Матняк С.В.
м. Хмельницький, Україна

РОЗВ'ЯЗОК БІНАРНОЇ ПРОБЛЕМИ ГОЛЬДБАХА

УДК 511.3

Методом тригонометричних сум розв'язана бінарна проблема Гольдбаха. Знайдена асимптотична формула розподілу парних чисел, утворених сумою двох простих непарних чисел, для кожного парного числа із множини натуральних чисел *N*.

Ключові слова: бінарна проблема Гольдбаха, асимптотична формула, прості непарні числа, парні числа, метод тригонометричних сум.

Вступ

В роботі розглядається відома нерозв'язана проблема Гольдбаха. Ця проблема являє собою гіпотезу, відповідно до якої будь-яке парне число, не менше шести, представляється сумою двох простих непарних чисел – бінарна проблема Гольдбаха.Гольдбах прийшов до цієї гіпотези експериментально. В теперішній час ЕОМ дає можливість експериментально перевірити цю гіпотезу. Але до цих пір не знайдено ні одного протирічного прикладу до гіпотези Гольдбаха. Великий прогрес в її доведені були досягнуті І.М. Виноградовим і Л.Г. Шпірельманом. В 1937 році Виноградаву вдалося показати, що будь-яке достатньо велике непарне число є сумою трьох простих непарних чисел. На основі роботи асимптотична формула розподілу сум двох простих непарних чисел. Знайдена асимптотична формула дає розв'язок бінарної проблеми Гольбаха.

Постановка задачі. Знайти асимптотичну формулу розподілу парних чисел більших 6, утворених із сум двох простих непарних чисел.

Розв'язання

У поданому тут доведені використовується метод І.М. Виноградова, запропонований для доведення тернарної проблеми Гольдбаха.

Означення та теореми для нагадування.

Означення 1. Парним числом називається натуральне число, якщо серед його простих множників є число 2.

Означення 2. Непарним числом називається натуральне число, якщо серед його простих множників числа 2 немає.

Означення 3 [1, ст. 119]. Ціле число р називається простим коли воно відмінне від 0 і ± 1 і має дільники тільки ± 1 і $\pm p$ Ціле число а, відмінне від 0 і ± 1 і має крім ± 1 і $\pm a$ ще інші дільники, називається складеним.

Теорема 1 [1, ст. 120]. Будь-яке ціле додатнє число, відмінне від 1, можна представити у вигляді добутку додатніх простих чисел. Це представлення з точністю до порядку множників єдине.

Теорема 2 [1, ст. 120]. Множина додатніх простих чисел нескінчена.

Теорема 3 [1, ст. 120] (Закон Адамара і Валлє-Пуссена). Відношення $\pi(x) : \dfrac{x}{\ln x}$ прямує до 1 при необмеженому зростанні x, тобто:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\cdot \ln x}{x} = 1,$$

де функція $\pi(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ – визначає кількість простих непарних чисел в множині натуральних чисел N при $x \to \infty$.

Наслідок (теорема Ейлера) [1, ст. 408]. Кожне додатнє просте непарне число a можна подати у вигляді:

$$a = 2\cdot q + 1,$$

де q – ціле додатнє число із множини натуральних чисел N.

Теорема 4. Сума будь-яких двох простих непарних чисел є парне число:

$$N = p_1 + p_2,$$

де N – парне число;

p_1, p_2 – прості непарні числа.

Доведення. Виходячи з наслідку теореми Ейлера можна кожне непарне просте число p_1 і p_2 подати у вигляді:

$$p_1 = b_1 \cdot q_1 + r_1 = 2q_1 + 1, \quad p_2 = b_2 \cdot q_2 + r_2 = 2 \cdot q_2 + 1.$$

де q_1 і q_2 – цілі додатні числа з множини натуральних чисел N.

