

Багрій О.В.Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна
E-mail: avadaro@yahoo.com**ВИБІР КРИТЕРІЮ ПЕРЕХОДУ
В ГРАНИЧНИЙ СТАН
ДИСКРЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА**

УДК 620.17

В роботі розглянуто критерії переходу дискретних матеріалів у граничний стан. Визначено величини кута внутрішнього тертя для умов плоскої деформації за граничними значеннями. Зроблено висновки щодо величини кута внутрішнього тертя для умов плоскої деформації.

Ключові слова: кут внутрішнього тертя, граничний стан, критерій Мора - Кулона.

Вступ

Для дискретних матеріалів перехід у граничний стан не пов'язаний з руйнуванням частинок матеріалу, а характеризується значними залишковими зсувами по всьому об'єму у випадку матеріалу з малою початковою щільністю (пухкий стан), або утворенням локальних зон зсувів для матеріалів у початковому щільному стані.

Критерії переходу матеріалу в граничний стан формують у вигляді функцій напружень:

$$F(\{\sigma\}, m_i) = 0, \quad (1)$$

де m_i – параметри матеріалу, величини яких визначаються експериментально.

Критерії переходу матеріалу в граничний стан асоціюються з умовою пластичного плину в моделях, що описують деформування матеріалу в граничному стані. Тому вивчення характеру функції (1) та стабільності параметрів для різних видів напруженого стану є важливою задачею експериментальних досліджень.

Критерії переходу дискретного матеріалу в граничний стан повинні включати не тільки компоненти девіатора, як це прийнято в теорії пластичності, але й величини нормальних стискуючих напружень. До них формально належать критерії Ю.М. Ягна, З. Клебовського, П.П. Баландіна, С. Торе, Ф. Стасі, Г.А. Генієва [1], А.А. Лебедєва [2], Хошіно [3], Боткіна – Шлейхера - Мізеса [4], Хілла [5], Мора - Кулона.

Найбільш привабливими є критерії, що розглядають умову переходу до граничного стану як досягнення відповідного рівня співвідношень між напруженнями для конкретно орієнтованих площинок. Це дозволяє "плавно" перейти від дограничного напружено-деформативного стану до граничного, фіксує не тільки напруження, але й деформації в момент руйнування.

До цієї групи критеріїв в першу чергу слід віднести критерій А.І. Боткіна:

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} - \operatorname{tg}\psi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3H) = 0, \quad (2)$$

де H – опір матеріалу всебічному розтягу;

ψ – параметр опору матеріалу зсуву по октаедричній площинці.

Для ідеально сипких матеріалів ($H = 0$) критерій Боткіна можна записати у вигляді відношення дотичних τ_0 і нормальних σ_0 напружень, що діють по октаедричних площинках:

$$\frac{\tau_0}{\sigma_0} = \operatorname{tg}\psi. \quad (3)$$

Вираз нагадує формулювання закону Амонтона – Кулона для сухого тертя.

Менш логічним є узагальнений критерій Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = K_n (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 3H). \quad (4)$$

Умова (4) включає проміжне головне напруження σ_2 тільки у праву частину і, по суті, зв'язує дотичне і нормальне напруження, що діють по різних площинках.

Близький за змістом до (2) критерій граничного стану дискретного матеріалу запропоновано Р. Хіллом. Він записується у вигляді:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3 + 2H) \operatorname{tg}\phi_{45} = 0. \quad (5)$$

Для ідеально сипкого матеріалу критерій Хілла можна записати через відношення напружень, що діють по площинках, нахилених до головних під кутом 45° .

$$\frac{\tau_{45}}{\sigma_{45}} = \operatorname{tg} \phi_{45}. \quad (6)$$

Найбільш відомим з цієї групи є критерій граничного стану Мора – Кулона:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3 + 2H) \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

де φ – кут внутрішнього тертя.

Для ідеального сипкого матеріалу ($H = 0$) критерій Мора можна записати як відношення напружень τ_p / σ_p , що діють по площинках граничної рівноваги (по площинках з найбільшим відхиленням повного напруження від нормалі):

$$\operatorname{tg} \rho_{ep} = \frac{\tau_p}{\sigma_p} = \operatorname{tg} \phi \quad (8)$$

або як граничне відношення головних напружень:

$$\eta_{ep} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right). \quad (9)$$

Представлення критеріїв граничного стану дискретного матеріалу через відношення напружень має чіткий фізичний зміст.

Перш за все, це підкреслює, що міцність цих матеріалів визначається не різницею напружень (девіатором тензору), а їх відношенням.

