

**Кузьменко А.Г.**Хмельницкий национальный университет,  
г. Хмельницкий, Украина**ВАРИАЦИОННО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ  
МЕТОД В КОНТАКТНОЙ МЕХАНИКЕ  
СДВИГОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
И НАПРЯЖЕНИЙ**

УДК 621.891

Вариационно-экспериментальный метод решения контактных задач о пластическом вдавлении инденторов распространяется на решение контактных задач о нелинейном (пластичность или скольжение) сдвиге прижатого индентора. Задача сведена к одному уравнению равновесия, которое удается решить в виде двухпараметрической функции напряжений трения. В более общем случае задача сводится к квадратичному функционалу, содержащему в качестве известной функции диаграммы сдвига индентора. Приведен перечень из десяти основных проблем подобных задач о сдвиге индентора. Решение задач из приведенного перечня может быть выполнено в первом приближении с помощью уравнения равновесия, а более точно с помощью функционала процесса.

**Ключевые слова:** контактная задача, нелинейный сдвиг, уравнения равновесия.

**Введение**

1. Среди множества методов механики твердого деформируемого тела, основанных на решении полной системы уравнений мы здесь снова (после [1]) обращаем внимание на вариационно-экспериментальный метод (ВЭМ), в котором условия сплошности обеспечиваются специально выбранными экспериментальными соотношениями. При этом решение задачи сводится к минимизации квадратичного функционала, параметры которого задаются из эксперимента.

2. Методика и результаты применения ВЭ-метода для решения пластических контактных задач в части определения контактных давлений подробно описаны в монографии [1].

3. В данной работе идеи ВЭ-метода распространяются на решение сдвиговых контактных задач с определением функций распределения напряжений трения.

Задача определения закономерностей распределения касательных напряжений или напряжений трения является одной из основных задач трибологии как науки о трении.

Именно трение приводит к износу, создавая основную проблему обеспечения надежности машин по износу.

4. В начальной части статьи п. 1 с целью знакомства с ВЭ-методом дается краткое изложение применения метода к вдавлению шара.

Далее дается представление о состоянии решения задачи о касательных напряжениях при упругом сдвиге шара до проскальзывания (задача Миндлина-Каттанео).

5. Нелинейность диаграммы сдвига, например, шара, может возникать по двум причинам: 1) наличие или возникновение пластических деформаций в поверхностном слое; 2) возникновение проскальзывания на части контакта.

В обоих случаях решение нелинейной задачи с заданными границами контакта классическими методами затруднено.

Далее показано решение этой задачи ВЭ-методом.

**1. Пластическое вдавление шара в плоскость. Вариационно-экспериментальный метод [1]****1.1. Постановка задачи**

1) дана функция диаграммы вдавления шара:

$$Q(u_0) = cu_0^n, \quad (1.1)$$

в форме степенной функции (1.1), где  $Q$  – сила;  $u_0$  – глубина вдавления;  $u(r)$  – контактные перемещения;  $c, n$  – параметры степенной функции;

2) уравнение равновесия шара на плоскости имеет вид:

$$Q = 2\pi R \int_0^{u_0} \sigma(u) du, \quad (1.2)$$

$$3) (1.1) \rightarrow (1.2) \Rightarrow cu_0^n = 2\pi R \int_0^{u_0} \sigma(u) du. \quad (1.3)$$

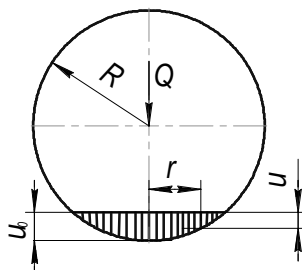


Рис. 1 – Схема пластического контакта шара и плоскости

### 1.2. Решение задачи определения функции давления из одного уравнения (1.3)

1) будем искать решения задачи в виде степенной функции:

$$\sigma = \xi u^\alpha, \quad (1.4)$$

с двумя параметрами  $\xi$  и  $\alpha$ ;

$$2) (1.4) \rightarrow (1.3) \Rightarrow \frac{c u_0^n}{2\pi R \xi} = \xi \int_0^{u_0} u^\alpha du = \frac{u_0^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \frac{c u_0^n}{2\pi R \xi} = \frac{u_0^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \quad (1.5)$$