Тоді

$$N = p_1 + p_2 = b_1 \cdot q_1 + r_1 + b_2 \cdot q_2 + r_2 = 2 \cdot q_1 + 1 + 2 \cdot q_2 + 1 =$$
$$= 4 \cdot (q_1 + q_2) + 2 = 2 \cdot (2 \cdot (q_1 + q_2) + 1).$$

Розкладаємо число N на прості множники:

$$N = 2 \cdot m = 2 \cdot (2 \cdot (q_1 + q_2) + 1) = 2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s},$$

де числа $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – різні додатні прості числа, а $\alpha_i > 0$ для $i = 1,2,3,\ldots,s$. Тому число N є парним, бо має серед своїх простих множників число 2.

Лема 1. (Пейдж). Нехай для заданого ε_0 задані довільно великі c_1 і c. Тоді число $\pi(N, q, l)$ простих чисел, не перевищує N, які містяться в арифметичній прогресії $q \cdot x + l$, $0 < q \le r^c$, $0 < q < r^c$, $(q, l) = 1$, $0 < l < q$, $r = \ln N$, виражається формулою:

$$\pi(N, q, l) = \frac{1}{q} \int_2^N \frac{dx}{\ln x} + H, \qquad q_1 = \varphi(q),$$

де для всіх q, крім ряду відмінних, кратних будь-якому $q = q_0$, які задовольняють вимогу:

$$q \ge r^{2-\varepsilon_0},$$

маємо нерівність $H << \dfrac{N \cdot r^{-c}}{q_1 \cdot r}$.

Доведення. Ця лема є наслідком відомої теореми англійського математика Пейджа [2, ст. 95].

Лема 2. Нехай $N \ge 2$, $r = \ln N$, z –дійсне:

$$I(z) = 2\int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{r} dz, \quad J(z) = \int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{\ln x} dx,$$

тоді маємо:

$$I(z) << Z, \qquad J(z) << Z,$$
$$Z = \begin{cases} N \cdot r^{-1}, \text{коли} |Z| \le N^{-1}; \\ |z|^{-1} \cdot r^{-1}, \text{коли} N^{-1} < |z| \le N^{-0,5}. \end{cases}$$

Доведення. Ця лема доведена І.М. Виноградовим [2, ст. 95].

Лема 3. Нехай $\tau = N \cdot r^{-c}$, де $c \ge 2$, і нехай

$$R = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} (J(z))^2 \cdot e^{-2\pi izN} dz,$$

де $J(z)$ має значення, вказане в лемі 2. Тоді маємо:

$$R = \frac{N}{r^2} + O\left(\frac{N}{r^3}\right).$$

Доведення. Застосуємо позначення леми 2. Інтеграл R порівняємо з інтегралом:

$$I(z) = \int_{-0,5}^{0,5} (I(z))^2 \cdot e^{-2\pi iz} dz.$$

Знаходимо:

$$R-R_0=\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}\left((J(z))^2-(I(z))^2\right)\cdot e^{-2\pi izN}dz+\left(\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}(I(z))^2\cdot e^{-2\pi izN}dz-R_0\right).$$

Тут перший доданок правої частини, відповідно до леми 2 і нерівності:

$$\left|J(z)-I(z)\right|<\int_2^N\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{r}\right)\cdot dx<<\frac{N}{r^2},$$

тому маємо:

$$<<\int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}}Z\cdot\frac{N}{r^2}dx<<\int_0^{N^{-1}}\frac{N^2}{r^3}dz+\int_{N^{-1}}^{\tau^{-1}}\frac{N}{r^3}dz<<\frac{N}{r^3}.$$

Другий доданок правої частини, відповідно до леми 2 буде:

$$<<\int_{t^{-1}}^{0,5}Z^2dz<<\int_{t^{-1}}^{0,5}\frac{dz}{z^2\cdot r^2}<<\frac{N}{r^3}.$$

Тому, $R-R_0<<\frac{N}{r^3}$. Вважаючи:

$$R'=\int_{-0,5}^{0,5}(S(z))^2\cdot e^{-2\pi izN}dz,\qquad S(z)=\sum_{x=2}^{N}\frac{e^{2\pi izx}}{r},$$

