Ratio Mathematica 11
(1996), 105 - 114

FUNZIONI IPERBOLICHE E CIRCOLARI: UN CONFRONTO

Vincenzo Di Marcello[*], Franco Eugeni[**], Giovanni Mataloni[***]

SUNTO - Nella presente nota si introduce la nozione di arco associato ad un settore iperbolico e si studiano le relazioni tra funzioni circolari ed iperboliche di argomenti associati.

1. INTRODUZIONE.

E' ben noto che l'analogia tra circolare e iperbolico nasce con il considerare un punto variabile sulla circonferenza standard ad un punto variabile nell'iperbole equilatera standard.

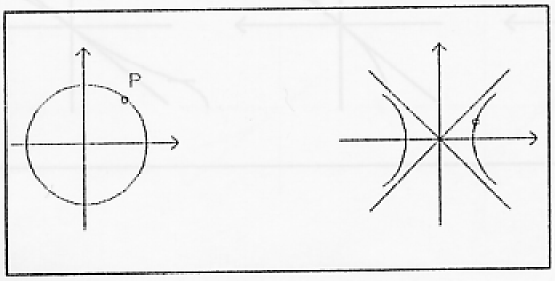

Fig. 1

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad\qquad x^2 - y^2 = 1$$

[*] Mathesis Teramo
[**] Università degli Studi Roma Tre
[***] Dip.[to] Scienze, Storia dell'Architettura e Restauro -"G. D'Annunzio" Chieti

essendo ϑ e t legate alle aree tratteggiate dei settori circolari ed iperbolici indicati in figura.
Le funzioni iperboliche e le loro derivate si riassumono nella tabella seguente:

$$y = cosh\,x \qquad y' = senh\,x$$

$$y = senh\,x \qquad y' = cosh\,x$$

$$y = tghx \qquad y' = \frac{1}{cosh^2 x} = 1 - tgh^2 x$$

e i grafici delle suddette si presentano con il seguente andamento:

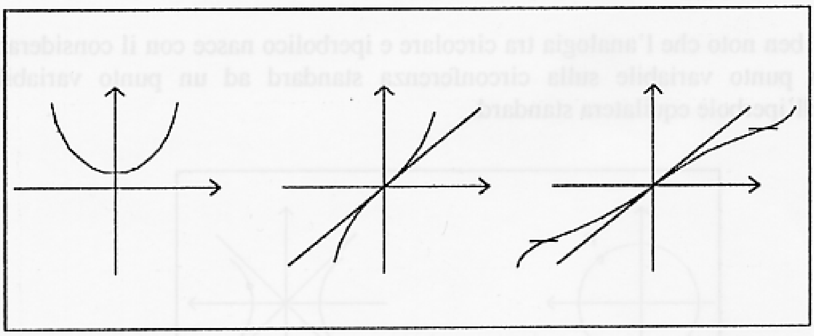

Fig. 2

$y = cosh\,x$ (catenaria) $\qquad y = senh\,x \qquad y = tgh\,x$

Le funzioni inverse sono chiaramente

$y = sett\, cosh\, x$ (y>0) $\qquad y = sett\, senh\, x \qquad y = sett\, tgh\, x$

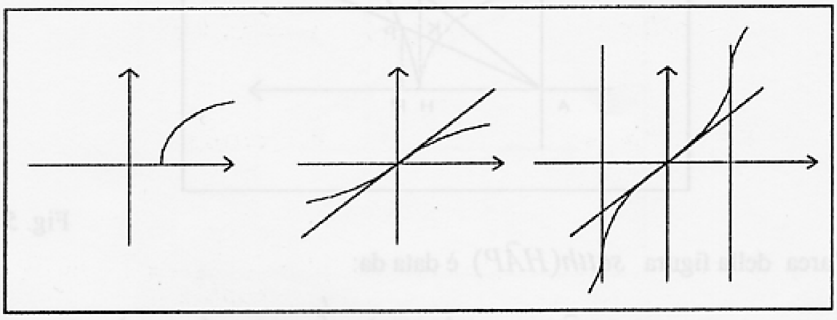

Fig. 3

Le relative derivate non sono difficili da esprimere, tali essendo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad y' = \frac{1}{1-x^2}$$

