Ratio Mathematica 10
(1996) 35 - 42

RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE DELLE SINUSOIDI

C. Di Foggia, R. Prosperi

SUNTO - Questo lavoro si propone di presentare le corrispondenze tra le sinusoidi e i vettori e tra i vettori ed i numeri complessi. Tali corrispondenze, oltre ad avere un loro interesse prettamente teorico, consentono anche notevoli semplificazioni nelle applicazioni di tali enti, soprattutto in materie tecniche quali elettrotecnica, elettronica, telecomunicazioni e sistemi.

ABSTRACT - In this work corrisponding sinusoids-vectors and vectors-complexes numbers are presented. These correspondences, beyond to have a theorical particular interest, consent also a lot of semplifications in these beings, above all in technical sciences like electro technology, electronics, telecomunications and systems.

1. Introduzione

Alcune operazioni elementari su sinusoidi, come prodotto o divisione per uno scalare o per un **operatore vettoriale,** cioè per un vettore costante nel tempo (Fig 1), vengono effettuate, in generale, in maniera alquanto semplice; altre operazioni, come la somma di sinusoidi, risultano molto complicate.

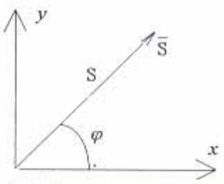

Fig. 1 - Operatore vettoriale

Consideriamo la funzione sinusoidale

$$e(t) = E\,\text{sen}(\omega t + \varphi)\,; \tag{1.1}$$

E viene detta **ampiezza** della sinusoide, ω **pulsazione**, $(\omega t + \varphi)$ **angolo di fase** o, semplicemente, **fase**. La fase è composta da due termini: ωt, variabile nel tempo, e φ, costante, coincidente con la fase all'istante iniziale $t = 0$, e, pertanto, detto **fase iniziale**; in tale istante il valore della sinusoide è $e(0) = E\,\text{sen}\,\varphi$.

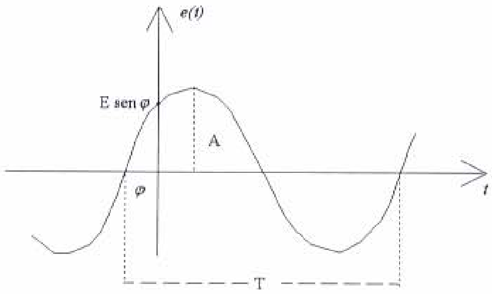

Fig. 2

Se $\varphi = 0$, la funzione (1.1) si scrive $e(t) = E\,\text{sen}\,\omega t$ e viene presa come sinusoide di riferimento essendo, per $t = 0$, $e(0) = E\,\text{sen}(0) = 0$.

In quel che segue, nel riferimento cartesiano, considereremo sull'asse delle ascisse, la variabile $\vartheta = \omega t$, invece del tempo t, in modo da leggere su tale asse direttamente la fase della sinusoide; in tal caso, quindi, la distanza tra l'origine degli assi e il punto di intersezione della sinusoide con l'asse delle ascisse rappresenta proprio la fase iniziale φ.

Rispetto alla sinusoide di riferimento, una sinusoide è:

in anticipo se $\varphi > 0$, Fig.3

in ritardo se $\varphi < 0$. Fig.4

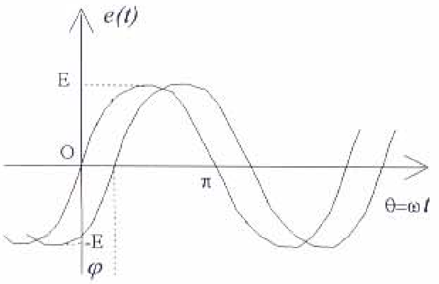

Fig.3

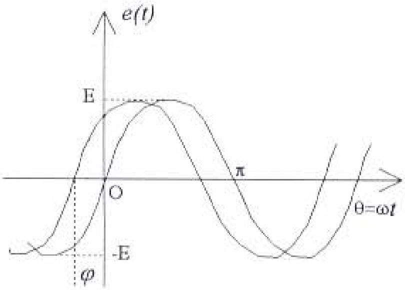

Fig. 4

2. Operazioni con sinusoidi

Riferendoci alla (1.1), con $\varphi = 0$, consideriamo alcune operazioni sulle sinusoidi:

- **moltiplicazione di uno scalare** S **per la sinusoide** $e(t) = E\,\mathrm{sen}(\omega t)$: dà origine ad un'altra sinusoide che è diversa dalla precedente solo per l'ampiezza
$$S \cdot e(t) = S \cdot E\,\mathrm{sen}(\omega t);$$

- **divisione della sinusoide** $e(t)$ **per uno scalare** S:
$$\frac{e(t)}{S} = \frac{E}{S}\mathrm{sen}(\omega t);$$
- **moltiplicazione della sinusoide** $e(t)$ **per un operatore vettoriale** $\bar{S}(S,\varphi)$: dà origine ad una sinusoide di ampiezza $S \cdot E$ e fase $\omega t + \varphi$:
$$\bar{S} \cdot e(t) = S \cdot E\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi).$$

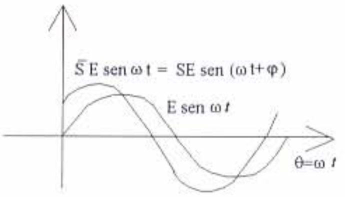

Fig. 5

- **divisione della sinusoide per l'operatore vettoriale** $\bar{S}$: la sinusoide risultante sarà
$$\frac{e(t)}{\bar{S}} = \frac{E}{S}\mathrm{sen}(\omega t - \varphi).$$

Nel caso di **somma tra sinusoidi,** $a(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$ e $b(t) = B\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$, occorrerebbe eseguire i seguenti laboriosi calcoli:

$$a(t) + b(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) = A\,\mathrm{sen}\,\omega t + B\left[\mathrm{sen}\,\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] =$$

$$= (A + B\cos\varphi)\left[\mathrm{sen}\,\omega t + \frac{B\,\mathrm{sen}\,\varphi}{A + B\cos\varphi}\cos\omega t\right]; \text{ ponendo } \frac{B\,\mathrm{sen}\,\varphi}{A + B\cos\varphi} = \tan\alpha:$$

$$(A + B\cos\varphi)\left[\mathrm{sen}\,\omega t + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\cos\omega t\right] == \frac{(A + B\cos\varphi)}{\cos\alpha}\left[\mathrm{sen}\,\omega t\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\omega t\right] =$$

$= K\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$, avendo posto $K = \dfrac{A + \cos\varphi \cdot B}{\cos\alpha}$.

La sinusoide somma ha la stessa pulsazione delle componenti ma fase e ampiezza diverse, quindi la somma è ancora una sinusoide; infatti, essa è, tra le funzioni periodiche, l'unica che conserva la propria forma.

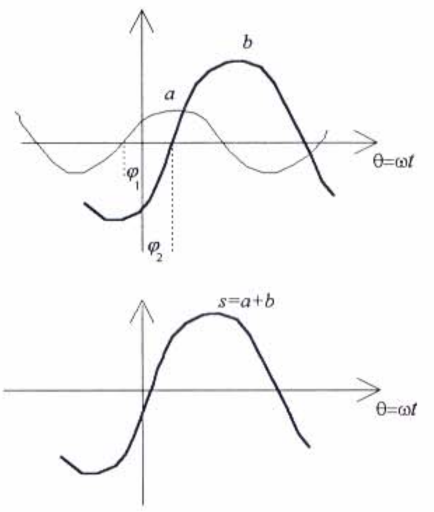

Fig. 6

3. Le sinusoidi come vettori

Supponiamo di rappresentare i vettori in un riferimento cartesiano Oxy; consideriamo un **vettore** $\overline{V}$ **rotante** con velocità angolare ω costante, modulo V e fase iniziale φ; se all'istante $t = 0$ ne proiettiamo l'estremo sull'asse delle y, otteniamo su di esso un segmento di lunghezza $V\,\text{sen}(\varphi)$; su un piano (t,y) otteniamo il punto $(0, V\,\text{sen}(\varphi))$. Dopo un tempo t_1 il vettore ruota di un angolo di fase pari a ωt_1; la sua fase complessiva è pari a $\omega t_1 + \varphi$ e la sua proiezione sull'asse y è $V\,\text{sen}(\omega t_1 + \varphi)$; il corrispondente punto nel piano (t,y) è $(t_1, V\,\text{sen}(\omega t_1 + \varphi))$. Tali punti hanno un andamento sinusoidale nel tempo, con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Dopo un tempo $t_1 = \dfrac{\vartheta_1}{\omega}$ il vettore ha ruotato di un angolo ϑ_1, per cui la sua fase è $(\vartheta_1 + \varphi)$; la sua proiezione sull'asse y è

$$V\,\mathrm{sen}(\omega t_1 + \varphi) = V\,\mathrm{sen}(\vartheta_1 + \varphi)$$

e l'ascissa corrispondente è $t_1 = \dfrac{\vartheta_1}{\omega}$ o $\vartheta_1 = \omega t_1$.