відповідно до леми 2 [1, ст. 41], будемо мати $I(z)-S(z)<<\frac{1}{r}$, $Z>>\frac{1}{r}$. Тоді:

$$R_0-R'<<\int_0^{0,5}Z\cdot\frac{1}{r}dz=\int_0^{N^{-1}}\frac{N^2}{r^2}dz+\int_{N^{-1}}^{0,5}\frac{1}{r^2\cdot z}dz\approx\frac{N}{r^2}.$$

Отже, $R-R'<<\frac{N}{r^2}$. Вираз $r^2\cdot R'$ виражає число представлень числа N у вигляді:

$$N=x_1+x_2$$

з цілими x_1, x_2, які більші числа 2. Кількість комбінацій по два числа з $N-2$ буде дорівнювати:

$$\underset{N-2}{\overset{2}{C}}=\frac{(N-2)\cdot(N-3)}{2}=\frac{N^2-5N+6}{2}.$$

Тому кожне число ряду натуральних чисел N можна представити:

$$r^2\cdot R'=\frac{\underset{N-2}{\overset{2}{C}}}{N}=\frac{N^2-5N+6}{N}=\frac{N}{2}+O(1),$$

раз, а кожне парне число ряду натуральних чисел N можна представити у вигляді:

$$r^2\cdot R'=\frac{2\cdot\underset{N-2}{\overset{2}{C}}}{N}=\frac{2\cdot\left(N^2-5N+6\right)}{2N}=N+O(1),$$

раз. Звідки і переконуємося в справедливості леми.

Теорема 5. Число $I(N)$ представлень парного додатного числа N у вигляді суми:

$$N=p_1+p_2$$

простими непарними числами p_1 і p_2 виражається формулою:

$$I(N)=\frac{N}{r^2}\cdot S(N)+O\left(\frac{N}{r^{3-\varepsilon}}\right),$$

де

$$S(N)=3\cdot \mathit{\Pi}_{(p,N)=1}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\cdot \mathit{\Pi}''_{p/N}\left(1-\frac{2}{p^2+1}\right),$$

причому $\mathit{\Pi}''_{p/N}$ поширюється на всі прості числа, які ділять N, а $\underset{(p,N)=1}{\mathit{\Pi}}$ – на прості дільники, які не ділять числа N і $p<N$.

При цьому маємо $S(N)>1{,}0$.

Наслідок (бінарна проблема Гольдбаха). Існує c_0 з умовою що будь-яке парне число N не менше ніж c_0, є сумою двох простих непарних чисел.

Доведення. Покладаючи $\tau=N\cdot r^{-7}$, маємо:

$$I(N)=\int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} S_\alpha^2\cdot e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha,\ S_\alpha=\sum_{2<p\le N}e^{2\pi i\alpha p},$$

інтервал інтегрування інтегралу $I(N)$ розіб'ємо на інтервали першого і другого класів. Інтервали першого класу ми назвемо інтервали, які включають всі значення α виду:

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\ \ (a,q)=1,\ -\tau^{-1}<z<\tau^{-1},\ 0<q<r^2.$$

Очевидно, (c_0 достатньо велике), інтервали першого класу один на одного не налягають. Інтервали другого класу називаються інтервали, які залишилися після виділення інтервалів першого класу. Будь-яке α, яке належить інтервалу другого класу можна представити у вигляді:

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\ (a,q)=1,\ -\frac{1}{q\tau^{-1}}\le z\le\frac{1}{q\tau^{-1}},\ r^2<q\le\tau.$$

Відповідно до вказаного розподілу інтервалів інтегрування інтеграл $I(N)$ розбивається на два доданки:

$$I(N)=I_1(N)+I_2(N).$$

1. Оцінка $I_2(N)$. Відповідно до теореми 1 розділу 4 [2, ст. 63] при $q\ge r^7$ маємо:

$$S_\alpha \ll N\cdot r\cdot \ln r\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{qr}{N}}+r\cdot e^{-0,5\sqrt{r}}\right)\ll\frac{N}{r^{2,5-\varepsilon_1}}.$$