Это одно уравнение с двумя неизвестными  $\xi$  и  $\alpha$ ;

3) при решении (1.5) будем исходить из условия, что это уравнение должно выполняться при любых значениях переменной  $u_0$ . Это условие выполнимо только при выполнении соотношения:

$$u_0^{n-\alpha+1} = 1,$$

или

$$n = \alpha + 1, \quad (1.6)$$

отсюда

$$\alpha = n - 1; \quad (1.7)$$

4) вторую неизвестную величину  $\xi$  определим из (1.5) с учетом (1.7):

$$\xi = \frac{c(\alpha+1)}{2\pi R}, \quad (1.8)$$

или

$$\xi = \frac{cn}{2\pi R}. \quad (1.9)$$

### 1.3. Анализ решения

1) найдем величину коэффициента концентрации давлений  $k_\sigma$  или соотношение  $\sigma_0 / \sigma_{cp}$  с учетом (1.4), (1.7), (1.9):

$$k_\sigma = \frac{\sigma_0}{\sigma_{cp}} = \frac{\xi u_0^\alpha}{Q / \pi a^2} = \frac{cn}{2\pi R} \frac{\pi a^2 u_0^n}{c u_0^n u_0} = n, \quad (1.10)$$

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{cp}} = n, \quad (1.11)$$

или

$$\sigma_0 = n \sigma_{cp}; \quad (1.12)$$

2) то есть максимальное давление в  $n$  раз больше среднего, где  $n$  показатель степени функции диаграммы сдвига;

3) соотношением (1.12) устанавливается замечательный эффект связи двух функций: функции вдавливания  $Q = c u_0^n$ ; и функции распределения давления по площадке контакта  $\sigma_0 = n \sigma_{cp}$ ;

4) если в выполненном решении учесть упрочнение материала при пластическом деформировании, то оценка (1.12) уточняется с помощью модуля упрочнения  $E_T$ .

### 1.4. Функционал задачи

Если допустить справедливость уравнения равновесия (1.3) в любой момент процесса нагружения шара силой  $Q$ , то (1.3) можно привести к функционалу вида:

$$\phi = \int_0^{\bar{u}_0} [cu_0^n - 2\pi R \int_0^{u_0} \sigma(u) du]^2 du . \quad (1.13)$$

При использовании функционала типа (1.13) решение задачи может быть выполнено при наличии произвольного сила неизвестных.

Так, если решение искать в форме ряда:

$$\sigma(u) = \sum \xi_i u_i^k , \quad (1.14)$$

то после подстановки (1.14) в (1.13) задача сводится к отысканию экстремума функции многих переменных  $\xi_i$  :

$$\phi(\xi_i) . \quad (1.15)$$

Которая в свою очередь сводится к системе линейных алгебраических уравнений  $i$  – го порядка.

## 2. Сдвиг шара на плоскости

### 2.1. Упругий сдвиг решения Катталео-Миндлина [2]

1) упругое вдавливание шара в плоскость происходит с распределением давления  $\sigma(r)$  по Герцу:

$$\sigma(r) = \sigma_0 (1 - r^2 / a^2)^{1/2} ; \quad (2.1)$$

2) действие сдвиговой силы  $F$  может привести к контакту по двум участкам площадки контакта: участок сцепления и участок скольжения;

3) сцепление происходит по центральной круговой площадке ( $r = c$ ) с распределением касательных напряжений по зависимости:

$$\tau(r) = \tau_0 (1 - r^2 / a^2)^{-1/2} , \quad x < c , \quad (2.2)$$

где 
$$\tau_0 = \frac{F}{2\pi a^2} ; \quad (2.3)$$

4) частичное скольжение происходит по кольцевой площадке  $c < r < a$  с распределением касательных напряжений по зависимости:

$$\tau(r) = f \sigma_0 (1 - x^2 / r^2)^{1/2} , \quad c < x < a , \quad (2.4)$$

где  $f$  – коэффициент трения;

5) при возможном скольжении по всей круговой площадке контакта  $0 < r < a$  касательные напряжения описываются выражением аналогичным (2.4):

$$\sigma(r) = f \sigma_0 (1 - r^2 / a^2)^{1/2} , \quad 0 < r < a . \quad (2.5)$$

### 2.2. Сдвиг с нелинейной функцией диаграммы сдвига

Вид диаграммы сдвига.

