

Диха О.В.Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: tribosensor@gmail.com**НАБЛИЖЕНА ЗНОСОКОНТАКТНА ЗАДАЧА
ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО ПІДШИПНИКА
З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ КОВЗАННЯ**

УДК 621.891

Запропонований наближений метод визначення розподілу контактної тиску в циліндричному підшипнику ковзання. В розв'язку додатково використовується експериментальна залежність розмірів дуги контакту в підшипнику від зовнішнього навантаження. Функціонал задачі отриманий на основі методу найменших квадратів як відхилення експериментальної функції від інтегральної умови рівноваги. Для отримання розрахункових значень кінетики зносу і контактних параметрів запропонована ітераційна процедура. Для більш точного розв'язку контактної задачі наведений алгоритм врахування дотичних напружень від тертя.

Ключові слова: підшипник ковзання, зносоконтактна задача, контактний тиск, діаграма вдавлювання, ітераційна процедура, тертя

Вступ. Основи варіаційно-експериментального способу вирішення зносоконтактних задач

Підшипники ковзання є одним з найважливіших структурних елементів машин та приладів та складають основну частку вузлів тертя. Відмови техніки, як правило, відбуваються внаслідок відмов підшипників (наряду з відмовами інших вузлів) і, таким чином, обмежують довговічність машини в цілому. Підшипники ковзання в залежності від виду мащення працюють в умовах граничного та рідинного тертя. При граничному змащуванні поверхні вала та підшипника торкаються повністю або на ділянках великої протяжності. Масляний шар, який розділяє поверхні, відсутній. Мастило знаходиться на металічних поверхнях лише у вигляді адсорбованої плівки. На практиці використовують методики розрахунку таких підшипників при переважному зношуванні підшипникової втулки (пряма пара), переважному зношуванні вала (обернена пара) та при одночасному зношуванні вала та підшипника (змішана пара). При створенні надійних вузлів тертя машин виникає необхідність в розрахунках контактних тисків і напружень в зоні контакту. Розрахунки - це чисельні реалізації математичних моделей, відповідних процесів і станів. Математичні моделі контактної взаємодії складаються з розрахункових схем, рівнянь стану і граничних умов.

Основою розрахункової оцінки зносу підшипників ковзання (ПК) є рішення зносоконтактних задач [1 - 5]. В даній роботі для визначення контактної тиску в підшипнику ковзання використаний варіаційно-експериментальний підхід.

Варіаційно - експериментальний підхід [1] характеризується введенням в функціонал головної експериментальної залежності. Мінімізуючи функціонал знаходимо рішення відповідне цього експерименту. Контактна задача теорії пружності зводиться до спільного вирішення системи з двох рівнянь: суцільності і рівноваги:

$$\int_a^b \sigma(s)k(x-s)ds = f(x),$$

$$Q = \iint \sigma(x, y)dxdy.$$

Традиційний шлях вирішення в основній частині полягає у вирішенні інтегрального рівняння суцільності, при використанні умови рівноваги як обмеження. При цьому функція $f(x)$ передбачається відомою з геометрії контактуючих тіл. Основа варіаційного підходу полягає в тому, щоб в якості основного рівняння для вирішення контактної задачі взяти не інтегральне рівняння суцільності, а умову рівноваги. По суті, це теж інтегральне рівняння, так як невідома функція знаходиться під знаком інтеграла. Але це інтегральне рівняння особливого типу.

Далі процедура полягає в перетворенні лівої частини рівняння рівноваги з константи в функцію. З цієї метою приймається, що з експерименту можна знайти функцію:

$$Q = cu_0^n,$$

де u_0 – максимальні нормальні переміщення в контакті.

Ця функція відображає весь процес навантаження, а не тільки одну точку процесу. Після підстановки:

$$cu_0^n = \iint \sigma(x, y)dxdy,$$

отримують умову рівноваги в будь-який момент навантаження.

