

**Костогрив С.Г.,
Мисліборський В.В.**

Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: mvovka13@gmail.com

АВТОКОЛИВАННЯ У ФРИКЦІЙНОМУ КОНТАКТІ (НАБЛИЖЕНИЙ РОЗРАХУНОК)

УДК 621.891:620.194

Розглянутий механізм виникнення фрикційних автоколивань у механічних системах. Розроблений авторами і представлений наближений метод розрахунку автоколивань.

Ключові слова: автоколивання, механічна система, маятник, коливальний процес, джерело енергії, стаціонарний коливальний процес, коефіцієнт тертя, сила тертя.

Вступ

Принциповою відмінністю автоколивань від інших коливальних процесів є те, що для підтримання стаціонарного коливального режиму в автоколивальних системах не потрібно зовнішньої вимуючої сили [1].

Мета і постановка задачі

Робота виконується з метою обґрунтування автоколивання, як механічного процесу, який залежить від параметрів і властивостей основної коливальної системи так і характеристики процесу тертя.

Виклад матеріалів досліджень

1. Природа автоколивань

Коливання маятника годинника, коливання струни скрипки при рівномірному русі смичка, коливання в органній трубі, коливання різця при токарній обробці деталей є типовими прикладами автоколивальних процесів. Однак будь-яка коливальна система при стаціонарному коливальному процесі розсіює певну кількість енергії, що переходить в тепло. Тому і автоколивальна система має містити в собі джерело енергії, яке компенсувало її витрати. В таких системах джерело енергії при коливаннях виконує змінну дію, що і підтримує стаціонарний коливальний процес, забезпечуючи необхідний притік енергії для компенсації її витрат при автоколиваннях [2].

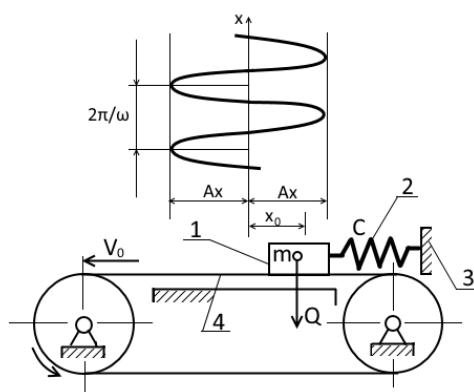


Рис. 1 – Схема взаємодії елементів стрічкового гальма при автоколиваннях):

1 – повзун; 2 – пружина;
3 – основа; 4 – плоска стрічка

Розглянемо для прикладу просту автоколивальну систему стрічкового гальма, що зображена на рис. 1.

Колодка гальма повзун 1, що має масу m , зв'язаний пружиною з жорсткістю c , прикріпленої до основи 3, розміщеної на плоскій стрічці 4, яка має постійну швидкість V_0 . При зростанні швидкості від 0 до встановленого значення V_0 маса m переміститься вліво на деяку величину x_0 і відповідно на цю ж величину розтягнеться пружина. Такий рух можливий завдяки силі сухого тертя між повзуном та стрічкою, $F = f_{cm} \cdot Q$, де f_{cm} – статичний коефіцієнт тертя в парі повзун-стрічка, а Q – сила ваги повзуна.

Сила розтягу пружини 2 при цьому зрівноважується силою тертя повзуна 1 по стрічці 3 F , $x_0 = \frac{F}{c}$. При $cx > F$ відбувається зрив повзуна по стрічці, тобто його рух по стрічці вправо і починається коливальний процес відносно положення, визначеного координатою x_0 , з деякою амплітудою A_x .

Для пояснення природи цих коливань потрібно враховувати, що сила тертя між повзуном та стрічкою не постійна, а залежить від швидкості ковзання повзуна по стрічці.