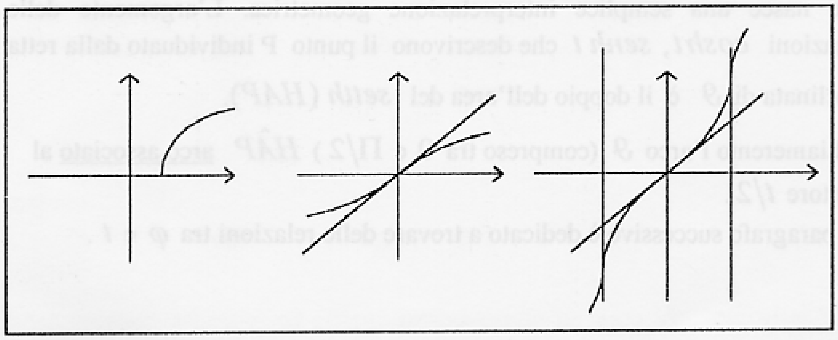

Fig. 4

Sia dato un settore iperbolico $setth(H\hat{A}P)$, e sia φ l'angolo $H\hat{A}P$ e $\Delta(APP')$ l'area del triangolo APP'

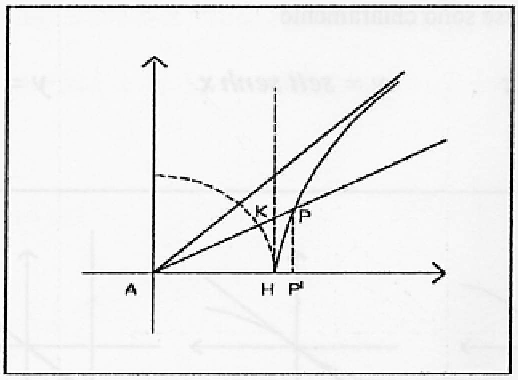

Fig. 5

L'area della figura $setth(H\hat{A}P)$ è data da:

$$\text{area } setth\ (H\hat{A}P) = \Delta(\mathrm{APP'}) - \int_0^t senh\,t\,\mathrm{d}(cosh\,t)$$

$$= \frac{1}{2} senh\,t\,cosh\,t - \left[\frac{1}{2} senh\,t\,cosh\,t - \frac{t}{2}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2} senh\,cosh\,t - \frac{1}{2} senh\,t\,cosh\,t + \frac{t}{2} = \frac{t}{2}$$

Ne nasce una semplice interpretazione geometrica. L'argomento delle funzioni $cosh\,t$, $senh\,t$ che descrivono il punto P individuato dalla retta inclinata di ϑ è il doppio dell'area del $setth\ (HAP)$.

Chiameremo l'arco ϑ (compreso tra 0 e $\Pi/2$) $H\hat{A}P$ arco associato al settore $t/2$.

Il paragrafo successivo è dedicato a trovare delle relazioni tra φ e t.

2. RELAZIONI TRA ARCO E SETTORE ASSOCIATI.

Un primo legame tra φ e $t/2$ è quello che si desume dal seguente ragionamento.

