C_r(t_i)), \quad i=1,2,\dots \tag{2}$$

e

$$C_j(t_{i+1}) = F_j\,(C_o(t_i))\,, \quad j= r+1, r+2,\dots,n, \tag{3}$$

esprimenti, rispettivamente, come d'uso nella teoria dei sistemi dinamici, che C_o al tempo t_{i+1} è funzione dello stato C_o e delle entrate al tempo precedente, e che le uscite, ad un dato tempo, sono funzioni dello stato C_o, al tempo precedente.

Le funzioni (2) e (3) sono funzioni da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$ (cfr.1.1.2), indipendenti dal tempo, e definiscono un'applicazione σ dell'insieme $\mathcal{S}$ dei vettori (1) in sé, detta funzione caratteristica

$$F_{SDM} \tag{4}$$

dell'SDM.

2. Si ricordano, per sommi, capi le nozioni fondamentali della Teoria dell'informazione, relativamente ai concetti di *entropia* e *ridondanza* di un linguaggio ([9], [10], [11]). Senza approfondire i principi e le regole che guidano questo studio, si può dire, intuitivamente, che essi si riassumano nella constatazione di fondo che un linguaggio (o un messaggio), che comprende parole poco usate, se da un lato potrà aumentare le conoscenze del destinatario, dall'altro stornerà, per così dire, la sua attenzione e le sue capacità percettive. Analogo ragionamento vale nel caso di un *messaggio disturbato* (*canale disturbato*, [10]), per esempio nel caso di una trasmissione via radio disturbata da interferenze. Esiste un legame tra il *contenuto del messaggio* e la sua *comprensibilità*, legame che si estrinseca nelle due funzioni di entropia e di ridondanza.

Si può immaginare l'entropia di un linguaggio (o di un messaggio) come il *contenuto medio di informazione* del linguaggio (o del messaggio), e la ridondanza come un indice della maggiore o minore facilità di comprensione del linguaggio (o del messaggio) stesso.

2.1. Ogni linguaggio, e quindi ogni messaggio, può essere considerato come una sorgente *ergodica d'informazione*. Come tale, essendo puramente casuale la successione dei simboli che lo compongono, la quantità di informazione, in esso contenuta, dipenderà esclusivamente dalla probabilità statistica di un determinato simbolo. La "curiosità" di un simbolo P_i, per il ricevitore del messaggio, è tanto più grande, quanto più raramente egli è abituato a incontrarlo. Di conseguenza tale curiosità sarà inversamente proporzionale alla frequenza p_i, con cui si incontra il simbolo generico P_i. Il numero adottato, per misurare la curiosità di un simbolo P_i, è rappresentato dal logaritmo in base 2 del reciproco della frequenza p_i di P_i; tale numero prende il nome di *contenuto parziale di informazione* di P_i , e si scrive

$$c_i = \mathrm{ld}\frac{1}{p_i} = -\mathrm{ld}\ p_i. \tag{5}$$

In particolare la (5) soddisfa l'esigenza di divenire 0 per p_i=1 (probabilità massima), cioè alla comparsa di un unico *simbolo stereotipo*, e di crescere indefinitivamente al diminuire della frequenza p_i, in concordanza col fatto che l'informazione aumenta col *diminuire della frequenza* (e quindi con l'aumento della curiosità).

2.2. Nel caso studiato in SHANNON [11], si considera dapprima l'alfabeto inglese di ventisei caratteri, esclusi quindi i *blank*. Qualora i caratteri compaiano con eguale frequenza p_i, cioè nel caso di equiripartizione statistica dei simboli, alla sommatoria

$$H_0 = \sum_{i=1}^{26} p_i c_i = -\sum_{i=1}^{26} p_i \mathrm{ld} p_i, \tag{6}$$

essendo c_i il contenuto parziale di informazione dato dalla (5), si dà il nome di *entropia*[1] *teorica* del linguaggio inglese. Analogamente si possono calcolare H_1, H_2, ..., H_w, dove i simboli usati sono, rispettivamente, per il calcolo di H_1 i *singoli caratteri* che compaiono nel linguaggio, per H_2 le *coppie di caratteri*, ..., per H_w le *parole* del linguaggio[2].

Al rapporto

$$\rho_1 = \frac{H_0 - H_1}{H_0} \tag{7}$$

si dà il nome di *ridondanza del linguaggio* per caratteri. Analogamente si definisce una ridondanza per coppie di caratteri, e così via fino a definire una ridondanza per parole[3]. In generale ogni linguaggio è caratterizzato da una propria ridondanza: così per esempio la lingua inglese è meno ridondante di quella italiana e, all'interno di quella italiana, è meno ridondante il linguaggio tecnico-scientifico, rispetto a quello storico-letterario, e così via (MANFRINO [1], MERCANTI [5]).