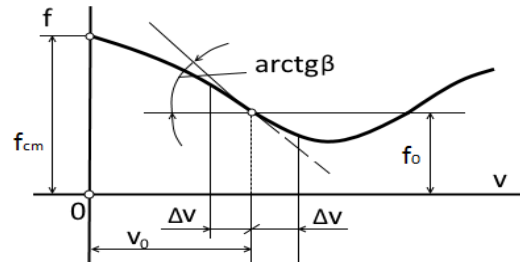


Рис. 2 – Залежність коефіцієнта тертя від швидкості ковзання

На рис. 2 показаний загальний вид залежності коефіцієнта сухого тертя f повзуна по стрічці від швидкості ковзання V . При $V = 0$ має місце найбільше значення коефіцієнта тертя f_{cm} (статичний коефіцієнт тертя f_{cm}). Зростання швидкості ковзання призводить до монотонного зменшення коефіцієнта тертя до певного значення, після якого збільшення швидкості ковзання обумовлює зростання коефіцієнта тертя.

Залежність, що зображена на рис. 2 прийнято називати швидкісною характеристикою коефіцієнта тертя. Характерно, що швидкісна характеристика має дві вітки – падаючу та зростаючу. При стаціонарному режимі коливань повзуна з амплітудою A_x швидкість ковзання у кожному з двох на півперіодів коливань буде різною. Коли повзун здійснює коливальне переміщення в напрямку швидкості V_0 , то швидкість ковзання буде меншою ніж V_0 , а саме $V_0 - \Delta V$, де ΔV – швидкість коливального руху повзуна. В цьому напівперіоді коефіцієнт тертя і відповідно сила тертя буде зростати. При цьому сила тертя буде здійснювати позитивну роботу, що збільшує енергію коливань. У наступному напівперіоді, коли повзун та стрічка рухаються в протилежні сторони $V = V_0 + \Delta V$, коефіцієнт тертя зменшується і робота сили тертя буде меншою. За повний цикл здійснюється певна позитивна робота. Таким чином у розглянутій системі (рис. 1) коливання повзуна збуджуються змінною в часі силою тертя, а її змінний характер в часі обумовлюється коливальним рухом. Такі коливання називаються автоколиваннями тому, що винищуюча сила породжується самим коливальним рухом і зникає, коли цей рух припиняється.

2. Характерні приклади фрикційних автоколивальних систем

В техніці можна навести багато прикладів, пов'язаних з автоколиваннями у механічних системах. Наведемо кілька таких характерних прикладів. На рис. 3 зображена принципова схема дискового гальма, що широко застосовується у транспортних засобах. При певних умовах пружно закріплені колодки дискових гальмів здійснюють автоколивання. При наростаючих автоколиваннях можливі поломки елементів гальм, що можуть призвести до складних ситуацій. За природою виникнення автоколивань цей приклад аналогічний розглянутому вище, рис. 1.

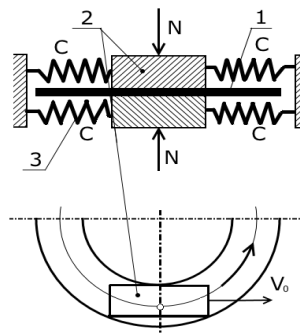


Рис. 3 – Принципова схема дискового гальма

Автоколивання можуть мати місце при обробці металів різанням в системах «верстат-приспособування-інструмент - деталь» (ВПД) в умовах, що визначаються режимами різання.

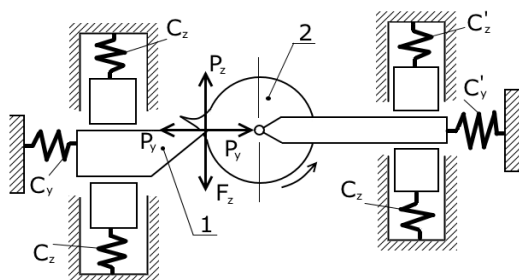


Рис. 4 – Схема взаємодії елементів системи ВПД при автоколиваннях

Одна із можливих схем, що моделює автоколивання в системі ВПД зображена на рис. 4. З боку деталі 2 на різець 1 діє сила різання P , що має складові частини P_x , P_y . Рисунок 4 схематично ілюструє взаємодію закріпленого різця 2 з деталлю 1 в площині сил P_y , P_z .

Різець 1 має пружні зв'язки через різцеутримувач і супорт за напрямками осей y та z із станиною верстата. Оброблювана деталь 2 установлена в центрах верстата і має пружні зв'язки із станиною через центри, передню та задню бабки як по координаті y , так і по координаті z . Таким чином робоча частина різця може здійснювати коливання як у горизонтальному так і у вертикальному напрямках.

