Ratio Mathematica 10
(1996), 53 - 60

NOTE SU DUE PROBLEMI DI GEOMETRIA E SUCCESSIONI RICORSIVE

Franco Mancinelli *

Dedico questo lavoro alla memoria del Prof. Bruno Rizzi.

SUNTO. La presente nota si divide in quattro paragrafi. Nel primo si considera la successione dei poligoni regolari di fissato perimetro e tali che il successivo ha numero di lati doppio del precedente; apotema e raggio di tali poligoni sono legati da formule ricorrenti il cui limite dipende esclusivamente dalla figura iniziale che si considera. Nei paragrafi 2 e 3 si studiano le ricorrenze indipendentemente dai poligoni e se ne danno nuove e più ampie interpretazioni geometriche. Nell' ultimo paragrafo si esaminano dapprima le analoghe relazioni intercorrenti tra apotema e raggio di poligoni regolari di area assegnata, poi si studiano le analoghe successioni svincolate dai poligoni.

1. PRIMO PROBLEMA

Siano a_0 e r_0 apotema e raggio rispettivamente di un poligono regolare di numero di lati n_0 e perciò di lato l_0 :

$$l_0 = \sqrt{r_0{}^2 - a_0{}^2} \qquad \text{con } a_0 < r_0$$

e perimetro p_0:

---

* Liceo Scientifico *M. Curie* di Giulianova (Te).

$$p_0 = 2n_0\sqrt{r_0^{\,2} - a_0^{\,2}}$$

E' noto ([1], pag. 161) che , considerata la successione dei poligoni isoperimetri, in cui il poligono regolare successivo ha numero di lati doppio del poligono regolare precedente , allora apotema e raggio dei suddetti poligoni regolari, a partire da $n_0=3$ sono, alternativamente , medio aritmetico e medio geometrico di apotema e raggio immediatamente precedenti ; con ovvio significato dei simboli , si ha :

1) $$a_{2n} = \frac{a_n + r_n}{2} \qquad\qquad r_{2n} = \sqrt{a_{2n} \cdot r_n}$$

Si pongono, per la successione 1) due problemi: il primo riguarda la sua natura ; il secondo, nel caso in cui essa sia convergente, il calcolo del limite. A proposito della prima questione, si dimostra che la successione 1) è convergente; tale risultato è , d'altra parte intuitivo , se si pensa che al tendere di n a $+\infty$, le sottosuccessioni a_n e r_n tendono entrambe al raggio l della circonferenza limite γ_l cui tende la successione dei poligoni isoperimetri . Per quanto riguarda il valore del limite l della successione 1) , esso dipende , naturalmente, dai valori dell' apotema a_0 e del raggio r_0 del poligono iniziale di numero di lati n_0 ed è calcolabile ragionando nei termini seguenti: se indichiamo con p_0 il perimetro del poligono regolare iniziale , si ha:

$$p_0 = 2n_0\sqrt{r_0^{\,2} - a_0^{\,2}} \qquad ;$$

D'altra parte, il lato l_{2n} del poligono regolare con numero di numero di lati $2n$ è dato da :

$$l_{2n} = 2n\sqrt{r_{2n}^{\,2} - a_{2n}^{\,2}}$$

e il perimetro p_{2n} da:

2) $$p_{2n} = 4n\sqrt{r_{2n}^{\,2} - a_{2n}^{\,2}}$$

Se con α_{2n} indichiamo la misura, in radianti, dell'angolo che

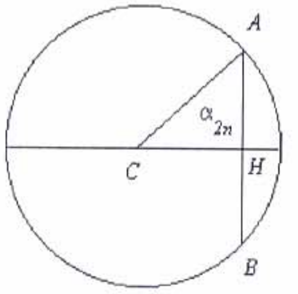

fig. 1

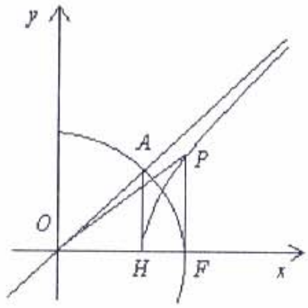

fig. 2

il raggio AC forma con l'ipotenusa CH (fig 1) , si ha: $n = \pi/(2\alpha_{2n})$, e perciò dalla 2) segue :

$$p_{2n} = \frac{2\pi}{\alpha_{2n}}\sqrt{{r_{2n}}^2 - {a_{2n}}^2}$$

Poiché $\cos(\alpha_{2n}) = (r_{2n}/a_{2n})$, risulta $\alpha_{2n} = \arccos(r_{2n} / a_{2n})$, e dalle 2) e 3) seguono, nell' ordine :

4) $$p_0 = \frac{2\pi}{\alpha_{n_0}}\sqrt{{r_{n_0}}^2 - {a_{n_0}}^2} \quad ,$$

5) $$p_{2n} = \frac{2\pi}{\alpha_{2n}}\sqrt{{r_{2n}}^2 - {a_{2n}}^2} \quad .$$

Poiché i poligoni sono isoperimetri , non solo si ha che $p_{2n} = p_0$, ma si ha anche, variando n e perciò a_{2n} , r_{2n} secondo la 1) , da una parte che l'espressione a secondo membro della 5) resta costante , dall'altra che il valore di tale espressione è eguale alla lunghezza $2\pi\, l$ della circonferenza limite γ_l . In simboli :