В умовах, коли функція тисків $\sigma(x, y)$ невідома і може бути взята наближеною, вираз:

$$\varepsilon = cu_0^n - \iint \sigma(x, y) dx dy,$$

що відображає неузгодженість експерименту і шуканої функції.

В результаті отримують квадратичний функціонал контактної задачі:

$$F = \int_0^{u_0} \left[cu_0^n - \iint \sigma(x, y) dx dy \right]^2 du_0.$$

Традиційна постановка контактної задачі містить два рівняння-суцільності і рівноваги і дві невідомі функції тисків і розмірів площадки контакту $a(Q)$. При наявності експериментальної залежності типу, розміри площадки контакту відомі і умови суцільності задовольняються автоматично.

Процедура мінімізації функціоналу задачі виконується традиційно за допомогою методу Рітца. Шукана функція представляється у вигляді усіченого ряду, взятого з ряду, що володіє властивістю повноти. Для простоти шукану функцію можна представити у вигляді:

$$\sigma(x) = \sum c_i \varphi_i(x).$$

Після підстановки, маємо функцію багатьох змінних c_i :

$$F(c_i) = \int_0^{u_0} \left[cu_0^n - \int_0^{u_0} \sum c_i \varphi_i(x) dx \right]^2 dx.$$

З умови мінімуму функції:

$$\frac{\partial F(c_i)}{\partial c_j} = 0.$$

Розрахунково - експериментальний спосіб оцінки зносу підшипника ковзання

Розглянемо застосування варіаційно-експериментального методу [1] до розрахунку контактних параметрів циліндричного підшипника ковзання.

Розглядається контактна взаємодія суцільного циліндра радіуса R_1 (вала) і полого циліндра (корпусу опори ковзання), радіуса R_2 , що сполучаються з зазором $\Delta = R_2 - R_1$.

Стиснення силою Q призводить до пластичних деформацій в контакті, при цьому з експерименту відома залежність кута контакту $2\varphi_0$ від навантаження у вигляді степеневої функції:

$$Q = c\varphi_0^n, \quad (1)$$

де c , n – параметри залежності:

$$Q = \frac{Q_n}{\varphi^n}.$$

де Q_n – повне навантаження на вал;

φ – розмір валу по твірній.

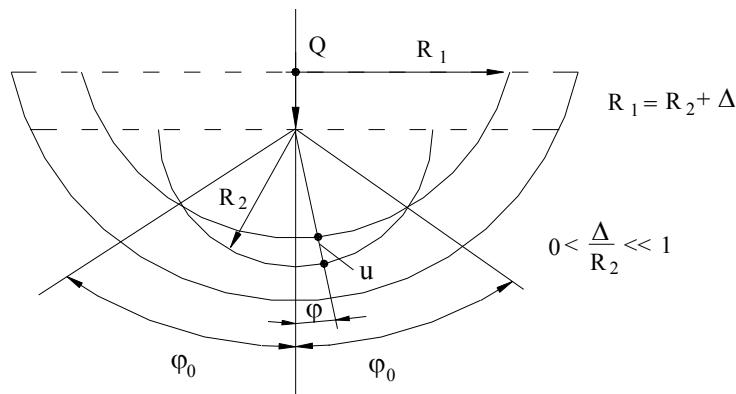


Рис. 1 – Розрахункова схема підшипника ковзання

Другою основною умовою задачі є умова рівноваги зовнішнього навантаження і контактних тисків $\sigma(\varphi)$ для вала:

$$Q = 2R \int_0^{\varphi_0} \sigma(\varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (2)$$

Узагальненням умови рівноваги є вимога виконання умови рівноваги протягом усього процесу навантаження. Ця вимога призводить до квадратичного функціоналу:

$$F = \int_0^{\bar{\varphi}_0} \left[Q(\varphi_0) - 2R \int_0^{\varphi_0} \sigma(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right]^2 d\varphi_0. \quad (3)$$