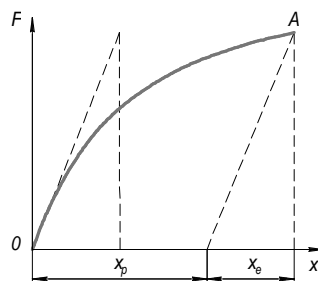


Рис. 2 – График нелинейной функции диаграммы сдвига:  
 $F$  – сила трения;  $x$  – перемещение шара на плоскости;  $A$  – нагрузка;  
 $AB$  – упругая разгрузка;  $x_e$  – упругое смещение при нагрузке и разгрузке

#### 2.2.1. Постановка задачи и допущения:

1) пусть известна степенная аппроксимация диаграммы сдвига шара:

$$F = cx^n . \quad (2.6)$$

Ставится задача определить функцию  $\tau(x)$  распределения касательных напряжений (напряжений трения) по площадке контакта по процессу сдвига  $\tau(x)$ ;

2) полагаем, что контактные давления распределены по Герцу (2.1), а радиальные контактные перемещения по параболе:

$$u(r) = \frac{a^2 - x^2}{2R}, \quad (2.7)$$

$$du = -\frac{x}{R} dx. \quad (2.8)$$

### 2.2.2. Уравнение равновесия системы

1) при сдвиге шара на расстояние  $x$  суммарная сила сдвига  $F(x)$  изменяется с величиной сдвига по степенному закону (2.6);

2) сила трения в любой момент  $dx$  процесса сдвига равна напряжению сдвига  $\tau(x)$ , умноженному на площадь сдвига:

$$dF(x) = B\tau(x)dx, \quad (2.9)$$

где  $B$  – ширина площадки контакта;

3) полная сила  $F(x)$  на интервале от 0 до  $x$  определяется:

$$F(x) = B \int_0^x \tau(x) dx. \quad (2.10)$$

Это уравнение равновесия в системе сдвига шара на плоскости в любой момент времени, характеризующийся координатой  $x$ .

### 2.2.3. Функционал задачи

1) в случае, если число параметров искомой функции  $\tau(x)$  больше двух, то одного уравнения (2.10) может быть недостаточно;

2) уравнение равновесия в заданный момент процесса сдвига можно обобщить на функционал, описывающий состояние равновесия в любой и каждый момент процесса нагружения сдвигом;

3) функционал формируемой по существу методом наименьших квадратов имеет вид:

$$\phi(x) = \int_0^{\bar{x}} [cx^n - B \int_0^x \tau(x) dx]^2 dx. \quad (2.11)$$

Задача отыскания функции касательных напряжений  $\tau(x)$  с помощью функционала (2.11) решается: путем задания искомой функции в виде ряда:

$$\tau(x) = \sum \xi_i x^k; \quad (2.12)$$

- после подстановки (3.12) в (2.11) функционал превращается в функцию многих переменных:

$$\phi(\xi_i); \quad (2.13)$$

- далее из условия экстремума функции многих переменных имеем:

$$\frac{\partial \phi(\xi_i)}{\partial \xi_i} = 0; \quad (2.14)$$

- из за квадратичности функционала задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

## 3. Пластический сдвиг шара

### 3.1. Решение одного уравнения равновесия (2.10)

1) для решения уравнения (2.10) необходимо выбрать форму искомой функции  $\tau(x)$ . По аналогии с упругим решением Миндлина-Каттанео (2.2) полагаем, что искомая функция  $\tau(x)$  представима в виде степенной функции вида:

$$\tau(x, \xi, \alpha) = \xi x^\alpha, \quad (3.1)$$

где  $\xi, \alpha$  – параметры искомой функции;