Quindi, il punto sul piano (ϑ, y) è $(\vartheta_1, V\,\mathrm{sen}(\vartheta_1 + \varphi))$.

L'ampiezza della sinusoide è uguale al modulo del vettore e la sua fase iniziale è uguale all'angolo, computato in senso antiorario, che il vettore forma con l'asse di riferimento x nell'istante zero; questi due elementi sono sufficienti ad identificare la sinusoide.

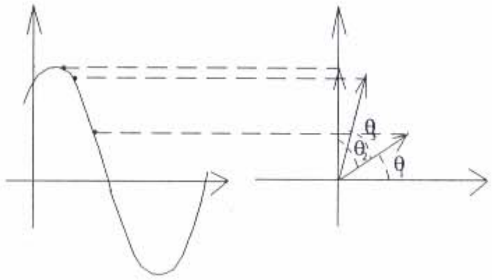

Fig 7

Ovviamente, ad una sinusoide avente una certa ampiezza ed una certa fase possiamo far corrispondere un vettore con modulo pari all'ampiezza della sinusoide e ruotato di un angolo φ rispetto all'asse delle x.

È ovvio che solo i vettori rotanti rappresentano delle sinusoidi, i non rotanti sono gli **operatori vettoriali**.

Nella rappresentazione delle sinusoidi abbiamo utilizzato sull'asse di riferimento $\vartheta = \omega t$ in modo tale da poter leggere direttamente il valore di φ. Se considerassimo come asse di riferimento quello dei tempi dovremmo di volta in volta calcolare i prodotti

$$\vartheta_1 = \omega t_1, \quad \vartheta_2 = \omega t_2, \quad \vartheta_3 = \omega t_3.$$

Considerare al posto della sinusoide la sua rappresentazione vettoriale ci facilita i calcoli da eseguire; sia $\overline{V}$ il vettore che rappresenta la sinusoide (1.1)

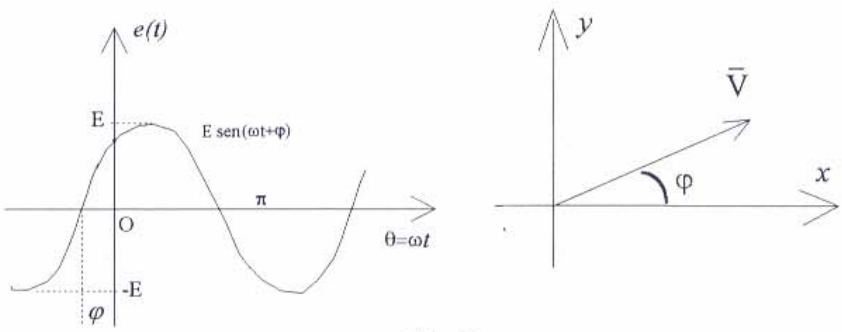

Fig. 8

- **Moltiplicazione di uno scalare S per il vettore $\overline{V}$ che rappresenta la sinusoide**. Il prodotto di uno scalare per un vettore dà origine ad un vettore di modulo SV e fase uguale a quella di $\overline{V}$.

- **Divisione del vettore $\overline{V}$ per uno scalare**. Il rapporto fornisce un vettore di modulo pari al rapporto dei moduli e fase pari alla differenza delle fasi.

- **Moltiplicazione di un operatore vettoriale $\overline{S}$ per il vettore sinusoide $\overline{V}$**. Il modulo del loro prodotto è dato dal prodotto dei moduli e la fase è uguale alla somma delle fasi.

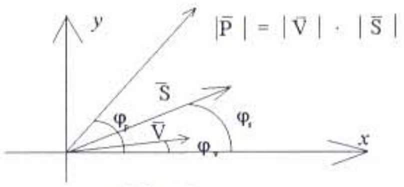

Fig. 9

- **Divisione di un operatore vettoriale $\overline{S}$ per il vettore sinusoide $\overline{V}$**.