А відповідно до теореми 2 розділу 4 [2, ст. 66] при $r^2<q\le r^7$ справедливим є співвідношення:

$$S_\alpha\ll N\cdot r^{-2,5+\varepsilon_1},\ \ A=\frac{N}{[r]^{12}}.$$

Тому

$$I_2(N)\ll N\cdot r^{-2,5+\varepsilon_1}\cdot\int_0^1\left(\sum_{2<p'\le N}\ \sum_{2<p<N}e^{2\pi i\alpha(p'-p)}\right)^{\frac{1}{2}}d\alpha\le\frac{N}{r^{3-\varepsilon_1}}.$$

2. Інтервали першого класу, що відповідають значенню q, яке не є відмінним. Нехай $I_{a,q}$ – частина інтегралу $I_1(N)$, що відповідає інтервалу першого класу, який включає дріб $\frac{a}{q}$ з значенням q, і не є відмінним. Взявши будь-яке $\alpha=\frac{a}{q}+z$, цього інтервалу, суму S_α розіб'ємо на $\frac{1}{[r]^{12}}$ доданки виду:

$$S_{\alpha,N_1}=\sum_{N_1-A<p\le N_1}e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p},\ A=\frac{N}{[r]^{12}}.$$

Для доданків суми S_{α,N_1} маємо $|z\cdot N_1 - z\cdot p| \le z\cdot A$. Число цих доданків $<< A\cdot r^{-1}$. Тому:

$$S_{\alpha,N_1} - e^{2\pi i z N_1}\sum_{N_1-A<p\le N_1} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p} << z\cdot A^2\cdot r^{-1} << \frac{A}{r^6},$$

але (лема 1 [2, ст. 65] c = 17) при заданому l з умовою $0\le l<q$, $(l,q)=1$, число простих чисел виду $q\cdot x+l$, яка лежить в інтервалі $N_1 - A < p \le N_1$ виражається формулою:

$$\frac{1}{q_1}\int_{N_1-A}^{N_1}\frac{dx}{\ln x} + O\left(\frac{N\cdot r^{-17}}{q_1 r}\right).$$

Тому

$$S_{\alpha,N_1} = \sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l}\frac{1}{q_1}\int_{N_1-A}^{N_1}\frac{e^{2\pi i N_1}dx}{\ln x} + O\left(\frac{A}{r^6}\right).$$

Далі знаходимо (позначення леми 2):

$$\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l} = \mu(q),\quad |z\cdot N_1 - z\cdot p| \le z\cdot A,\quad \int_{N_1-A}^{N_1}\frac{zAdx}{\ln x} << \frac{A}{r^6},$$

$$S_{\alpha,N_1} = \frac{\mu(q)}{q_1}\int_{N_1-A}^{N_1}\frac{e^{2\pi i z x}dx}{\ln x} + O\left(\frac{A}{r^6}\right),$$

$$S_\alpha = \frac{\mu(q)}{q_1}J(z) + O\left(\frac{A}{r^6}\right),$$

$$\frac{J(z)}{q_1} << \frac{z}{q_1},\quad S_\alpha^2 - \frac{\mu(q)}{q_1}(J(z))^2 << \frac{z}{q_1}Nr^{-6} + N^2\cdot r^{-12}.$$

Позначимо $\tau_1 = \frac{N}{r^2}$ і оскільки інтервал $\left(-\tau_1^{-1},\tau_1^{-1}\right)$ входить в інтервал $\left(-\tau^1,\tau^1\right)$,то $-\tau_1^{-1} < z < \tau_1^{-1}$ і тоді:

$$I_{\alpha,q} - \int_{-\tau_1^{-1}}^{\tau_1^{-1}}\frac{\mu(q)}{q_1^2}(J(z))^2\cdot e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)N}dz << \int_0^{\tau_1^{-1}}\left(\frac{Z}{q_1}Nr^{-6} + \frac{N^2}{q_1}r^{-8}\right)dz <<$$

$$<< \frac{z}{q_1}\cdot N\cdot r^{-6}\frac{r^2}{N} + \frac{N^2}{q_1}\cdot r^{-8}\cdot\frac{r^2}{N} << \frac{N}{r^5\cdot q_1^1}.$$