2) подставляя (2.15) и (3.1) в уравнение (2.10), получаем:

$$cx^n = B\xi \int_0^x x^\alpha dx, \quad (3.2)$$

после интегрирования и преобразований имеем разрешающее уравнение вида:

$$\frac{cx^n(\alpha+1)}{B\xi} = x^{\alpha+1}; \quad (3.3)$$

3) это уравнение с двумя неизвестными  $\alpha$ ,  $\xi$  имеет единственное решение в виде:

$$\alpha = n - 1, \quad (3.4)$$

$$\xi = \frac{c(\alpha+1)}{B} = \frac{cn}{B}; \quad (3.5)$$

4) с учетом этих соотношений решение (2.15) принимает вид:

$$\tau(x) = \frac{cn}{B} x^{n-1}. \quad (3.6)$$

### 3.2. Анализ решения

1) вид функции сдвиговых напряжений решающим образом зависит от показателя степени степенной аппроксимации функции диаграммы сдвига.

В большинстве случаев диаграмма сдвига имеет выпуклый вид что соответствует величине:

$$n < 1,$$

2) в этом случае функция (3.6) имеет гиперболическую форму:

$$\tau(x) = \frac{cn}{B} \frac{1}{x^{1-n}}, \quad (3.7)$$

так, что при  $x \rightarrow 0$ ,  $\tau(x) \rightarrow \infty$  и далее при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\tau(x) \rightarrow 0$ .

**Зуб текучести при растяжении:** 1) в некоторых материалах при непрерывном удлинении цилиндрического образца при удлинении на диаграмме зависимости нормального напряжения от деформации обнаруживается так называемый зуб текучести, то есть резкое снижение напряжения при неизменном напряжении, которое называется физическим пределом текучести;

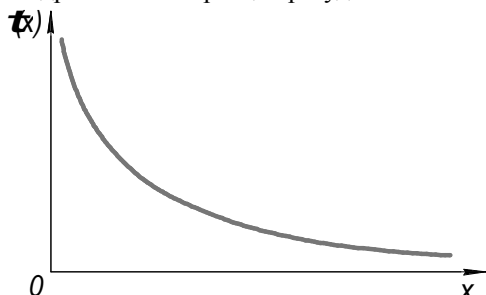


Рис. 3 – График функции  $\tau(x)$

2) горизонтальный участок диаграммы  $\sigma - \epsilon$  называется площадкой текучести; 3) если ее протяженность велика, материал называют идеально пластическим (неупрочняющимся); 4) если за площадкой текучести идет подъем кривой  $\sigma - \epsilon$ , материал называется упрочняющимся.

Известно, что пластичность при растяжении есть следствие скольжения материала при сдвиге по площадкам с максимальными касательными напряжениями; то есть зуб

пластичности при растяжении есть следствие сдвигов и реологических свойств материала при растяжении.

Зуб текучести при сдвиге: 1) детальными экспериментальными исследованиями диаграммы чистого сдвига в литературе нами не обнаружено; 2) однако, хорошо известны диаграммы кручения пластического материала с четкой выпуклой начальной частью диаграммы; 3) как следует из решения (3.7), эта выпуклость свидетельствует о наличии особенности (зуба пластичности) в зависимости  $\tau(\epsilon)$  в начальной стадии.

Из сказанного следует необходимость детально исследования зависимости  $\tau(\epsilon)$  при пластическим сдвиге, например шара; основой для этих исследований может служить решение задачи приведенное в п.3.

Очевидно, можно установить связь гиперболической функции трения из решения уравнения задачи (3.3) с хорошо известными зависимостями статистического и динамического трения от пути трения.

Максимальное значение трения (зуб трения) при переходе от статического трения (трения покоя) к трению движения. Этот эффект в трибологии обычно объясняется реологическими свойствами поверхностного слоя.