- **Somma fra due sinusoidi utilizzando i rispettivi vettori**

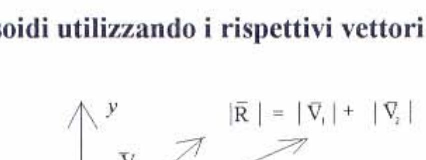

Fig. 10

Nella costruzione geometrica che dà origine alla sinusoide, si considera un punto P sulla circonferenza di raggio unitario $\overline{OP}$.

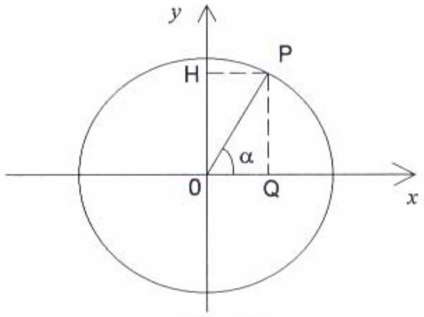

Fig. 11

Sia α l'angolo percorso in senso antiorario che il segmento OP forma con l'asse delle ascisse, sia OH la proiezione di OP sull'asse delle y. Riportando, al variare di α, queste proiezioni su di un sistema di assi cartesiani otteniamo la sinusoide.

Il discorso è analogo se anziché considerare un punto che si muove (che descrive una circonferenza) si sostituisce ad esso un vettore OP, di modulo uguale ad 1, rotante con velocità angolare ω intorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per O.

4. Vettori e numeri complessi

Oltre che dal punto di vista grafico, i vettori possono essere trattati analiticamente utilizzando la corrispondenza con i numeri complessi. È noto che un numero complesso $z = a + jb$ individua il vettore del piano $\bar{z}(a,b)$ di componenti rispettivamente a e b, dove a è la parte reale, b la parte immaginaria e $j = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria che nel piano cartesiano rappresenta il versore dell'asse delle ordinate $\bar{j}(0,1)$ che individua (nella moltiplicazione tra numeri complessi) la rotazione di un angolo uguale a $\frac{\pi}{2}$ radianti.

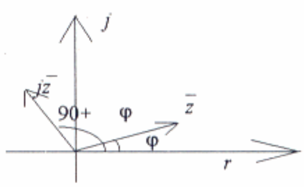

Fig. 12

Il piano dei numeri complessi è detto *Piano di Argand-Gauss*; in esso l'asse delle ascisse prende il nome di *retta dei numeri reali* e quello delle ordinate prende il nome di *retta dei numeri immaginari*.

Ad ogni numero complesso corrisponde, in tale piano, un punto avente per ascissa la propria parte reale e per ordinata il proprio coefficiente dell'immaginario. Quindi, a ciascun numero complesso $\bar{z} = a + jb$ si associa un vettore, indicato con il simbolo $\bar{z}$,che unisce l'origine al punto di coordinate a e b e che avrà modulo $z = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e fase $\varphi = \arg(\bar{z}) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

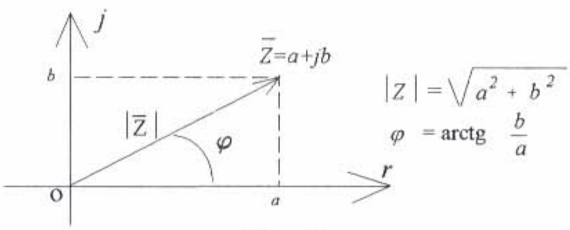

Fig. 13

Con le operazioni tra vettori si possono eseguire le operazioni di somma e differenza fra grandezze alternate.

Ad esempio, la somma di due correnti in un circuito elettrico in regime sinusoidale permanente si può ottenere nel modo seguente: si associa ad ognuna delle due sinusoidi il vettore corrispondente, si ricava il risultante dei vettori e si associa ad esso la sinusoide corrispondente.

La rappresentazione vettoriale consente di evidenziare in maniera chiara e immediata (cioè senza tracciare i grafici) le relazioni esistenti tra le fasi di funzioni (segnali) sinusoidali.

Un esempio di ciò può essere costituito dal calcolo della differenza di fase esistente tra corrente e tensione di un condensatore.

BIBLIOGRAFIA

1. G. BOBBIO e S. SAMMARCO, *Elettrotecnica generale con esercitazioni di laboratorio e misure,* PETRINI, Torino, 1989.
2. G. MARTINELLI e R. SALERNO, *Fondamenti di elettrotecnica vol.I*, Edizioni Scientifiche Siderea, Roma, 1979.