Експериментально виявлено, що складова сили різання P_y залежить від швидкості коливань різця по координаті y , якими є автоколивання. Такі коливання можуть мати нестійкий характер (зростання амплітуди), що призводить до динамічних навантажень в системі ВПД і до похибок розмірів та форми обробки деталі і, з рештою до неможливості якісно проводити процес різання.

3. Загальна структура механічних автоколивальних систем

Розглядаючи механічні автоколивальні системи доцільно розрізнити їх основні елементи: основну коливальну систему (повзун 1, пружина 2, нерухома основа, або стойка 3 (рис. 1)) та ланку так званого «зворотнього зв'язку», яка керує джерелом енергії. Основна коливальна система в ізолюваному виді здатна здійснювати затухаючі власні коливання. Зворотній зв'язок має місце між основною коливальною системою та процесом тертя, який і є джерелом енергії, що підтримує автоколивання.

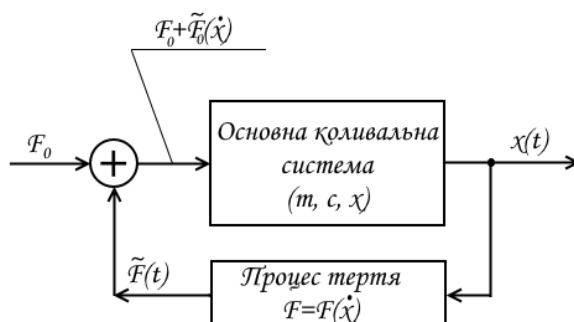


Рис. 5 – Загальна структура механічної автоколивальної системи

На рис. 5 зображена структурна схема механічної автоколивальної системи. Характеристиками основної коливальної системи є рухомі маси та їх розподіл, пружні зв'язки з жорсткістю c , дисипативні зв'язки з коефіцієнтом демпфірування k . Процес тертя характеризується силою тертя, коефіцієнтом тертя та їх залежністю від відносної швидкості ковзання фрикційних поверхонь $F = F(\dot{x})$, [3].

4. Наближений розрахунок фрикційних автоколивань

Із наведених вище уявлень про природу автоколивань постає доцільним і правомірним вважати, що їх розрахунок можна вести як розрахунок коливань основної механічної системи, що перебуває під

дією змінної в часі сили сухого тертя, яку можна і слід вважати по відношенню до основної системи вимущуючою силою.

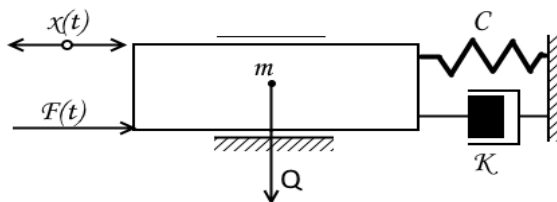


Рис. 6 – Модель основної коливальної системи

Основна коливальна система відповідно до рис.1 зображена на рис.6. Допускаємо, що в цій системі присутній в'язкий опір з коефіцієнтом демпфірування k . Диференційне рівняння руху маси m має вигляд:

$$-c(x_0 + x) - k \dot{x} + F(t) = m \ddot{x}, \quad (1)$$

де
$$F(t) = F_0 + \tilde{F}(t), \quad (2)$$

де, $F(t)$ – сила сухого тертя, що має постійну F_0 та змінну $\tilde{F}(t)$ в часі t складову.

Оскільки коефіцієнт сухого тертя f і відповідно сила тертя залежить від швидкості ковзання V , то необхідно виразити силу тертя через швидкість ковзання, подавши її у вигляді ряду Тейлора:

$$F(V) = F_0 - \left(\frac{dF}{dV} \right) \Delta V + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 F}{dV^2} \right) (\Delta V)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 F}{dV^3} \right) (\Delta V)^3 + \dots \quad (3)$$

Обмежимося лінійним наближенням, відкинувши у виразі (3) нелінійні члени, а також врахуємо, що:

$$\frac{dF}{dV} = N \frac{df}{dV},$$

де $N = Q$ – нормальна реакція, звернемо увагу і на те, що $\Delta V(t) = \dot{x}(t)$. З врахуванням цього запишемо:

$$F(t) = F_0 - N \left(\frac{df}{dV} \right) \dot{x}(t). \quad (4)$$

Постійна складова сили тертя $F_0 = f_0 \cdot Q$ визначають за допомогою характеристики коефіцієнта тертя (рис. 2) відповідно до значення швидкості V_0 .