Для зручності рішення в якості шуканої візьмемо функцію проекції тиску на напрямку сили Q :

$$\sigma_1(\varphi) = \sigma(\varphi) \cos \varphi, \quad (4)$$

Тоді функціонал приймає вигляд:

$$F_1 = \int_0^{\bar{\varphi}_0} \left[Q(\varphi_0) - 2R \int_0^{\varphi_0} \sigma_1(\varphi) d\varphi \right]^2 d\varphi_0, \quad (5)$$

або з урахуванням (1):

$$F_1 = \int_0^{\bar{\varphi}_0} \left[c\varphi_0^n - 2R \int_0^{\varphi_0} \sigma_1(\varphi) d\varphi \right]^2 d\varphi_0. \quad (6)$$

Рішення задачі визначення функції контактного тиску $\sigma(\varphi)$ будемо шукати в формі степеневого ряду виду:

$$\sigma_1(\varphi) = \sum_k \xi_k (\varphi_0^k - \varphi^k), \quad (7)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$

Після підстановки (7) функціонал (6) перетворюється на в функцію багатьох змінних:

$$F_1(\xi_k) = \int_0^{\bar{\varphi}_0} \left[c\varphi_0^n - 2R \int \sum_k \xi_k (\varphi_0^k - \varphi^k) d\varphi \right]^2 d\varphi_0. \quad (8)$$

Після взяття внутрішнього інтеграла (8) перетворюється до виду:

$$F_1(\xi_k) = \int_0^{\bar{\varphi}_0} \left[c\varphi_0^n - 2R \sum_k \xi_k \varphi_0^{k+1} \left(\frac{k}{k+1} \right) \right]^2 d\varphi_0. \quad (9)$$

Мінімізація функції (9) багатьох змінних ξ_k реалізується за допомогою системи рівнянь:

$$\frac{\partial F_1(\xi_k)}{\partial \xi_k} = 0. \quad (10)$$

Після зведення (9) в квадрат, інтегрування по $d\varphi_0$ і диференціювання приходимо до системи рівнянь:

При малому числі членів ряду система (11) щодо коефіцієнтів ξ_k вирішується аналітично, при великій кількості членів ряду – чисельно за допомогою комп'ютера. Після визначення ξ_k функція розподілу тисків $\sigma_1(\varphi)$ визначається по (7).

$$\left. \begin{aligned} \sum_k \xi_k \sigma_0^k \frac{k}{(k+1)(k+p+3)} &= \frac{1}{n+p+2}; \\ k, p &= 1, 2, 3; \\ \xi_k &= \bar{\xi}_k, \bar{\sigma}; \quad \bar{\sigma} = \frac{Q}{2R\varphi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Під час зносу кут контакту φ_0 валу та втулки збільшується. Якщо не враховувати пружне деформування втулки, то залежність між кутом контакту φ_0 та лінійним зносом u_w (з геометрії контакту) має вигляд:

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{\cos \varphi \cdot \Delta}{u_w + \Delta}\right). \quad (12)$$

Знос будемо визначати за відомою алгебраїчною формою:

$$u_w = a\sigma^m(\varphi_0) \cdot t. \quad (13)$$

Таким чином, для отримання даних, характеризуючих кінетику зношування підшипника ковзання необхідно використати покрокову процедуру. Ця процедура полягає у наступному. Весь процес зношування розбивають на невеликі відрізки часу $\Delta t = t_0 = t_2 = t_3 \dots t_n$. Далі визначають контактний тиск з системи (11) та знос по виразу (13) за перший проміжок часу t_0 . Далі визначають нове значення кута контакту φ_0 (12) з урахування приросту зносу $u_w + \Delta u_w$. За новим значенням φ_0 визначають контактний тиск $\sigma(\varphi_0)$ (4). Дають приріст часу $(t_0 + t_1)$ і процедуру повторюють. Таким чином, за результатами чисельного розрахунку можна отримати зміну основних параметрів підшипника ковзання в процесі зношування - $\sigma(t)$, $\varphi_0(t)$, $u_w(t)$.