Таким образом, выпуклая кривая макро сдвига контакта, например, шаром и плоскости, или контакта поверхностей другой формы, является следствием гиперболической зависимости напряжений в контакте от величины перемещений сдвига.

### 3.3. Об использовании функционала задачи

Полученное решение (3.7) имеет особенность в точке  $x \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ , что может не соответствовать действительности. Полученный результат является следствием выбранной двухпараметрической формы решения (3.1).

Избежать особенности в решении можно выбрав, например, трехпараметрическую форму решения, например в виде:

$$\tau(\xi_1, x_0, \alpha, x) = \xi(x + x_0)^\alpha. \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в функционал (2.11), и воспользовавшись процедурой (2.13), (2.14) приходим к системе из трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными  $\xi$ ,  $\alpha$ ,  $x_0$ . После решения этой системы приходим к решению, исключаяющему особенность в точке  $x = 0$ . Очевидно, что это решение будет более близко к действительному, чем решение в форме (3.1).

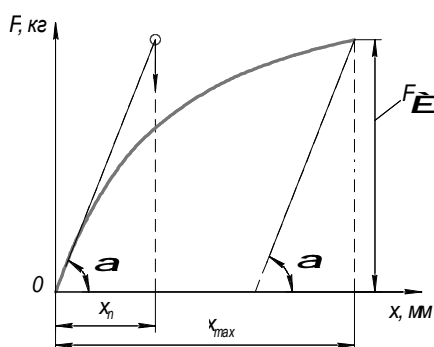


Рис. 4

## 4. Пластический сдвиг шара, решение в виде экспоненциальной функции

### 4.1. Причины и цели дальнейшего рассмотрения экспоненты

#### 4.1.1 Причины обращения к экспоненте

1) решение задачи о сдвиге шара путем использования одного уравнения равновесия при отыскании решается в виде степенной функции приводит к простому решению;

2) однако, это простое решение в наиболее распространенном случае имеет особенность в точке  $x = 0$ , то есть дает касательные напряжения, стремящиеся к бесконечности  $\tau(x \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ ;

3) эта особенность существенно снижает ценность решения, так как не соответствует действительному напряжению;

4) решения с особенностью можно избежать, используя функционал задачи и отыскивая решение в форме ряда (с минимум тремя членами); это более громоздко, но более точное решение;

5) в п. 4 делается предположительно, что если представлять экспериментальную зависимость  $F(x)$  силы трения при сдвиге от перемещения в виде экспоненты, а затем выполним решения для  $\tau(x)$  также в форме экспоненты можно при использовании уравнения равновесия можно получить сравнительно простое решение, но без особенности в точке  $x = 0$ ;

6) далее реализуется эта стратегия.

### 4.2. Функция диаграммы сдвига в форме экспоненты, и определение ее параметров

#### 4.2.1. Функция сдвига и ее анализ

1) представим функцию диаграммы сдвига в виде функции, содержащей экспоненту вида:

$$F(x) = F_\infty (1 - e^{-nx}); \quad (4.1)$$

2) значения функции в характерных точках:

$$F_\infty = F(x \rightarrow \infty), \quad (4.2)$$

$$F(x=0) = 0, \quad (4.3)$$

$$F(x=1/n) = F_\infty (1 - 1/e) = F_\infty \cdot 0,632,$$

$$\text{или} \quad \frac{F(x_n = 1/n)}{F_\infty} = 0,632; \quad (4.4)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = F_\infty n e^{-nx} = \frac{F_\infty}{x_n} = F'_0,$$

$$\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=0} = F_\infty n = F'_{x=0}. \quad (4.5)$$

4.2.2. *Первый приближенный способ определения параметров  $F_\infty$ ,  $n$  экспоненциальной аппроксимации функции*

