Ratio Mathematica 11
(1996), 75 - 79

UN ESEMPIO DI IPERGRUPPO OTTENUTO MEDIANTE COMBINAZIONI LINEARI

Emma Gelsomini

SUNTO - La presente nota è il riassunto di una breve conversazione tenuta nell'ambito di un seminario della Facoltà di Architettura del Politecnico di Milano, che tendeva a fornire esempi di *ipergruppi*, mediante strutture elementari, e note agli studenti del biennio universitario. È questa la ragione per cui invece di presentare l'esempio nella sua forma più generale, come indicato nel paragrafo quattro, ho preferito presentarlo mediante l'utilizzo dello *spazio vettoriale* delle funzioni di una *variabile reale*.

ABSTRACT - This paper is the summary of a conversation that took place at the Politecnico of Milan during a seminar in which we wanted to give examples of hypergroups by means of elementary structures. This is the reason why the example of *hypergroup* is presented by means of a *vectorial space* of a *real variable*, instead of utilizing a more general form suggested in h four.

1. È ben nota la nozione di *gruppo*. Ricordiamo, con LOMBARDO RADICE [6], che un gruppo è una coppia $(G,\bullet)$, dove G è un insieme e $\bullet$ è una operazione binaria interna soddisfacente i seguenti assiomi.

Lavoro svolto nell'ambito del gruppo di ricerca MPI 60% del Politecnico di Milano

(a). È associativa.

(b). Le equazioni di primo grado $a \bullet x = b$ e $y \bullet a = b$ hanno una ed una sola soluzione in G.

Si chiamano elemento neutro u di $(G,\bullet)$ ed elemento inverso a^{-1} di $a \in G$, rispettivamente, gli elementi di G soddisfacenti alle seguenti relazioni, $u \bullet a = a \bullet u = a$ e $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = u$. Si dimostra, attraverso gli assiomi (a) e (b), che esiste *l'elemento neutro di* $(G,\bullet)$ *e l'inverso di ogni elemento di* G.

1.1. Si chiama ora *ipergruppo* (CORSINI [2],[3]) la coppia $(G,\circ)$ dove G è un insieme non vuoto e

1.1.1. $$\circ : G \times G \to P'(G)$$

è una *applicazione* di $G \times G$ nell'insieme $P'(G)$ delle parti non vuote di G.

1.1.2. L'operazione $\circ$ è *associativa:*

$$\forall x, y, z \in G \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z,$$

dove

$$(x \circ y) \circ z = \bigcup_{a \in x \circ y} a \circ z$$

e

$$x \circ (y \circ z) = \bigcup_{b \in y \circ z} x \circ b.$$

1.1.3. Per l'operazione $\circ$ vale la seguente proprietà, detta *proprietà di riproducibilità:*

$$\forall a, b \in G, \quad \exists x \in G : b \in a \circ x \quad \exists y \in G : b \in y \circ a.$$

1.2.E' ben noto che sussiste il seguente

TEOREMA. Sia $(H,\circ)$ *un ipergruppo. Si supponga che ogni iperprodotto sia un singleton. Allora l'ipergruppo è un gruppo.*

Tale teorema, di facile dimostrazione, giustifica il nome di ipergruppo dato ad una iperstruttura che soddisfi gli assiomi 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3.

2. Sia ora X un insieme numerico non vuoto. Sia A l'insieme delle *applicazioni* definite in X. Si chiami

$$\sigma: A \times A \to P'(A) \tag{1}$$

l'operazione che associa ad ogni coppia ordinata $(f_1, f_2) \in A \times A$ l'elemento di $P'(A)$, insieme delle parti non vuote di A, secondo la legge

$$\forall f_1, f_2 \in A, \quad f_1 \sigma f_2 = \{\lambda f_1 + \mu f_2\}_{\lambda, \mu \in \Re}. \tag{2}$$

Si vuole verificare che la coppia (A, σ) è un ipergruppo.

3. Iniziamo con il notare che la (2) fornisce una applicazione $\sigma: A \times A \to P'(A)$, (cfr.(1)), come richiesto da 1.1.1.

3.1. Proviamo ora che $\forall f, g, h \in A$ risulta

$$(f \sigma g) \sigma h = f \sigma (g \sigma h), \tag{3}$$

come richiesto da 1.1.2. Si ha infatti

$$f \circ g = \{\lambda f + \mu g\}_{\lambda, \mu \in \Re}$$

e, quindi,

$$\begin{aligned}(f\sigma g)\sigma h &= \{\rho(\lambda f + \mu g) + \gamma h\}_{\rho, \lambda, \mu, \gamma \in \Re} = \\ &= \{\bar{\lambda} f + \bar{\mu} g + \gamma h\}_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \gamma \in \Re}\end{aligned} \tag{4}$$

essendo $\bar{\lambda} = \rho\lambda$ e $\bar{\mu} = \rho\mu$. Non dipendendo l'ultimo membro della (4) dall'ordine in cui le funzioni sono considerate, la (3) è provata.

3.2. Proviamo ora la proprietà di riproducibilità (cfr. 1.1.3), tenendo conto che l'iperoperazione (1) introdotta è chiaramente commutativa. Proviamo che

$$\forall f, h \in A, \exists x \in A: h \in f \sigma x, \tag{5}$$

come richiesto da 1.1.3. Proviamo cioè che, date comunque $f, g,$ esistono $\lambda, \mu \in \Re$, $x \in A$, tali che

$$h \in \{\lambda f + \mu x\}. \tag{6}$$

La relazione (6),e quindi la (5), sono manifestamente verificate se si prende $\lambda = 0, x = kh$ (con $k \in \Re / \{0\}$), $\mu = 1 / k$.

3.3. La struttura (A, σ) è dunque un ipergruppo *commutativo*.

4. L'esempio illustrato è certamente semplice da presentare considerando solamente la nozione di funzione. Chiaramente, e con immediati e semplici cambi di notazione, l'esempio su esposto si generalizza al caso in cui l'insieme A sia il sostegno di uno *spazio vettoriale* di *dimensione* anche *infinita,* su un arbitrario *campo,* anche *finito*, potendosi in tale struttura usare la nozione di combinazione lineare.

BIBLIOGRAFIA

1. L. BERARDI, F. EUGENI, S. INNAMORATI, *Generalized designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic cryptography.* Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, (1990), World Scientific, 55-65.
2. P. CORSINI, *Recenti risultati in teoria degli ipergruppi.* B.U.M.I. 2-A, (1983), 135-138.
3. P. CORSINI, *Prolegomena of hypergroup theory.* Ed. Aviani, 1992.
4. E. GELSOMINI, *Un ipergruppo associato all'insieme delle matrici quadrate di ordine n non singolari.* Ratio Mathematica 10 (1996), 99-103.
5. M. GIONFRIDDO, *Hypergroups associated with multihomomorphisms between generalized graphs.* Atti Convegno su "Sistemi binari e loro applicazioni", Taormina (1978), 161-174.
6. L. LOMBARDO RADICE. *Istituzioni di algebra astratta.* Feltrinelli. Milano, 1980.
7. F. MERCANTI, L. CERRITELLI, *Sul concetto di lateralizzazione nelle iperstrutture,* su questo stesso volume.