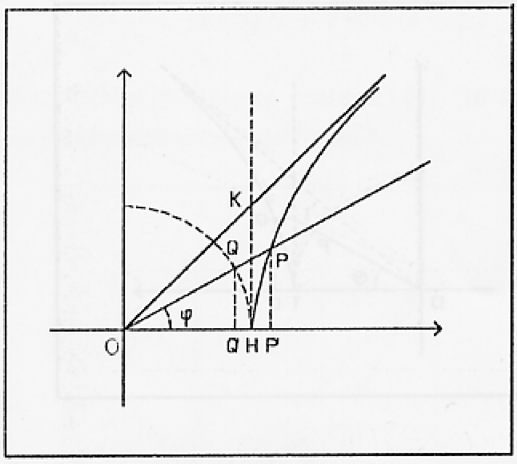

Fig. 6

Avendosi

$$Q = (\cos\varphi, sen\,\varphi) \qquad\qquad P = (\cosh t, senh\,t)$$

scaturisce una proporzione data dalla similitudine dei triangoli $OQ'Q$ e $OP'P$:

$$\frac{seh\,t}{sen\varphi} = \frac{\cosh t}{\cos\varphi}$$

ovvero:

$$tg\varphi = tgh\,t$$

Una seconda relazione si ottiene introducendo un arco ϑ che prende il nome di <u>amplitudine iperbolica</u> di t.

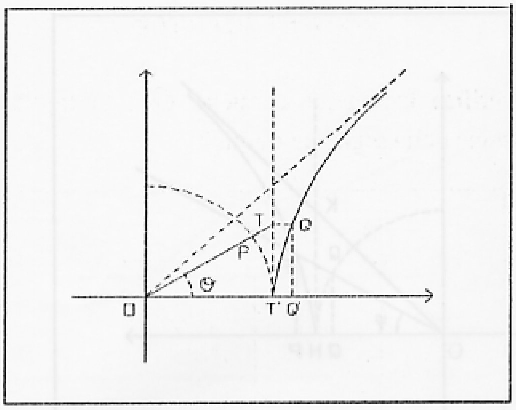

Fig. 7

Fissato un arco ϑ tra 0 e $\Pi/2$ si conduca la retta per O inclinata di ϑ fino al punto $P\ (cos\,\vartheta, sen\,\vartheta)$. Si prosegua la OP fino ad incontrare la retta tangente in $T'(1,0)$ nel punto $T(1,\ tg\vartheta)$. Da T si conduca la parallela all'asse delle x fino ad incontrare l'iperbole nel punto Q. Tale punto si determina dal sistema

$$\begin{cases} y = tg\vartheta \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$x = \sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+tg^2\vartheta} = \frac{1}{cos\,\vartheta}$$

e quindi:

$$Q\left(\frac{1}{cos\,\vartheta}, \frac{sen\,\vartheta}{cos\,\vartheta}\right)$$

La proiezione Q' sull'asse delle x ha coordinate $Q'\left(\frac{1}{cos\vartheta}, 0\right)$. La retta tangente in P ha equazione:

$$x\cos\vartheta + y\,sen\,\vartheta = 1$$

che come si verifica facilmente contiene Q'. In termini grafici quanto provato si riassume nella seguente figura 8:

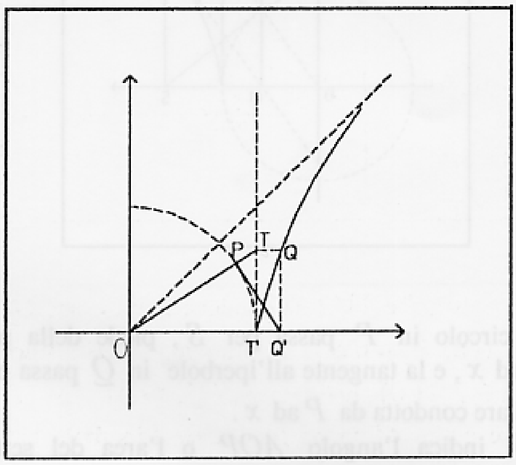

Fig. 8

La tangente all'iperbole in $Q(\cosh t, senh\,t)$ ha equazione:

$$x\cosh t - y\,senh\,t = 1$$

ed incontra l'asse x nel punto $M(\frac{1}{\cosh t},0)$ e l'asse y nel punto $M'(-\frac{1}{senh\,t},0)$.