1) принимаем:

$$F_\infty = F(x_{\max});$$

2) находим по графику функции  $F(x)$  графическим методом производную в точке:

$$x = 0, \quad F'_{x=0} = F'_0;$$

3) по (4.5) определяем показатель степени экспоненциальной функции (4.1):

$$n = \frac{F'_0}{F_\infty}. \quad (4.6)$$

4.2.3. *Определение параметров  $F_\infty$ ,  $n$  аппроксимирующей функции (4.1) по двум точкам*

1) выберем на экспериментальной функции  $F(x)$  две базовые точки:

$$(F_1, x_1), (F_2, x_2);$$

2) (4.7)→(4.1)→систему двух уравнений с двумя неизвестными  $F_\infty$ ,  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_\infty (1 - e^{-nx_1}) \\ F_2 &= F_\infty (1 - e^{-nx_2}) \end{aligned} \right\}; \quad (4.8)$$

3) отсюда имеем уравнение с неизвестной величиной  $n$ :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1 - e^{-nx_1}}{1 - e^{-nx_2}}; \quad (4.9)$$

4) очевидно, решение этого нелинейного уравнения в замкнутом виде затруднено, поэтому в дальнейшем будем пользоваться приближенным способом п. 4.2.2.

### 4.3. Уравнение равновесия задачи и его решение

#### 4.3.1. Уравнение равновесия

1) с учетом (4.1) уравнение равновесия сил и напряжений трения (2.10) принимают вид:

$$F_\infty (1 - e^{-nx}) = B \int_0^x \tau(x) dx; \quad (4.10)$$

2) будем искать решение уравнения (4.10) в форме убывающей экспоненты:

$$\tau(x) = \tau_0 e^{-\alpha x}; \quad (4.11)$$

3) подставляя (4.11) в (4.10), получаем:

$$F_\infty (1 - e^{-nx}) = B \tau_0 \int_0^x e^{-\alpha x} dx, \quad (4.12)$$

или после интегрирования:

$$\frac{F_\infty}{B \tau_0} (1 - e^{-nx}) = \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^x,$$

$$\frac{-\alpha F_\infty}{B \tau_0} (1 - e^{-nx}) = (e^{-\alpha x} - 1). \quad (4.13)$$

4.3.2. Решение одного уравнения равновесия (4.13) с двумя неизвестными  $\alpha$  и  $\tau_0$ 

1) перепишем уравнение равновесия (4.13) в виде:

$$\frac{-\alpha F_{\infty}}{B\tau_0}(1 - e^{-nx}) = (1 - e^{-\alpha x}); \quad (4.14)$$

2) уравнение (4.14) может выполняться при любых значениях переменной  $x$  только в одном случае, если показатели степени  $n$ ,  $\alpha$  при экспонентах слева и справа одинаковы, т.е. равны между собой:

$$\alpha = n; \quad (4.15)$$

3) вторая неизвестная величина определяется и (4.14) с учетом (4.15):

$$\tau_0 = \frac{nF_{\infty}}{B}; \quad (4.16)$$

4) таким образом, решение искомой задачи о распределении касательных напряжений или напряжений трения  $\tau(x)$  по (4.11) с учетом (4.15) и (4.16) имеет вид.

## 5. Порядок и примеры практического использования решения

## 5.1. Порядок использования решения в форме

5.1.1. Определение величины  $F_{\infty}$  и  $n$ 

1) снять диаграмму сдвига контактирующих поверхностей  $F(x)$  и представить график нагрузки и разгрузки;

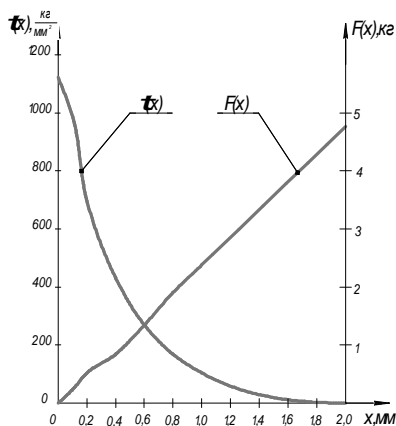


Рис. 5 – Схема определения  $F_{\infty}$ ,  $x_n$ , и  $n$

2) процесс разгрузки можно приближенно построить параллельно касательной к точке начала процесса;