6) $$\frac{2\pi\sqrt{{r_0}^2 - {a_0}^2}}{arccos(r_0/a_0)} = \frac{2\pi\sqrt{{r_{2n}}^2 - {a_{2n}}^2}}{arccos(r_{2n}/a_{2n})} = 2\pi l \quad ,$$

da cui :

7) $$l = \frac{\sqrt{r_0 - a_0}}{arccos(a_0/r_0)} \qquad ,$$

risultando , tale valore di l , il limite della successione ricorsiva data.

E' interessante notare che l' espressione k_{2n} così definita :

8) $$k_{2n} = \frac{\sqrt{r_{2n}^2 - a_{2n}^2}}{arccos(a_{2n}/r_{2n})}$$

rimane costante quando a_{2n} e r_{2n} variano secondo la legge 1), e rappresenta il rapporto il perimetro costante e 2π.

2. Generalizzazioni

Anche nel caso di a_0 , b_0 reali positivi , con $a_0 < b_0$, si dimostra che ([2],pag. 81) la successione ricorsiva :

1*) $$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}^2 - b_n^2} \qquad ,$$

è convergente ; in particolare la quantità k_n , definita ponendo:

8*) $$k_n = \frac{\sqrt{b_n^2 - a_n^2}}{arccos(a_n/b_n)} \qquad ,$$

(cfr. 8)) resta costante al variare di n e il limite l della successione 1*) è dato dall' espressione

7*) $$l = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0^2}}{arccos(a_0/b_0)}$$

analoga alla 7).

Nel caso di a_0, $b_0 \in R^+_0$ però con $a_0 > b_0$ la successione ricorsiva definita dalla 1*) è ancora convergente al limite l dato da :

7**) $$l = \frac{\sqrt{a_0^2 - b_0^2}}{arccos\,h(a_0/b_0)}$$

formalmente simile alla 7*), differendo da essa per il fatto che a denominatore è presente di (a_0/b_0) il coseno iperbolico e non il coseno. In tal caso , inoltre, al variare di n , rimane costante la quantità k_n :

8**) $$k_n = \frac{\sqrt{a_n{}^2 - b_n{}^2}}{\operatorname{arccos} h(a_n/b_n)}$$

anch' essa formalmente analoga alla omonima della 8*).

E' interessante notare che la successione ricorsiva 1*) e ,in particolare, la quantità k_n data in 8**), anche in questo caso $a_0 > b_0$, sono suscettibili della seguente interessante interpretazione geometrica : a partire dall' iperbole γ_0 di semidistanza focale a_0 e semiasse trasverso b_0, consideriamo la successione di iperboli γ_n di eq.:

γ_n : $$\frac{x^2}{b_n{}^2} - \frac{y^2}{a_n{}^2 - b_n{}^2} = 1$$

in cui le quantità a_n e b_n rappresentano , ora, rispettivamente le semidistanze focali e i semiassi trasversi di γ_n ; un ramo di γ_n è riportato in fig 2 ;in essa è : $H\ (b_n;0)$, $F(a_n;0)$, $OA=OF=a_n$, $P(x_P;y_P)\in\gamma_n$, $x_P=a_n$, $y_P=(a_n{}^2-b_n{}^2)/b_n\ )=PF$; al variare di n e perciò di a_n e b_n secondo la 1*) , varia la generica iperbole; resta costante la quantità k_n la cui espressione data nella 8**), rappresenta, ora, il prodotto di AH per il rapporto tra il triangolo AOH e il triangolo mistilineo OPH; in simboli :

$$k_n = AH\frac{AOH}{OPH} .$$

Infatti è (fig. 2)

$$AH = \sqrt{a_n{}^2 - b_n{}^2},$$

mentre

$$(OPH/AOH) = \operatorname{arccos} h(a_n/b_n) ;$$

quest' ultima affermazione si prova facilmente se si nota, da una parte, che

$$AOH = b_n\sqrt{a_n{}^2 - b_n{}^2}\Big/2 ,$$

dall' altra, che $OPH=OPF-HPF$, con

$$OPF = a_n\left(a_n^2 - b_n^2\right)/\left(2b_n\right)$$

e con

$$HPF = \sqrt{\frac{a_n^2 - b_n^2}{b_n^2}} \int_{bn}^{an} \sqrt{x^2 - b_n^2}\, dx \, ,$$

si che

$$OPH = (1/2) b_n \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \ln\left(\left(a_n + \sqrt{a_n^2 - b_n^2}\right) / b_n\right),$$

e si ricorda che

$$\operatorname{arccos} h(x) \doteq \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

si che

$$\operatorname{arccos} h(an/bn) = \ln\left(\left(a_n + \sqrt{a_n^2 - b_n^2}\right) / b_n\right)$$

e, infine,

$$OPH = (1/2) b_n \sqrt{a_n^2 - b_n^2} \operatorname{arccos}(a_n / b_n).$$

3. Interpretazione geometrica della successione ricorsiva in R^3

Diamo, in questo paragrafo, una interpretazione geometrica della successione ricorsiva 1), nei due casi di $a_0 < b_0$, $a_0 > b_0$, facendo riferimento allo spazio R^3. Per ciò, consideriamo in R^3 due superficie Σ_1, Σ_2 di equazioni cartesiane, rispettivamente:

