Кузьменко А.Г.
Хмельницкий национальный университет,
Украина

БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕННОГО РАДИУСА В ТРИБОТЕХНИКЕ

1. Представление решения герцевской задачи для шара на плоскости в безразмерном виде

1.1. Формулы в размерном виде

Для определение радиуса площадки контакта a, максимального контактного давления d_0 по площадке контакта, и сближения шара и плоскости U_0, в соответствии с решением Герца для случая, когда материалы шара и плоскости одинаковы, в $[2]$ приведены следующие формулы:

$$a = 1{,}109(\frac{QR}{E})^{1/3} = C_a(\frac{QR}{E})^{1/3}, \tag{1}$$

$$d_0 = 0{,}388(\frac{QE^2}{R^2})^{1/3} C_{d0}(\frac{QE^2}{R^2})^{1/3}, \tag{2}$$

$$U_0 = 1{,}231(\frac{Q^2}{E^2R})^{1/3} = C_u(\frac{Q^2}{E^2R})^{1/3}. \tag{3}$$

1.2. Процедура обезразмеривания

В соответствии с основными положениями теории подобия и размерностей любая зависимость определяемой величины (в данном случае $a(QRE)$, $\mathrm{d}_0(QR\mathrm{E})$,$U_0(QR\mathrm{E})$ может быть представлена в виде критериального уравнения или зависимости безразмерной определяемой величины $(\mathrm{a}, \mathrm{d}_0 U_0)$ от безразмерных комплексов из определяющих величин Q, R, E.

В случае если известно решение задачи в размерном виде типа (1), (2), (3) безразмерные комплексы или критерии получают интуитивно путем деления левых и правых частей в формулах на размерные величины так, чтобы получить безразмерные. В соответствии с этим положением:

1) в формуле (1) для радиуса площадки контакта разделив левую и правую части на радиус R (мм), имеющий размерность длины, мм, имеем:

$$\frac{a}{R} = \frac{C_a}{R}(\frac{QR}{E})^{1/3} = C_a(\frac{QR}{ER^3}) = C_a(\frac{Q}{ER^2})^{1/3}. \tag{4}$$

В результате слева имеем безразмерный комплекс Π_a:

$$\Pi_a = a / R \text{, мм/мм}. \tag{4, a}$$

Справа имеем безразмерный комплекс Π_1:

$$\Pi_1 = Q / \mathrm{E}R^2 \ \frac{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2}{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2}. \tag{5}$$

Подставляя (4), (5) в (1), получаем безразмерное критериальное уравнение или выражение в виде:

$$\Pi_a = C_a \Pi_1^{1/3}; \tag{6}$$

2) В формуле (2) левую и правую части разделим на модуль упругости E, в результате имеем

$$\frac{\sigma_0}{E} = \frac{C_\sigma}{E}(\frac{QE^2}{R^2})^{1/3} = C_\sigma(\frac{Q}{ER^2}), \quad (7)$$

где слева безразмерный комплекс

$$П_{d_0} = \frac{d_0}{E} = \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \cdot \frac{\text{мм}^2}{\text{кгс}} [1], \quad (8)$$

Справа в скобках в (7) имеем безразмерный комплекс $П_1$,

$$П_1 = \frac{Q}{ER^2} = \frac{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2}{\text{кгс} \cdot \text{мм}^2} [1], \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (2), получаем его безразмерное выражение в виде:

$$\Pi_\sigma = C_{\sigma_0} \Pi_1^{1/3}, \quad (10)$$

3) в формуле (3) левую и правую части разделяем на радиус R

$$\frac{U_0}{R} = \frac{C_{u_0}}{R}(\frac{Q^2}{E^2 R})^{1/3} = C_{u_0}(\frac{Q^2}{E^2 R^4})^{1/3}, \quad (11)$$

где слева безразмерный комплекс

$$П_{u_0} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{\text{мм}}{\text{мм}} [1]; \quad (12)$$

справа в скобках имеем безразмерный комплекс

$$П_2 = \frac{Q^2}{E^2 R} = \frac{\text{кгс}^2}{\text{кгс}^4} \cdot \frac{\text{мм}^4}{\text{мм}^4} [1]; \quad (13)$$

подставляем (12) и (13) в (3) получаем безразразмерное выражение для сближения

$$П_{u_0} = C_u П_2^{1/3}. \quad (14)$$

Таким образом, все зависимости основных параметров контактных давлений σ_0, радиуса площадки контакта a, сближение U_0 получены в безразмерной форме:

$$П_a = C_a П_1^{1/3} \quad (15)$$

$$П_{d_0} = C_{d_0} П_1^{1/3} \quad (16)$$

$$П_{u_0} = C_{u_0} П_2^{1/3} \quad (17)$$

2. Преимущества безразмерной формы представления зависимостей

2.1. Компактность и простота аналитического представления

1) Зависимости облегчают анализ влияния разных факторов на определения параметров;
2) В частности интересно, что отношение критериев подобия давлений и радиуса площадки контакта - величина постоянная:

$$\frac{П_a}{П_{d_0}} = \frac{C_a}{C_{d_0}} \quad (18)$$

или по (1), (2)

$$\frac{a}{d_0} = \frac{C_a}{C_{d_0}} \cdot \frac{R}{E} \quad (19)$$

Что указывает на обобщенную линейность зависимости от радиуса площадки контактных осей давления.