3) приближенно принимаем:

$$F_{\infty} = F(\epsilon_{\max});$$

4) из точки  $F_{\max} \cdot x_{\max}$  проводим линию параллельно оси  $x$  до пересечения с касательной в точке  $F = 0$ ,  $x = 0$ ;

5) из полученной точки пересечения опускаем перпендикуляр на ось  $x$  до точки  $x_n$ ;

6) показатель степени экспоненты  $n$  определяется по (4.6):

$$n = \frac{F'_0}{F_{\infty}} = \frac{F_{\infty}}{x_n F_{\infty}} = \frac{1}{x_n}; \quad (4.16a)$$

7) максимальное напряжения трения в контакте  $\tau_0$  определяется по (4.16):

$$\tau_0 = \frac{nF_{\infty}}{B}. \quad (4.17)$$



5.1.2. Определение величины  $B$  и  $\tau(x)$ 

1) по смыслу (2.9) величина  $B$  – это размер площадки контакта в направлении перпендикулярном направлению сдвига;

2) часто в исходных данных эксперимента задается фактическая площадь контакта  $A_r$ ; если площадка квадратная, то:

$$B = A_r^{1/2},$$

если площадка круговая, то:

$$\begin{aligned} A_r &= \pi n^2 / 4, \\ B &= \left( \frac{4A_r}{\pi} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (4.18)$$

3) распределение напряжений трения по пути сдвига по (4.11):

$$\tau(x) = \tau_0 e^{-nx}, \quad (4.19)$$

где  $\tau_0$  по (4.17),  $n$  по (4.16а).

5.1.3. Построить график зависимости  $\tau(x)$  и сделать его анализ

## 5.2. Использование диаграммы сдвига по Максону В.И. [3]

## 5.2.1. Исходные данные

- методика испытаний подробно изложены в [3];

- номинальная площадь контакта до  $50 \text{ см}^2 = 49 \text{ см}^2 - 4900 \text{ м}^2$ ;

- номинальная нагрузка  $N_1 = 5 \text{ кг}$ ,  $N_2 = 15 \text{ кг}$ ,  $N_3 = 25 \text{ кг}$ ,  $N_4 = 35 \text{ кг}$ ,  $N_5 = 45 \text{ кг}$ .

1) для определения  $\tau(x)$  используем диаграмму сдвига, полученную при  $N_5 = 45 \text{ кг}$ ;

2) в соответствии с методикой, изложенной в п.5.1 определяем по графику:

$$F_\infty = F(x_{\max} = 0,9 \text{ мкм}) = 33 \text{ кг};$$

3) в соответствии с методикой находим:

$$x_n = 0,42 \text{ мкм};$$

4) показатель степени экспоненты по (4.16а)

$$n = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{0,42} = 2,38 \frac{1}{\text{мкм}} = 2,38 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

5) параметр  $B$  определяем по (4.17)

$$B = (A_a)^{1/2} = (4,900)^{1/2} = 70 \text{ мм};$$

6) максимальное напряжение трения по (4.16 а)

$$\tau_0 = \frac{nF_\infty}{B} = \frac{2,38 \cdot 10^3 \cdot 33}{70} = 1122 \text{ кг/мм}^2.$$

5.2.2. Построение графика функции  $\tau(x)$   $\tau_0 = 1122 \text{ кг/мм}$ ,  $x_n = 0,42$ 

| $x$ , мкм | $x/x_n$ | $\tau(x)/\tau_0, e^{-nx} = e^{-x/x_n}$ | $\tau(x)$ , кг/мм <sup>2</sup> |
|-----------|---------|--|--------------------------------|
| 0         | 0       | 1,0                                    | 1122                           |
| 0,1       | 0,23    | 0,7945                                 | 991                            |
| 0,2       | 0,476   | 0,621                                  | 697                            |
| 0,4       | 0,952   | 0,386                                  | 433                            |
| 0,6       | 1,428   | 0,24                                   | 269                            |
| 0,8       | 1,904   | 0,15                                   | 168                            |
| 1,0       | 2,38    | 0,093                                  | 103,7                          |
| 2,0       | 4,762   | 0,0085                                 | 9,54                           |

## 6. Подобные проблемы

Будем называть подобными те проблемы или задачи, в которых ставится задача определить распределение сдвиговых нагрузок по элементам системы, если из эксперимента известна интегральная функция или зависимость суммарной нагрузки от общей деформации системы.