Σ_1 : $$\sigma_1 = \frac{x + y}{2}$$

Σ_2 : $$\sigma_2 = \sqrt{x \cdot y}$$

definite entrambe in D={ (x;y) $\in R^2$ / x > 0 , y > 0 }: Sia $P_0(a_0;b_0) \in D$ il punto iniziale di una successione di punti di D ottenuti , a due a due, a partire da P_0 iterando i seguenti quattro passi : 1) si determina su Σ_1 il punto $Q_1(a_0;b_0;z_1)$, con $z_1=\sigma_1(P_0)$; 2) si torna in D per considerare il punto $P_1(z_1;b_0)$, ottenuto da P_0 sostituendo alla sua ascissa la quota di Q_1 ; 3) ciò fatto, si considera in Σ_2 il punto $Q_2(z_1;b_0;z_2)$, essendo z_2 immagine di P_1 secondo σ_2, cioè $z_2=\sigma_2(z_1;b_0)$; 4) infine si individua, ancora in D, il punto P_2 $(z_1;z_2)$ ottenuto da P_1 sostituendo la quota di Q_2 all' ordinata dello stesso P_1 ; questo processo di ricerca di punti , a partire da P_0 ci permette di passare da un punto P_k di D a un punto Q_{k+1} di Σ_1 se k è pari o a un punto Σ_2 se k è dispari, per poi tornare a un punto P_{k+1} di D ottenuto da P_k , sostituendo la quota di Q_{k+1} all' ascissa di P_k se $Q_{k+1} \in \Sigma_1$, all' ordinata di P_k se $Q_{k+1} \in \Sigma_2$. Questo processo iterativo porta a una successione di punti P_n di D , tendenti , al tendere di n a $+\infty$ al punto limite $P_l(l;l)$, essendo il valore di l dato dal secondo membro dell' espressione 7*) ovvero 7**) , a seconda che P_0 appartenga all' ottante , sottoinsieme di D con $a_0 < b_0$, oppure $a_0 > b_0$, come appare evidente se si tiene presente il procedimento di individuazione dei punti $P_n \in D$, mediante le superficie Σ_1 Σ_2 e le successioni 1) . E' interessante notare che anche i punti Q_n su Σ_1 e Σ_2 , alternativamente, tendono al punto limite Q_l $(l;l;l)$ giacente sulla retta , luogo geometrico dei punti di tangenza della Σ_1 con la Σ_2 .

4. Secondo problema

Richiamiamo il problema dei poligoni regolari equivalenti : a partire da un poligono regolare di apotema a_0 e raggio r_0, consideriamo la successione dei poligoni regolari in cui il poligono regolare successivo ha numero di lati doppio del precedente ; usando la stessa simbologia del problema 1 , si ottiene la seguente successione ricorsiva :

$$a_{2n} = \frac{\sqrt{2 \cdot a_n \cdot (a_n + b_n)}}{2} \quad , \quad b_{2n} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \quad , \quad a_0 \prec r_0 \quad ;$$

che, si dimostra , è anch'essa convergente .

Più in generale , si dimostra che è convergente la successione :

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2 \cdot a_n \cdot (a_n + b_n)}}{2} \quad , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \quad , \quad a_0, b_0 \in R_0^+ \quad ,$$

e che il limite l è dato dalla espressione 9) , ovvero 10) ,

9) $$l = \sqrt{\frac{a_0 \cdot \sqrt{b_0^2 - a_0^2}}{\arccos(a_0/b_0)}} \quad ;$$

10) $$l = \sqrt{\frac{a_0 \cdot \sqrt{a_0^2 - b_o^2}}{\arccos h(a_0/b_0)}} \quad ,$$

a seconda che sia , rispettivamente , $a_0 < b_0$, ovvero $a_0 > b_0$, mantenendosi costante, al variare di n , nei due casi , la quantità k_n data dalla relazione 11) ovvero 12) rispettivamente:

11) $$k_n = \frac{a_n \cdot \sqrt{a_n^2 - b_n^2}}{\arccos(a_n/b_n)} \quad ,$$

12) $$k_n = \frac{a_n \cdot \sqrt{b_n^2 - a_n^2}}{\arccos h(a_n/b_n)} \quad .$$

BIBLIOGRAFIA

1. F. ENRIQUES, U. AMALDI, *Elementi di geometria* , vol.2, Zanichelli, Bologna, 1975.
2. E.GIUSTI. *Esercizi e complementi di analisi matematica* , vol.1, Boringhieri, Torino,1991.