Ma poichè avevamo provato che le coordinate di Q sono anche $Q=(\frac{1}{\cos\vartheta},tg\vartheta)$ svolgeremo ora una ulteriore serie di considerazioni basate sulle seguenti figure

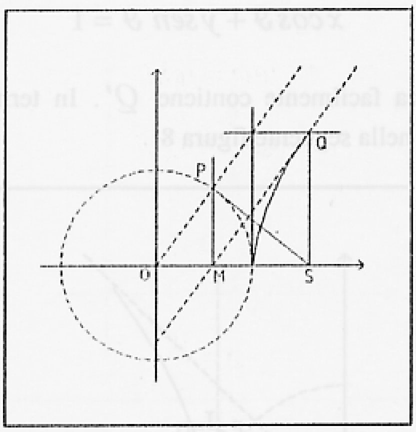

Fig. 9

La tangente al circolo in P passa per S, piede della perpendicolare condotta da Q ad x, e la tangente all'iperbole in Q passa per M, piede della perpendicolare condotta da P ad x.
Il parametro ϑ indica l'angolo AOP o l'area del settore circolare POP'; il parametro x l'area del settore iperbolico QOQ'. Si ha immediatamente:

$$ch\, t = sec\,\vartheta = OS$$
$$SQ = sh\; t = tg\,\vartheta = AT$$
$$AK = th\, t = sen\,\vartheta = MP$$
$$OM' = cosech\; t = cot\,\vartheta = BT'$$
$$sech\; t = cos\;\vartheta = OM$$
$$BK' = coth\, t = cosec\,\vartheta = OS'$$

Fra l'argomento e l'amplitudine esiste la relazione

$$t = \lg tg\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\Pi}{2}\right)$$

alla quale si può dare la forma semplicissima

$$th\frac{t}{2} = tg\frac{\vartheta}{2}$$

segue allora che

$$tg\varphi = tght$$

$$tg\frac{\vartheta}{2} = tght$$

segue

$$\varphi = \frac{\vartheta}{2}$$

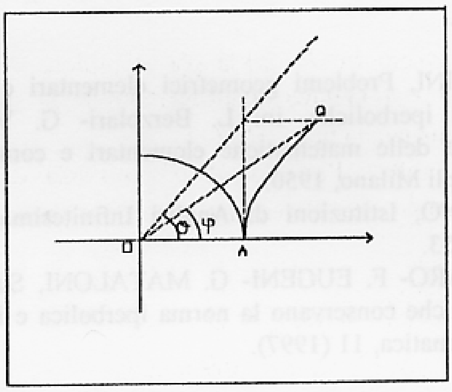

Fig. 11

In particolare si ha:

$$cos\vartheta = \frac{cosh\ t}{\left(cosh^2\ t + senh^2\ t\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$sen\vartheta = \frac{senh\ t}{\left(\cosh^2\ t + \operatorname{senh}^2\ t\right)^{\frac{1}{2}}}$$

che sono le formule esprimenti il legame tra seno e coseno di un arco e del mezzo settore iperbolico associato.

$$cosh\ t = \frac{cos\vartheta}{\left(cos^2\vartheta - sen^2\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$senh\,t = \frac{sen\vartheta}{\left(cos^2\vartheta - sen^2\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

BIBLIOGRAFIA

1. A. AGOSTINI, Problemi geometrici elementari e classici, funzioni circolari ed iperboliche, in: L. Berzolari- G. Vivanti- D. Gigli- Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, Vol. II, Parte I, Hoepli Milano, 1950.
2. G. CIMMINO, Istituzioni di Analisi Infinitesimale Vol. I, Patron Bologna, 1953.
3. F. CASOLARO- F. EUGENI- G. MATALONI, Sulle trasformazioni geometriche che conservano la norma iperbolica e i settori iperbolici, Ratio Mathematica, 11 (1997).