Введемо позначення $\frac{df}{dV} = \beta$. Це крутизна швидкісної характеристики коефіцієнта тертя. Їй відповідає тангенс кута нахилу дотичної до кривої $f = f(V)$ (рис. 2) при заданій швидкості V_0 .

Крутизна β має від'ємне значення на падаючій частині швидкісної характеристики і додатне значення на її зростаючій частині. Якщо вважати автоколивальний рух гармонічним і покласти його фазу рівну нулю, то характеристику зміни сили тертя за один період коливального руху можна подати у вигляді, як це зображено на рис. 7.

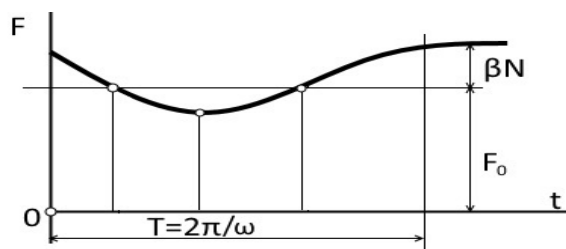


Рис. 7 – Характеристика процесу тертя за період автоколивань

З урахуванням викладеного і того, що постійна складова сили тертя F_0 зрівноважена силою пружини $x_0 \cdot c$, рівняння руху маси m повзуна (рис. 6) подаємо у вигляді

$$m \ddot{x} + (k + N \cdot \beta) \dot{x} + c x = 0. \quad (5)$$

Позначимо $n = \frac{k + N \cdot \beta}{2m}$, де n – коефіцієнт затухання, $\Omega^2 = \frac{c}{m}$, де Ω – власна частота коливань маси m на пружині (рис.6). Диференціальне рівняння (5) з врахуванням цього подамо у вигляді:

$$\ddot{x} + 2n \dot{x} + \Omega^2 x = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) описує вільні коливання в системі (рис.6).

Таким чином, диференціальне рівняння автоколивального руху зводиться до рівняння, що описує вільні коливання. Нехай автоколивання в стаціонарному режимі описуються функцією

$$x(t) = A_x e^{i(\omega t + \varphi)}, \text{ де відповідно } A_x, \varphi(x), \omega \text{ – амплітуда, фаза і частота коливань.}$$

Визначимо частоту ω автоколивань. Покладемо в рівняння 6 вираз для $x(t)$, що поданий вище, отримає рівняння $A_x (\Omega^2 - \omega^2 + 2ni\omega) = 0$. Оскільки $A_x \neq 0$, то:

$$\omega^2 - 2ni\omega - \Omega^2 = 0. \quad (7)$$

З рівняння (7) визначимо частоту автоколивань

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 - n^2}. \quad (8)$$

Розв'язок однорідного диференційного рівняння 6 має вигляд (1).

$$x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + n x_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (9)$$

Якщо покласти початкові умови, при $t = 0$, коли повзун 1 відхиляється вліво і зупиняється, то в цей момент $x = x_0 = \frac{F}{c}$, а $\dot{x}_0 = c$, то:

$$x(t) = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{n x_0}{\omega} \sin \omega t \right), \quad (10)$$

або $x(t) = e^{-nt} A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$. Амплітуда автоколивань:

$$A_x = \sqrt{(x_0)^2 + \left[\frac{n^2 x_0^2}{\omega^2} \right]} = \frac{F}{c} \sqrt{1 + \frac{n^2}{\omega^2}}. \quad (11)$$

Фаза автоколивань:

$$\varphi_x = \arctg \frac{n}{\omega}. \quad (12)$$

Звернемо увагу на те, що у виразі для n сума $k + N\beta$ відіграє роль ефективного коефіцієнта в'язкого тертя. Якщо ця сума додатня, то $n > 0$ і відповідно до виразу 10 автоколивання з часом затухають. Це має місце, коли процес відбувається на зростаючій вітці швидкісної характеристики коефіцієнта сухого тертя.