По-друге, умови (3) та (8) є формулюванням закону сухого тертя Амонтона – Кулона, згідно з яким опір системи контактуючих тіл зовнішнім діям переважно визначається внутрішнім тертям. Тому дискретні матеріали є найбільш характерним представником матеріалів з суттєвим проявом внутрішнього тертя. Аналіз міцності таких матеріалів зроблено в роботі [6].

Нарешті, самі умови задають орієнтацію площинок граничної рівноваги. Для умови (3) це октаедричні площинки, а для (8) – площинки граничної рівноваги, площинки з максимальним відхиленням повного напруження від нормалі. Ці неортогональні площинки нахилі до головних під кутами $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\phi}{2}$.

Остання особливість дає можливість зв'язати умову переходу в граничний напружений стан з деформаціями, що відповідають цьому стану.

Детальний аналіз результатів перевірки критеріїв наведено в статтях [7 - 11].

Найбільш привабливими для плоскої деформації є критерії Мора і Хілла. Вони включають тільки напруження, що діють в площині деформування ($\varepsilon_z = 0$).

Враховуючи те, що параметри критеріїв Мора φ і Хілла ϕ_{45} однозначно пов'язані співвідношенням:

$$\sin \phi = \operatorname{tg} \phi_{45},$$

експериментальна перевірка сталості критеріїв переходу дискретних матеріалів у граничний стан при зміні виду напруженого стану найчастіше проводилась для критерію Мора.

Відомим параметром, що оцінює вид напруженого стану, є параметр Лоде μ_σ :

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

величина якого змінюється від $\mu_\sigma = -1$ (осьове стиснення з накладеним всебічним стисненням) до $\mu_\sigma = 1$ (осьове розтягнення з всебічним стисненням).

Досліди щодо перевірки сталості величини кута внутрішнього тертя для різних видів напруженого стану є досить складним технічним завданням. В наукових журналах опубліковано тільки результати декількох експериментів. Усі вони проведені з різними матеріалами, на різних приладах, за різними методиками, і тому їх важко зіставити. Але в усіх дослідах (див. рис. 1) простежується стійка тенденція. Із ростом величини параметру μ_σ до значення $\mu_\sigma \approx 0$ кут внутрішнього тертя зростає для щільних пісків на величину від 4° до 10° , для пухких – від 2° до 6° . При подальшому збільшенні параметру μ_σ величина кута φ дещо зменшується, в першу чергу, для щільних пісків.

Описані випробування оцінюють вплив на величину параметра φ тільки виду напруженого стану, але не умов деформування. Обмеження вільного деформування вздовж однієї з осей для умов плоскої

деформації, безумовно, впливає на результати випробувань і потребує проведення спеціальних досліджень.

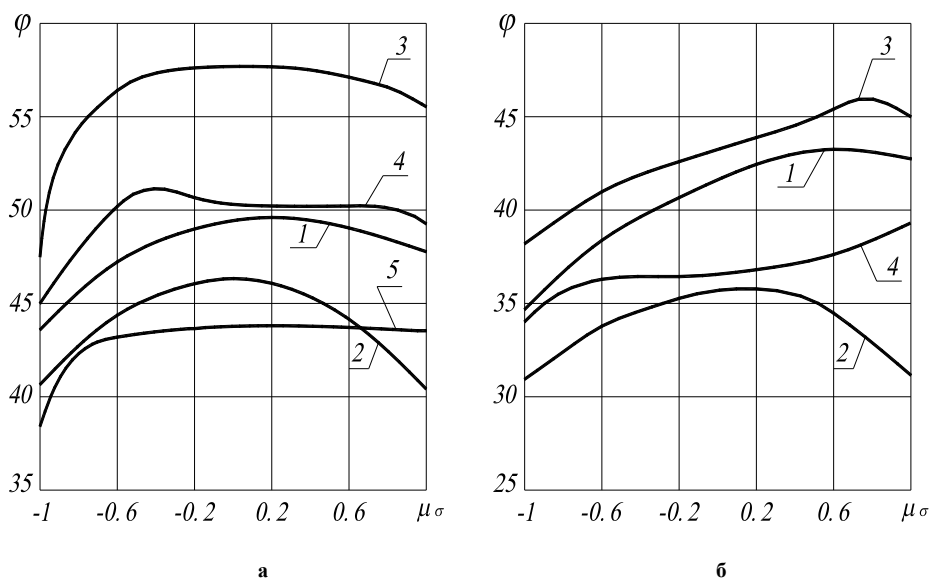


Рис. 1 – Експериментальні залежності кута внутрішнього тертя φ від виду напруженого стану:
а – щільні піски; б – пухкі піски
1 – Н. Ко, R. Scott [8]; 2 – Н. Sutherland, Mesdary [9]; 3 – P. Lade, J. Duncan [10];
4 – D. Proctor, L. Barden; 5 – D. Reads, G. Green [11]