Приклад застосування методики та аналізу розрахунків

На першому етапі виконані випробування на вдавнення вала у втулку з визначенням експериментальної діаграми вдавлювання [2].

За результатами випробувань були визначені параметри c і n діаграми вдавлювання в формі:

$$\frac{Q}{\delta \Delta} = c\varphi_0^m.$$

Результати визначення параметрів приведені в табл. 1.

Таблиця 1

Значення параметрів характеристик жорсткості підшипника ковзання

Сполучення матеріалів		Параметри жорсткісної характеристики	
вал	втулка	c , МПа	n
Сталь 45 HRC 38 – 43	Сталь 40X	$2,93 \cdot 10^3$	3,05
	HRC 43 – 47		
	Сталь 20X (Ц)	$3,02 \cdot 10^5$	3,50
	HRC 60		
	СЧ 21 – 40	$3,36 \cdot 10^5$	4,35
	Бр. ОФ10 – 1	$2,36 \cdot 10^5$	3,95
	Бр. АЖ9 – 4	$2,26 \cdot 10^5$	3,63
	Бр. ОЦС5 – 5	$2,15 \cdot 10^5$	3,74

Розрахунки виконувалися при наступних вихідних даних:

$R = 45$ мм, довжина валу по твірній $\delta = 15$ мм;

$\Delta = 0,1$ мм, матеріал вала – сталь 45; матеріал втулки - Бр. ОФ10-1;

$c = 2,36,105$ МПа;

$n = 3,95$.

Результати розрахунків кута контакту і тисків за запропонованою методикою представлені на рис. 2 і рис. 3.

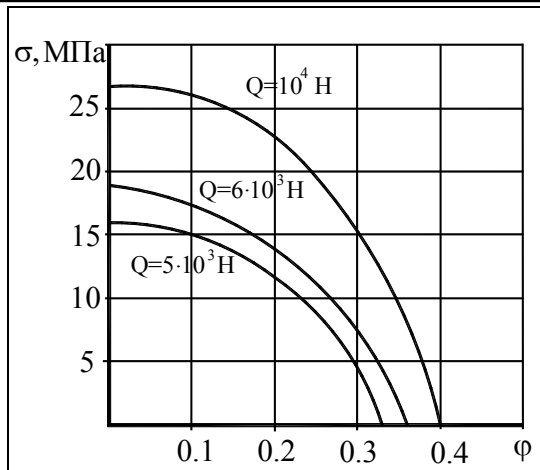


Рис. 2 – Розподіл контактних тисків по куту контакту при різних значеннях навантаження

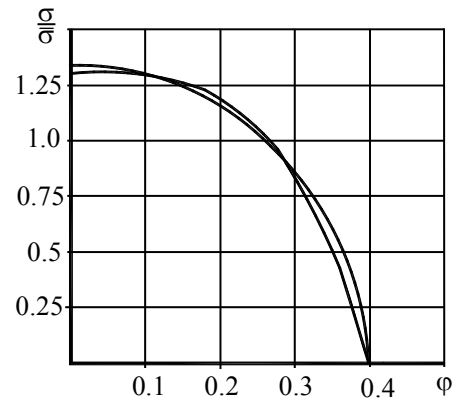


Рис. 3 – Зіставлення розподілу контактних тисків за пропонуваною методикою (1) і за методикою Александрова В. М. (2)

Порівняння результатів цих розрахунків контактних тисків з розрахунками по точній методиці Александрова В. М. [3] (рис. 3), показує достатню точність запропонованої методики.