Заставляємо a пробігати приведену систему лишків по модулю q, звідки одержимо:

$$\sum_a I_{a,q} = G(q)\cdot R + O\left(N\cdot r^{-3}\cdot q_1^{-1}\right),$$

$$G(q) = \frac{\mu(q)}{q_1^2}\sum_a e^{2\pi i\frac{a}{q}N},$$

відповідно до леми 3 і нерівності $G(q) << q_1^{-1}$, запишемо:

$$\sum_a I_{a,q} = \frac{N}{r^2}G(q) + O\left(\frac{N}{r^3\cdot q_1}\right).$$

3. Основні інтервали , які відповідають відмінним значенням q. Нехай q належить до числа відмінних. Тоді $q = q_0\cdot k$, де $k-$ ціле з умовою $0 < k \le r^{1+\varepsilon_0}$ (оскільки $q\le r^2$ і $q_0 \ge r^{1-\varepsilon_0}$).

Покладаючи:

$$\alpha = \frac{a}{q} + z,\quad -\tau\le z\le\tau,\quad \delta = |z|\cdot N,$$

$$S(q,\delta) = N \cdot r^{-1+\varepsilon} \cdot q^{-0,5}\text{, коли } \delta \le 1,$$

$$S(q,\delta) = N \cdot r^{-1+\varepsilon} \cdot q^{-0,5} \cdot \delta^{0,5}\text{, коли } \delta \ge 1,$$

відповідно до теореми 2 розділу 4 [2], будемо мати $S_a << S(q,\delta)$. Тому одержимо:

$$I_{a.q} << \int_0^{\tau^{-1}} \left(S(q,\delta)^2\right) dz << \frac{1}{N} \cdot \int_0^1 \left(S(q,\delta)^2\right) d\delta << \frac{N}{r^{2-2\varepsilon} \cdot kq_0}.$$

Заставляючи a пробігати приведену систему лишок по модулю q, одержимо:

$$I_{a,q} << \frac{N}{r^{2-2\varepsilon} \cdot q_0}.$$

або, оскільки порядок першого члену нижче порядку другого, то:

$$\sum_a I_{a,q} = \frac{N}{r^2} G(q) + O\left(\frac{N}{r^{3-\varepsilon_r}}\right).$$

4. Попередні формули для $I(N)$. Відповідно до обчислень (1, 2, 3) знаходимо:

$$I_1(N) - \sum_{q \le r^2} \frac{N}{r^2} \cdot G(q) << \sum_{q \le r^2} \frac{N}{r^3 q_1} + \sum_{л \le \kappa^{1+\varepsilon}} \frac{N}{q_0^1 \cdot k^1 \cdot r^{3-2\varepsilon}} << \frac{N \cdot r^{\varepsilon_1}}{r^3},$$

$$\sum_{q > r^2} \frac{N}{r^2} \cdot G(q) << \sum_{q > r^2} \frac{N}{r^2} \cdot q_1^{-2} << \frac{N}{r^3},$$

$$I(N) = \frac{N}{r^2} \cdot S(N) + O\left(\frac{N}{r^{3-\varepsilon}}\right),$$

$$S(N) = \sum_{q=1}^{\infty} G(q). \tag{4.1}$$

5. Дослідження $S(N)$. Очевидно, $G(q)$ може бути відмінним від нуля лише у випадку, коли канонічний розклад числа q має вигляд $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ (і у випадку, коли $q = 1$).

