

Романюк В.В.Хмельницький національний університет,
м. Хмельницький, Україна

**ПРО ОСОБЛИВІ КОМПОНЕНТИ
ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ
ПРОЕКТУВАЛЬНИКА У МОДЕЛІ ДІЇ
НОРМОВАНОГО ОДИНИЧНОГО
НАВАНТАЖЕННЯ НА ТРИКОЛОННУ
БУДІВЕЛЬНУ КОНСТРУКЦІЮ**

Вступ і постановка проблеми дослідження

Модель дії нормованого одиничного навантаження [1] на три колони однакової висоти у будівельній конструкції та відповідного розподілу будівельних ресурсів у цій конструкції [2, 3] є однією з фундаментальних задач оптимального використання будівельних ресурсів. Ця задача може бути узагальнена і до рівня задачі усунення триелементних невизначеностей у широкому сенсі, де за ядро антагоністичної гри береться гіперповерхня

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2; y_1, y_2) = \beta \max \left\{ \frac{x_1}{y_1^2}, \frac{x_2}{y_2^2}, \frac{1-x_1-x_2}{(1-y_1-y_2)^2} \right\} \quad (1)$$

з параметром $\beta > 0$ на паралелепіпеді

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \prod_{s=1}^2 [a_s; b_s] \times \prod_{i=1}^2 (0; 1) \subset \prod_{k=1}^4 [0; 1] \subset \mathbb{K}^4 \quad (2)$$

при $x_i \in [a_i; b_i]$, $x_3 = 1 - (x_1 + x_2)$, $y_i \in [a_i; b_i]$, $y_3 = 1 - (y_1 + y_2) \quad \forall i = \overline{1, 2}$ за умов

$$0 < a_1 < b_1 < 1, \quad 0 < a_2 < b_2 < 1, \quad b_1 + b_2 < 1. \quad (3)$$

Не зважаючи на те, що у цій грі, котра виявляється строго опуклою, другий гравець (проектувальник) володіє чистою оптимальною стратегією $\mathbf{Y}_* = [y_1^* \quad y_2^*]$, трапляються випадки, коли її компоненти знаходяться по-особливому, зі залученням додаткових обґрунтувань.

Аналіз останніх досліджень й окреслення невирішених питань

Основні щойно згадані додаткові обґрунтування щодо оптимальної поведінки проектувальника містяться у роботах [2, 3]. За умов

$$\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}} \in [a_i; b_i] \quad \forall i = \overline{1, 2} \quad (4)$$

компонентами оптимальної стратегії проектувальника будуть

$$y_i^* = \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}} \quad \forall i = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

Але при

$$\frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}} < a_j \quad (6)$$

буде $y_j^* = a_j$ й

$$y_i^* = \frac{(1-a_j)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2}} \quad (7)$$

за умови

$$\frac{(1-a_j)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2}} \in [a_i; b_i] \quad \forall i = \overline{1, 2} \quad \text{при } j = 2 - \text{sign}(i-1). \quad (8)$$

Натепер невивченим питанням залишається те, як співвідносяться між собою значення (5) і (7), а також умови, за яких належність (8) справджується. Це надасть більш чітких обрисів у визначенні оптимальної поведінки проектувальника.

Формулювання мети дослідження компонент типу (7) оптимальної стратегії проектувальника

Для додаткового дослідження оптимальної поведінки проектувальника у моделюванні дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції та відповідного розподілу будівельних ресурсів у цій конструкції необхідно виявити співвідношення між звичайною i -ю компонентою (5) оптимальної стратегії проектувальника й особливою i -ю компонентою (7) цієї стратегії. Також слід окреслити додаткові умови належності (8), за яких значення (7) є i -ю компонентою стратегії $\mathbf{Y}_* = [y_1^* \quad y_2^*]$ проектувальника $\forall i = \overline{1, 2}$ при $j = 2 - \text{sign}(i - 1)$.

Теорема про строгу нерівність у співвідношенні між значеннями (5) і (7)

Теорема 1. В опуклій грі з ядром (1) на паралелепіпеді (2) з умовами (3) при одночасному виконанні i -ї умови (4) і j -ї умови (6) за умови (8) для i -ї компоненти (7) справедлива строга нерівність

$$\frac{(1-a_j)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2}} < \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}}. \quad (9)$$

Доведення. Дослідимо різницю лівої і правої частин нерівності (9):

$$\begin{aligned} & \frac{(1-a_j)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2}} - \frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}} = \\ & = \sqrt{b_i} \frac{(1-a_j)(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}) - (\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2})}{(\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2})(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2})} = \\ & = \sqrt{b_i} \frac{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2} - a_j(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2}) - (\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2})}{(\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2})(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2})} = \\ & = \sqrt{b_i} \frac{\sqrt{b_j} - a_j(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2})}{(\sqrt{b_i} + \sqrt{1-a_1-a_2})(\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{1-a_1-a_2})}, \quad (10) \end{aligned}$$

де використано те, що $\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} - \sqrt{b_i} = \sqrt{b_j}$ при $i = \overline{1, 2}$ та $j = 2 - \text{sign}(i - 1)$. З нерівності (6), знаменник у лівій частині якої є додатним, відразу впливає від'ємність чисельника у (10), що доводить справедливість нерівності (9). Теорему доведено.