Контакт вала і підшипника з урахуванням сил тертя

Розглядається взаємодія вала і втулки по великій площадці контакту в умовах повного зчеплення без прослизання в кожній точці контакту. Функціонал задачі на основі мінімізації відхилення роботи зовнішньої сили на шляху зближення від робіт нормальних і дотичних напружень на контактних переміщеннях приймався у вигляді [5]:

$$F = \int_0^{\varphi_0} \left[Q(\varphi_0) d\varphi_0 - 2\varepsilon \int_0^{\varphi_0} \int_0^u \sigma(u) du R d\varphi - 2\varepsilon \int_0^{\varphi_0} \int_0^v \tau(v) dv R d\varphi \right]^2 d\varphi_0.$$

З геометрії контакту для нормальних переміщень слідує:

$$u(\varphi) = \Delta \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} - 1 \right),$$

або приблизно, розкладаючи в ряд:

$$u(\varphi) = \Delta \left[\left(\frac{\varphi_0^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \left(\frac{\varphi_0^4}{24} - \frac{\varphi^4}{24} \right) \right] \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{2} \right),$$

для малих першого порядку: $du(\varphi) = -\Delta \varphi d\varphi$.

Для дотичних переміщень відповідно:

$$v = u(\varphi) \operatorname{tg} \varphi,$$

$$v(\varphi) = \Delta \left[\left(\frac{\varphi_0^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \left(\frac{\varphi_0^4}{24} - \frac{\varphi^4}{24} \right) \right] \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{2} \right) \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{3} \right),$$

$$dv(\varphi) = \Delta \left(\frac{\varphi_0^2}{2} - \frac{3}{2} \varphi^2 \right) d\varphi.$$

Рішення задачі будемо шукали у формі рядів:

$$\sigma(\varphi) = \sum d_k (\varphi_0^k - \varphi^k), \quad \tau(\varphi) = \sum \beta_l (\varphi_0^l - \varphi^l) \varphi, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

Залежність зовнішнього навантаження Q від кута контакту φ_0 приймалася у формі:

$$\bar{Q} = \varphi_0^n; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{(v c \Delta)}.$$

Після підстановки останніх виразів функціонал приводиться до вигляду:

$$F = \int_0^{\varphi_0} \left[\int_0^{\varphi_0} \bar{Q}(\varphi_0) d\varphi_0 - \frac{2R}{c} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \Sigma \alpha_k (\varphi_0^k - \varphi^k) (-\varphi \Delta) d\varphi - R d\varphi - \right. \\ \left. - \frac{2R}{c} \int_0^{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \Sigma \beta_e (\varphi_0^e - \varphi^e) \left(\frac{\varphi_0^2}{2} - \frac{3}{2} \varphi \right) \right]^2 d\varphi_0.$$

Параметри α_k і β_e знаходились з умови мінімізації функціонала: $\partial F(\alpha_k, \beta_k) / \partial \alpha_k = 0$.

Після інтегрування і диференціювання приходили до системи рівнянь:

$$\sum_k \bar{\alpha}_k \varphi_0^{k+1} \frac{k}{3(k+p+7)k+3} + \sum_l \bar{\beta}_l \varphi_0^{l+1} \frac{l}{4(l+3)} \times \left(\frac{\varphi_0 a_1}{l+p+9} - \frac{a_2}{l+p+8} \right) = \frac{1}{(n+p+5)(n+1)},$$

$$\sum_k \bar{\alpha}_k \varphi_0^{k+1} \frac{k}{(k+3)} \left(\frac{\varphi_0 \vartheta_1}{k+m+9} - \frac{\vartheta_2}{k+m+8} \right) + \sum_l \bar{\beta}_l \varphi_0^{m+2l+11} \frac{l}{3(l+3)} \times \\ \times \left(\frac{\varphi_0^2 a_1 \vartheta_1}{2m+2l+19} - \frac{\varphi_0 (a_1 \vartheta_2 + a_2 \vartheta_1)}{2(m+l+9)} + \frac{a_2 \vartheta_2}{2m+3l+17} \right) = \frac{\varphi_0 \vartheta_1}{n+m+7} - \frac{\vartheta_2}{n+m+6},$$