3) Из безразмерных соотношений (15), (16) следует всеобщий кубический характер зависимостей параметров контакта от безразмерных компонентов $П_1$ и $П_2$.

2.2. Облегчение процедуры определения размерных параметров через безразмерные

1) при определении радиуса площадки контакта сначала строится кубическая зависимость (15) в виде одной кубической кривой;

2) для конкретной задачи определяется безразмерный параметр Π_1;

3) по (15) определяется параметр Π_a;

4) по зависимости $(4a)$ определяется радиус площадки контакта:

$$a = R\Pi_a \tag{20}$$

2.3. Аналогичным образом определяются

величины максимального контактного давления

$$\sigma_0 = R\Pi_{\sigma_0} \tag{21}$$

и величины сближения

$$U_0 = R\Pi_{u_0} \tag{22}$$

3. Размерные и безразмерные выражения для определения приведенного радиуса

3.1 Схема контакта тел двоякой кривизны

В соответствии с методом приведенного радиуса [3] контакт двух тел двоякой кривизны (рис.1).

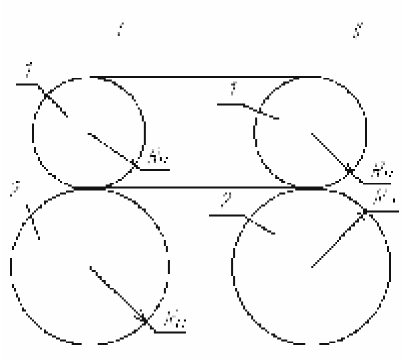

Рис. 1 – схема двух тел двоякой кривизны:
1 – первое тело; 2 – второе тело; I – первая главная плоскость симметрии
II – вторая главная плоскость симметрии

По схеме рис. 1 индексируются радиусы R_{ij}, в которых первый индекс соответствует номеру тела; j – второй индекс соответствует номеру главной плоскости симметрии.

3.2. Размерные формулы для приведенного радиуса R_* определяются из выражений

$$R_* = (R_1^* \cdot R_2^*)^{1/2}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{R_1^*} = (\pm\frac{1}{R_{11}} \pm \frac{1}{R_{12}}), \tag{24}$$

$$\frac{1}{R_2^*} = (\pm\frac{1}{R_{12}} \pm \frac{1}{R_{22}}). \tag{25}$$

Знак «+» ставится для выпуклых поверхностей, знак «–» соответствует вогнутым поверхностям .

3.3. Безразмерное представление приведенного радиуса

1) в качестве базового возьмем радиус R_{11};

2) слева и справа в (24) умножив на R_{11}, имеем

$$\frac{R_{11}}{R_1^*} = (\pm 1 \pm \frac{R_{11}}{R_{12}}) \tag{26}$$

или вводя обозначение безразмерного радиуса R_1^* в первой плоскости

$$\frac{1}{R_1^*} = (\pm 1 \pm \frac{R_{11}}{R_{12}}); \tag{26, а}$$

3) аналогично получаем выражение для второго безразмерного радиуса

$$\frac{R_{11}}{R_2^*} = (\pm \frac{R_{11}}{R_{12}} \pm \frac{R_{11}}{R_{22}}) \tag{27}$$

$$\frac{1}{R_2^*} = (\pm \frac{R_{11}}{R_{12}} \pm \frac{R_{11}}{R_{22}}); \tag{27, а}$$

4) умножив в (23) справа и слева на R_{11}, получаем

$$\frac{R_{11}}{R_*} = (\frac{R_{11}}{R_1^*} \cdot \frac{R_{11}}{R_2^*})^{1/2}; \tag{28}$$

5) в итоге имеем выражение для безразмерного приведенного радиуса

$$\frac{1}{R_*} = (\frac{1}{R_1^*} \cdot \frac{1}{R_2^*})^{1/2} \tag{29}$$

или

$$\overline{R}_* = (\overline{R_1^*} \cdot \overline{R_2^*})^{1/2} \tag{30}$$

3.4 Главный вывод из приведенных рассуждений о безразмерном радиусе заключается в следующем:

Метод приведенного радиуса соответствует основным положениям теории подобия и размерностей чем подтверждается его научная обоснованность.

Выводы

1. В работе предложена безразмерная критериальная форма решения задачи о контакте шара и плоскости.

2 Предложена безразмерная форма решения задач о контакте тел двоякой кривизны методом обобщенного приведенного радиуса

3. Показано, что метод приведенного радиуса соответствует основным положениям теории подобия и размерностей, что является его научным обоснованием

Литература

1. Расчеты на прочность в машиностроении / под.ред. Пономарьова С.Д. том II.–М.:Машгиз, 1958.– 974 с.

2. Писаренко Г.С., Яковлев В.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов – Киев: Наукова думка, 1988. – 734 с.

3. Кузьменко А.Г. Развитие методов контактной трибомеханике. – Хмельницкий: ХНУ, 2010. – 270 с.

Надійшла 21.11.2011