Дослідження граничного стану дискретного матеріалу в умовах плоскої деформації

Можна зробити висновок, що найбільш достовірно перехід дискретного матеріалу в граничний стан описує критерій Мора – Кулона. Стабільність величини параметра цього критерію – кута φ внутрішнього тертя при зміні виду напруженого стану досліджувалась науковцями Кембріджського університету. В цих дослідженнях не моделювався найбільш розповсюджений в інженерній практиці плоскодеформаційний стан.

Описані випробування оцінюють вплив на міцність матеріалу тільки виду напруженого стану, але не умов деформування. Обмеження вільного деформування вздовж однієї з осей для умов плоскої деформації, безумовно, впливає на результати випробувань і потребує проведення спеціальних досліджень.

В лабораторії кафедри опору матеріалів Хмельницького національного університету проведено три серії випробувань [12] зразків кварцового піску в умовах плоскої деформації за траєкторіями, коли відношення головних напружень η зростає до граничної величини при збереженні протягом одного дослідження сталої величини суми напружень, $P = \text{const}$. Результати досліджень, що представлені на [12, рис. 4], дозволяють визначити величини кута внутрішнього тертя для умов плоскої деформації за граничними значеннями S_{sp} :

$$\sin \varphi = \frac{2S_{sp}}{P}$$

Осереднені значення кутів внутрішнього тертя визначені як аналітично, так і графічно за нахилом огинаючих граничних кругів Мора для кожної серії, наведені в таблиці 1. В цій же таблиці приведені величини кутів φ , одержані В.В. Ковтуном за тих же умов при проведенні стандартних стабілометричних випробувань.

Таблиця 1

Експериментальні значення кута внутрішнього тертя для різних видів напруженого стану

Серія	Відносна щільність піску	Значення кута внутрішнього тертя		
		плоска деформація	тривісний стиск	розходження
I	0.125	35°50'	33°20'	2°30' (7,5 %)
II	0.512	40°10'	36°50'	3°20' (9,04 %)
III	0.908	43°40'	38°30'	5°10' (13,4 %)

Як видно з таблиці, в усіх серіях спостерігалось збільшення величини кута внутрішнього тертя для плоскої деформації в порівнянні зі стабілометричними випробуваннями на тривісний стиск.

Аналогічні результати одержані при інженерно-геологічних вишукуваннях, проведених ЧорноморНДІпроект у зв'язку з проектуванням Одеського нафтотерміналу нафтопроводу "Одеса - Броди". Паралельні випробування морського піску на стандартних стабілометрах і на переданому ЧорноморНДІ-проект приладі плоскої деформації дозволили обґрунтувати збільшення розрахункової величини кута внутрішнього тертя для умов плоскої деформації приблизно на 10 %.

Аналіз опублікованих даних, а також результатів досліджень, проведених за участю автора в лабораторіях кафедри опору матеріалів ХНУ, дозволяє зробити два принципових висновки:

- найбільш стабільним для перевірених дискретних матеріалів є критерій Мора - Кулона;
- величини кута внутрішнього тертя пісків для умов плоскої деформації перевищують його значення, що одержані в стандартних стабілометричних випробуваннях, в середньому на 10 %.

Висновки

Досліджено стабільність параметра ϕ критерія Мора - Кулона переходу дискретного матеріалу в граничний стан шляхом співставлення величини кута внутрішнього тертя одержаних в умовах стандартних осесиметричних стабілометричних випробувань і випробувань в умовах плоскої деформації. Зроблено висновок про зростання величини кута внутрішнього тертя при роботі матеріалу в умовах плоскої деформації.