де $k, p, l, m = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_k = \bar{\alpha}_k \bar{\sigma}, \beta_e = \bar{\beta}_e \bar{\sigma}, \bar{\sigma} = \frac{Q}{(2\bar{v}R\varphi_0)},$$

$$a_1 = \frac{l+5}{3(l+2)}, a_2 = \frac{l+7}{2(l+4)}, \vartheta_1 = \frac{m+5}{3(m+2)}, \vartheta_2 = \frac{m+7}{2(m+4)}.$$

Отримане рішення потребує складної обчислювальної процедури з використання комп'ютерних програм, зокрема MathCad.

Висновок

Використаний варіаційно-експериментальний метод для визначення розподілу контактного тиску в циліндричному підшипнику ковзання з урахуванням тертя і без нього. В розв'язку використовується експериментальна залежність розмірів дуги контакту в підшипнику від зовнішнього навантаження. Функціонал задачі отриманий на основі методу найменших квадратів як відхилення експериментальної функції від інтегральної умови рівноваги. Для отримання розрахункових значень кінетики зносу і контактних параметрів запропонована ітераційна процедура.

Література

1. Кузьменко А.Г. Пластический контакт. Вариационно - экспериментальный метод. – Хмельницкий: ХНУ, 2009.
2. Kuzmenko, A.G., Kuzmenko, G.A., Sorokaty, R.V., Dykha, A.V. (1992). Calculating and experimental method for solving contact problems. *Trenie i iznos*, 13(2), 257–264.
3. Справочник по триботехнике / под общ. Ред. М. Хебды, А.В. Чичинадзе. В 3-х т. Т.1. Теоретические основы. – М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.
4. Диха О.В. Зносоконтактна задача для циліндричної опори ковзання при граничному терті / О.В. Диха // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2016. – № 2. – С. 83-88.
5. Кузьменко А.Г. Подшипники скольжения: прочность, износ, надежность, методы расчетов и испытаний: монография / А.Г. Кузьменко // Хмельницкий : ХНУ, 2014. – 251 с.

Поступила в редакцію 19.12.2017

Dykha O.V. Approximate wear contact problem for cylindrical bearing with allowance for slip friction.

An approximate method of determining the distribution of contact pressure in a cylindrical bearing of a slide is proposed. In the solution, the experimental dependence of the dimensions of the contact arc in the bearing on external immittance is additionally used. The functional problem is obtained on the basis of the least squares method as a deviation of the experimental function from the integral equilibrium condition. An iteration procedure is proposed to obtain the estimated values of kinetics of wear and contact parameters. For a more precise solution of the contact problem, an algorithm for taking into account tangential stresses from friction is given.

Keywords: sliding bearing, contact contact task, contact pressure, intake diagram, itentionary procedure, friction.

References

1. Kuzmenko A.G. Plasticheskiy kontakt. Variatsionno-eksperimentalnyi metod. – Hmel'nitskiy: HNU, 2009.
2. Kuzmenko, A.G., Kuzmenko, G.A., Sorokaty, R.V., Dykha, A.V. (1992). Calculating and experimental method for solving contact problem. *Trenie i iznos*, 13(2), 257–264.
3. Spravochnik po tribotekhnike / pod obsch. Red. M. Hebdyi, A.V. CHichinadze. V 3-h t. T.1. Teoreticheskie osnovy. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 400 p.
4. Diha O.V. Znosokontaktna zadacha dlya tsilindrichnoï opori kovzannya pri granichnomu tertii / O.V. Diha // *Problemi tribologii (Problems of Tribology)*. – 2016. – № 2. – P. 83-88.
5. Kuzmenko A.G. Podshipniki skoljeniya: prochnost, iznos, nadejnost, metodyi raschetov i ispytaniy: monografiya / A.G. Kuzmenko // Hmel'nitskiy : HNU, 2014. – 251 p.