Теорема про значення (7) у звуженні гри з ядром (1) на паралелепіпеді (2) при (3)

Теорема 2. У звуженні опуклої гри з ядром (1) на паралелепіпеді (2) з умовами (3) на $a_1 = a_2 = a$ при одночасному виконанні i -ї умови (4) і j -ї умови (6) для i -ї компоненти (7) справедливе співвідношення

$$\frac{(1-a)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-2a}} \in [a; b_i] \quad (11)$$

за умови

$$a \in \left(0; \left(\sqrt{b_i(b_i+1)} - b_i \right) \cdot \frac{1 + \text{sign}\left(b_i - \frac{1}{3}\right)}{2} \cdot \text{sign}\left|b_i - \frac{1}{3}\right| \right) \mathbf{U} \left(0; b_i \cdot \text{sign}\left[1 - \text{sign}\left(b_i - \frac{1}{3}\right)\right] \right). \quad (12)$$

Доведення. Нерівність $\frac{(1-a)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-2a}} < b_i$ впливає безпосередньо зі щойно доведеної строгої нерівності (9). Залишається вяснити, за яких умов нестрога нерівність

$$\frac{(1-a)\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_i} + \sqrt{1-2a}} \geq a \quad (13)$$

є вірною. З нерівності (13) маємо:

$$(1-a)\sqrt{b_i} \geq a(\sqrt{b_i} + \sqrt{1-2a}), \quad (1-2a)\sqrt{b_i} \geq a\sqrt{1-2a}, \quad \sqrt{1-2a}\sqrt{b_i} \geq a, \quad b_i(1-2a) \geq a^2, \\ a^2 + 2ab_i - b_i \leq 0. \quad (14)$$

Дискримінантом відповідного нерівності (14) квадратного рівняння $a^2 + 2ab_i - b_i = 0$ відносно a є

$$D = 4b_i^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b_i) = 4b_i^2 + 4b_i = 4b_i(b_i + 1),$$

звідки корені цього рівняння

$$a = a^{(1)} = \frac{-2b_i - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2b_i - \sqrt{4b_i(b_i + 1)}}{2} = \frac{-2b_i - 2\sqrt{b_i(b_i + 1)}}{2} = -b_i - \sqrt{b_i(b_i + 1)} < 0, \quad (15)$$

$$a = a^{(2)} = \frac{-2b_i + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2b_i + \sqrt{4b_i(b_i + 1)}}{2} = \frac{-2b_i + 2\sqrt{b_i(b_i + 1)}}{2} = -b_i + \sqrt{b_i(b_i + 1)}. \quad (16)$$

Корінь $a^{(2)} > 0$, оскільки

$$b_i + 1 > b_i, \quad \sqrt{b_i + 1} > \sqrt{b_i}, \quad \sqrt{b_i(b_i + 1)} > b_i,$$

звідки розв'язком нерівності (14) відносно змінної a є

$$a \in (0; a^{(2)}] = (0; \sqrt{b_i(b_i + 1)} - b_i], \quad (17)$$

що є вірним тільки при

$$\sqrt{b_i(b_i + 1)} - b_i < b_i. \quad (18)$$

Зі співвідношення (18) маємо:

$$\sqrt{b_i + 1} - \sqrt{b_i} < \sqrt{b_i}, \quad \sqrt{b_i + 1} < 2\sqrt{b_i}, \quad b_i + 1 < 4b_i, \quad b_i > \frac{1}{3}. \quad (19)$$

Співвідношення (19) означають те, що (17) є рівним при $b_i > \frac{1}{3}$, а при $b_i \leq \frac{1}{3}$ буде $a \in (0; b_i)$. Ці умови для значення a компактно записані у (12). Теорему доведено.

Висновок і перспектива подальшого моделювання розподілу будівельних ресурсів у конструкціях-опорах

Доведені теореми дають можливість контролювати особливі компоненти (7) оптимальної стратегії проектувальника, де $i = \overline{1, 2}$ при $j = 2 - \text{sign}(i - 1)$. Таких компонент в $\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* \end{bmatrix}$ може бути не більше однієї, причому при звуженні на $a_1 = a_2 = a$ для i -ї особливої компоненти (11) виконуватиметься умова належності (12). У подальшому можна перевірити таку умову для незвуження.

Література

1. Романюк В.В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок поздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В.В. Романюк // Проблеми трибології. □ 2010. □ № 1. □ С. 42-56.
2. Романюк В.В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В.В. Романюк // Проблеми трибології. □ 2010. □ № 3. □ С. 18-25.
3. Романюк В.В. Доведення тверджень для моделі дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції / В.В. Романюк // Проблеми трибології. □ 2010. □ № 4. □ С. 72-81.

Надійшла 09.11.2010