3. I concetti di entropia (6) e di ridondanza (7) possono essere utilizzati nello studio degli SDM, nel senso che, dato che gli SDM sono elaboratori di informazione codificata, secondo la funzione caratteristica (4) da $P(\mathcal{G})$ a $P(\mathcal{G})$ (cfr. 1.2), allora esisterà una *codifica* di ogni *linguaggio* che sia

1 La coincidenza puramente formale della espressione matematica dell'entropia termodinamica con H_0 indusse Shannon ad utilizzare la parola entropia anche nella Teoria dell'informazione.

2 I risultati ottenuti da Shannon sono H_0=4.7, H_1=4.14, H_2=3.56,...,H_W=2.62.

3 La ridondanza può essere assunta come indice della comprensibilità di un messaggio o di un linguaggio. Essa varia da linguaggio a linguaggio e a secondo che la si consideri per simboli che siano singoli caratteri, oppure coppie di caratteri, e così via sino a considerare simboli le singole parole.

utilizzabile dall' SDM. Si tratterà di calcolare, per ogni processo nell'SDM, la corrispondente entropia (6), nel caso delle parole di $\mathcal{G}$ (cfr. 1.1.1), e la rispettiva ridondanza (7), sempre nel caso delle parole di $\mathcal{G}$.

Dette allora H_w^* e ρ_w^*, rispettivamente, tali entropia e ridondanza, risulterà, in perfetta analogia con le (6) e (7), rispettivamente,

$$H_w^* = \sum_{i=1}^{n} q_i d_i \tag{8}$$

e

$$\rho_w^* = \frac{H_{w_o}^* - H_w^*}{H_{w_o}^*}, \tag{9}$$

essendo nella (8) e nella (9), rispettivamente, n il numero delle parole (o degli insiemi di parole) di $\mathcal{G}$ prese in considerazione, q_i un *peso* da attribuire ad ogni parola (o insieme di parole), legato da una relazione funzionale, del tipo (4), alle frequenze p_i delle parole P_i di $\mathcal{G}$, d_i il contenuto di informazione parziale (cfr. (5))

$$d_i = \mathrm{ld}\frac{1}{q_i} = -\mathrm{ld}\, q_i, \tag{10}$$

e $H_{w_0}^*$ l'*entropia teorica* (cfr. 2.2) dell'algebra $\mathcal{A}$ (cfr. 1.1.1), sui meccanismi algebrico-combinatori della quale l'SDM regola il proprio funzionamento.

Tenendo conto della (10), la (8) diventa

$$H_w^* = -\sum_{i=1}^{n} q_i \mathrm{ld}\, q_i . \tag{11}$$

4. Le conclusioni contenute nelle (8), (9), (10), (11) consentono una descrizione, dal punto di vista della teoria dell'informazione, degli SDM. In particolare sarà possibile dare una nuova interpretazione dei fenomeni biologici ed economici studiati nei già citati lavori [6] e [7].
La funzione caratteristica (4) regola anche le quantità di informazione che individuano stato, canali di entrata e canali di uscita di un SDM (cfr. 1.2), con le conseguenti implicazioni.

BIBLIOGRAFIA

1. R. MANFRINO, *L'entropia della lingua italiana ed il suo calcolo*, Alta Frequenza, 30 (1960), 4-29.
2. G. MELZI, *Sistemi dinamici digitali e loro possibili applicazioni*, Ratio Mat., Univ. Pescara, 2 (1991), 157-160.
3. G. MELZI e F. MERCANTI, *An algebraic-combinatory Theory of real nervous System*, Rend. Sem. Mat. di Brescia, 9 (1988), 107-121.
4. G. MELZI e F. MERCANTI, *Teoria dei sistemi e Sistemi Digitali Multicanale*, Sinopie, Politecnico di Milano, 2 (1989), 34-35.
5. F.MERCANTI, *Gli effetti del linguaggio pubblicitario: "approach" matematico di un problema psicologico*, Marketing e Pubblicità, F. Angeli Ed., Milano, 8 (1966), 131-135.
6. F. MERCANTI, *Una suggestiva analogia fra fenomeni biologici e fenomeni economici a soglia*, Ratio Mat., Univ. Pescara, 2 (1991), 161-165.
7. F. MERCANTI, *Interpretazione economica dei predicati di canale in un Sistema Digitale Multicanale*, Ratio Mat., Univ. Pescara, 3 (1992), 81-84.
8. S. RINALDI, *Teoria dei sistemi*, Clup., Politecnico di Milano, 1977.
9. C.E. SHANNON, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System. Techn. J., 27 (1948), 379-423.
10. C.E. SHANNON, *Communication in the Presence of Noise*, Proc. IRE Sect. II, Waves and Electrone, 37 (1949), 10-21.
11. C.E. SHANNON, *Prediction and Entropy of printed English*, Bell System Techn. J., 30 (1951), 50-64.