Література

1. Гениев Г. А. Вопросы прочности и деформируемости грунтовых сред / Г. А. Гениев // Строительные конструкции. – 1969. – Вып. 4. – С. 3-73.
2. Лебедев А. А. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии (теории прочности) / Лебедев А. А. – К. : Наукова думка, 1968. – 67 с.
3. Hoshino K. General theory of Soil Mechanics / K. Hoshino // Proceedings of Fourth International Conference on Soil Mechanics. – 1957. – P. 231-237.
4. Schleicher F. Der Spannungszustand an der Fließgrenze / F. Schleicher // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1926. – Т. 6, № 3.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности / Хилл Р. – М. : Гостехиздат, 1956.
6. Ковтун В. В. Деформування та руйнування матеріалів з суттєвим проявом внутрішнього тертя / В. В. Ковтун, О. В. Колесникова // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2001. – № 3. – С. 38-43.
7. Ковтун В. В. Исследование прочности сыпучих материалов в условиях плоской деформации / В. В. Ковтун, Е. В. Багрій, В. Т. Бугаев // Будівельні конструкції. – 2004. – Вип. 61. – Т. 1. – С. 109-116.
8. Ko H. Y. Deformation of sand at failure / H. Y. Ko, R. F. Scott // ISMFD, ASCE. – 1968. – V. 94, N SM4. – P. 883-898.
9. Sutherland H. B. The influence of the intermediate principle stress on the strength of sand / H. B. Sutherland, M. S. Mesdary // Proc. 7th ICSMFE. – Mexico, 1969. – V. 1. – P. 391-399.
10. Lade P. V. Cubical triaxial tests on cohesionless soil / P. V. Lade, I. M. Duncan // ISMFD, ASCE. – 1973. – V. 99, N SM10. – P. 793-812.
11. Reades D. W. Discussion on "Cubical triaxial tests on cohesionless soil" / D. W. Reades, G. E. Green // JGED, ASCE. – 1974. – V. 100, N GT9. – P. 1065-1067.
12. Багрій О. В. Вплив внутрішнього кулонового тертя на деформування композитних матеріалів з малою зв'язністю / О. В. Багрій // Проблеми трибології (Problems of Tribology). – 2013. – № 4. – С. 114-120.

Поступила в редакцію 08.10.2015

Bagriy O.V. Choice of criterion of transition to the limit - state discrete environment.

The paper considers the criteria for transition of discrete materials in limiting state. The analysis of the known criteria of transition of discrete materials in limit state. The stability of parameter of criteria Mohr - Coulomb transition of a discrete material in the limiting state by comparing the values of the angle of internal friction obtained under conditions of standard axisymmetric stabilometric tests and tests in plane strain. Determine the values of the angle of internal friction for plane strain conditions of the limit values. It is concluded about the growth of the value of the angle of internal friction at the work of the material in conditions of plane strain.

Key words: angle of internal friction, limiting state, criteria Mohr - Coulomb.

References

1. Geniev G. A. Voprosy prochnosti i deformiruemosti gruntovyh sred. Stroitel'nye konstrukcii. 1969. Vyp. 4. S. 3-73.
2. Lebedev A. A. Raschety na prochnost' pri slojnom napryajennom sostoyanii (teorii prochnosti). K. Naukova dumka, 1968. 67 s.
3. Hoshino K. General theory of Soil Mechanics. Proceedings of Fourth International Conference on Soil Mechanics. 1957. P. 231-237.
4. Schleicher F. Der Spannungszustand an der Fließgrenze. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1926. T. 6, № 3.
5. Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. Hill R. M. Gostehizdat, 1956.
6. Kovtun V. V., Kolesnikova O. V. Deformuvannya ta ruynuvannya materialiv z suttevim proyavom vnutrishn'ogo tertya. Problemi tribologii (Problems of Tribology). 2001. N 3. S. 38-43.
7. Kovtun V. V., Bagriy E. V., Bugaev V. T. Issledovanie prochnosti sypuchih materialov v usloviyah ploskoy deformacii. Budivel'ni konstrukcii. 2004. Vip. 61. T. 1. S. 109-116.
8. Ko H. Y., Scott R. F. Deformation of sand at failure. ISMFD, ASCE. 1968. V. 94, N SM4. P. 883-898.
9. Sutherland H. B., Mesdary M. S. The influence of the intermediate principle stress on the strength of sand. Proc. 7th ICSMFE. Mexico, 1969. V. 1. P. 391-399.
10. Lade P. V., Duncan I. M. Cubical triaxial tests on cohesionless soil. ISMFD, ASCE. 1973. V. 99, N SM10. P. 793-812.
11. Reades D. W., Green G. E. Discussion on "Cubical triaxial tests on cohesionless soil". JGED, ASCF. 1974. V.100, N GT9. P. 1065-1067.
12. Bagriy O. V. Vpliv vnutrishn'ogo kulonovogo tertya na deformuvannya kompozitnih materialiv z maloyu zv'yaznistyu. Problemi tribologii. 2013. N 4. S. 114-120.