На спадаючій вітці цієї характеристики $\beta < 0$ і при певних значеннях k коефіцієнт затухання $n < 0$, тобто має місце так зване від'ємне затухання. При цьому амплітуда автоколивань в часі буде наростати (рис. 8).

Якщо на спадаючій вітці швидкісної характеристики $k + N\beta = 0$, то $n = 0$ і затухання автоколивань буде відсутнім. Це означає, що будуть відбуватися стаціонарні гармонічні автоколивання з амплітудою $A_x = x_0 = \frac{F}{c}$. Таким чином для забезпечення стійкості усталеного режиму автоколивань повзуна на стрічці необхідне виконання умови $k + N\beta > 0$.

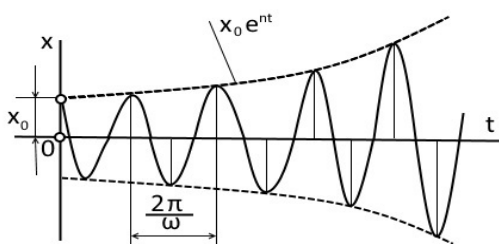


Рис. 8 – Процес наростання амплітуди автоколивань в часі (при $n < 0$)

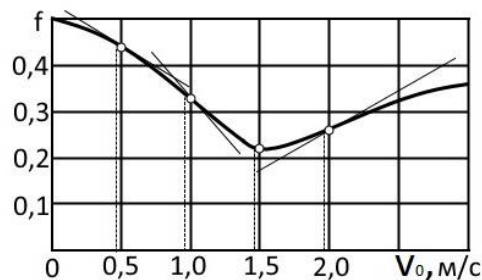


Рис. 9 – Швидкісна характеристика коефіцієнта тертя

Для прикладу визначимо за приведеними вище аналітичними залежностями параметри автоколивального процесу в механічній системі (рис. 1) при наступних даних: $m = 20$ кг, $f_0 = 0,45$, $v_0 = 0,5$ м/с, $c = 20$ Н/мм, $k = 20$ Н · с/м, $\beta = -0,2$ с/м, а швидкісна характеристика коефіцієнта тертя подана на рис. 9. Результати розрахунків зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри автоколивань в механічній системі, зображеній на рис. 1

Параметр	Значення параметрів				
	f_0	0,5	0,45	0,32	0,21
β , с/м	0	-0,15	-0,30	0	0,15
Ω , с ⁻¹	0	31,6	31,6	31,6	31,6
n , с	0	-0,25	-1,0	0,5	1,25
ω , с ⁻¹	0	≈ 31,5	≈ 31,5	≈ 31,5	≈ 31,5
x_0 , мм	0	4,5	3,2	2,1	2,5
A_x , мм	0	≈ 4,5	≈ 3,2	≈ 2,1	≈ 2,5
V_0 , м/с	0	0,5	1,0	1,5	2,0

Висновки

1. Автоколивання, як механічний процес залежить від параметрів і властивостей основної коливної системи так і характеристики процесу тертя.
2. Процес тертя залежить від статичного коефіцієнта тертя та швидкісної характеристики коефіцієнта тертя.
3. Запропонований простий метод визначення основних параметрів автоколивань в механічній системі.

Література

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко // М. : Физматиз, 1959. – 439с.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков // М. : Изд-во «Наука», 1959. – 437с.
3. Кудинов В. А. Динамика станков / В. А. Кудинов // М. : Машиностроение, 1967. – 140-160 с.

Поступила в редакцію 04.05.2017

Kostogris S.G., Misliborski V.V. **Self - oscillations in frictional contact (approximate calculation).**

The mechanism of occurrence of frictional oscillations in mechanical systems. Designed by the authors and presented approximate calculation method oscillations in mechanical systems.

Key words: self-oscillation, mechanical system pendulum oscillation, the energy source stationary oscillation, friction, friction.

References

1. Timoshenko S.P. Fluctuations in actually engineering. S.P. Timoshenko./ Moscow: Fyzmatyz, 1959. 439 p.
2. Strelkov S.P. Introduction to the Theory of oscillations. S.P. Strelkov. Moscow: Publishing House "Science" 1959. 437 p.
3. Kudynov V.A. Dynamics Stankov / V.A. Kudynov. Moscow: Engineering, 1967. 140-160 p.