При цьому буде справедлива також тотожність:

$$G(p_1)\ldots G(p_k) = G(p_1 \ldots p_k).$$

Дійсно, у випадку $k = 2$ справедливість цієї тотожності випливає з рівності:

$$G(p_1) \cdot G(p_2) = \frac{1}{\varphi(p_1 p_2)} \sum_{0 < a_1 < p_1} \sum_{0 < a_1 < p_2} e^{2\pi i \frac{(a_1 p_2 + a_2 p_1)N}{p_1 p_2}},$$

де $a_1 p_2 + a_2 p_1$ пробігає приведену систему лишок по модулю $p_1 p_2$. Узагальнення цієї тотожності на випадок $k > 2$ тривіальне.

Розглянемо вираз (2.1), якщо N ділиться на q, то $\sum_a e^{2\pi i \frac{a}{q} N} = q$. Підставимо це значення в (2.1) і одержимо:

$$G(q) = \frac{\mu(q) \cdot q}{q^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^2} = \frac{\mu(q)}{q \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^2},$$

де $\varphi(q)$ є функція Ейлера, яка дорівнює $\varphi(q) = q \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ [4, ст. 30].

Підставимо значення $G(q)$ у вираз $S(N)=\sum_{p/N} G(q)$ і одержимо:

$$S(N)=\sum_{q/N} G(q)=\sum_{q/N}\frac{\mu(q)}{q\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^2}=\frac{p_1^2}{(p_1-1)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^2}{(p_k-1)^2}\cdot\sum_{q/N}\frac{\mu(q)}{q}=$$

$$=\frac{p_1^2}{(p_1-1)^2}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^2}{(p_k-1)^2}\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=\frac{p_1}{(p_1-1)}\cdot\frac{p_2}{(p_2-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k}{(p_k-1)}>1,$$

тому що

$\frac{p_1}{p_1-1}>1$, $\frac{p_2}{p_2-1}>1,\ldots,\frac{p_k}{p_k-1}>1$ і де $\sum_{q/N}\frac{\mu(q)}{q}=\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ [4, ст. 29].

Тоді відповідно до формули 3.14 [5, ст. 39]:

$$c_q(n)=\frac{\mu(q/(q,n))\cdot\varphi(q)}{\varphi(q/(q,n))}.$$

І 3.26 [5,ст.42] $S(N)$ буде дорівнювати:

$$S(N)=\mathop{\Pi'}_{(p,N)=1}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\mathop{\Pi}_{p/N}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

І при N парному $S(N)>>1$, а при N непарному $S(N)=0$.

Теорема доведена.

Література

1. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Высшая школа, 1979. – 559с.

2. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. – М.: УРСС. 2004. – 120 с.

3. Чандрасекхаран К.. Введение в аналитическую теоию чисел. М.: Мир, 1974. – 187 с.

4. Виноградов И. М. Основы теории чисел : учеб. пособие. – Изд. 11-е, стер. – СПб. : Лань, 2006. – 176 с.

5. Вон. Р. Метод Харди - Литтлвуда. – М.: Мир, 1985. – 182 с.

Поступила в редакцію 12.02.2014

Matnyak S.V. The solution of the binary problem of the Gol'dbachs.

The binary problem of Goldbach is solved by the method of the trigonometrical sums . The asymptotic formula of distribution of the even numbers formed by the sum of two simple uneven numbers is found for each even number from the set of natural numbers *N*.

Key words: binary problem of Goldbach, asymptotic formulae, simple uneven numbers, even numbers, method of the trigonometrical sums.

References

1. Kulikov L.Ja. Algebra i teorija chisel. Uchebnoe posobie dlja pedagogicheskih institutov. M.: Vysshaja shkola, 1979. 559s.
2. Vinogradov I.M. Osobye varianty metoda trigonometricheskih summ. M.: URSS. 2004. 120 s.
3. Chandrasekharan K. Vvedenie v analiticheskuju teoiju chisel. M.: Mir, 1974. 187 s.
4. Vinogradov I. M. Osnovy teorii chisel : ucheb. posobie. – Izd. 11-e, ster.– SPb. : Lan', 2006. 176 s.
5. Von R. Metod Hardi - Littlvuda. M.: Mir, 1985. 182 s.