К таким подобным системам можно отнести следующие:

- 1) распределение нагрузок по виткам резьбового соединения;
- 2) распределение нагрузок по зубьям зубчатой муфты;
- 3) распределение нагрузки по элементам любой упругой муфты;
- 4) распределение нагрузки и напряжений по сварочным швам при осевой нагрузке;
- 5) распределение сил трения между листами листовой рессоры;
- 6) распределение нагрузки по сцепным устройствам ж.д. состава
- 7) распределение сил трения по тормозным устройствам;
- 8) определение наиболее нагруженного элемента в схеме переползания элементов в частности в системе дислокаций в кристаллах;
- 9) детальное экспериментальное исследование диаграммы сдвига  $\tau(\epsilon)$  при чистом сдвиге и кручении в задачах определения механических свойств материалов;
- 10) распределение  $\tau$  при: основном сдвиге прессового соединения; при сдвиге моментом.

## 7. Выводы и научная новизна результатов

1. Вариационно-экспериментальный метод решения контактных задач о пластическом вдавливании инденторов [1] здесь развит или распространен на решение контактных задач о нелинейном (пластичность или скольжение) сдвиге прижатого индентора, например, шара.

2. В простейшем случае задача сведена к одному уравнению равновесия, которое удается решить в виде двухпараметрической функции напряжений трения с особенностью в точке  $x = 0$ .

3. В более общем случае задача сводится к квадратичному функционалу, содержащему в качестве известной функции диаграммы сдвига индентора. В этом случае решение может быть выполнено в виде ряда с любой наперед заданной точностью.

4. Из анализа простейшего решения задачи следует, что выпуклую диаграмму сдвига индентора можно объяснить гиперболическим характером функции контактных напряжений трения движения со скачком напряжений трения при переходе от трения покоя к трению движения.

5. Указан порядок решения задачи о распределении напряжений трения по диаграмме сдвига через квадратичный функционал процесса.

6. Приведен перечень из десяти основных проблем патологически подобных задач о сдвиге индентора. Решение задач из приведенного перечня может быть выполнено в первом приближении с помощью уравнения равновесия, а более точно с помощью функционала процесса.

## Литература

1. Кузьменко А.Г. Пластический контакт. Вариационно-экспериментальный метод. – Хмельницкий: ХНУ, 2009. – 359 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. Максак В.И. Предварительное смещение и жесткость механического контакта. – М.: Наука, 1975. – 60 с.
4. Левин З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. – М.: Машиностроение, 1971. – 364 с.

Поступила в редакцию 22.02.2013

**Kuzmenko A.G.** Variation-experimental method in contact mechanics of moving from a change and tensions.

The variation-experimental method of decision of contact tasks about the plastic pressing of indentors is widespread on the decision of contact tasks about the nonlinear (plasticity or sliding) change of pinned indenter. A task is taken to one equalization of equilibrium which succeeds to be decided as a two-parameter function of tensions of friction. In more general case a task is taken to the quadratic functional, to containing as the known function of diagram of change of indenter. A list is resulted from ten basic problems of similar tasks about the change of indentora. The decision of tasks from the resulted list can be executed in the first approaching by equalization of equilibrium, and more exactly by the functional of process.

**Keywords:** contact task, nonlinear change, equalizations of equilibrium

### References

1. Kuz'menko A.G. Plasticheskij kontakt. Variacionno-jeksperimentalnyj metod, Hmel'nickij,. HNU, 2009, 359 p.
2. Dzhonson K. Mehanika kontaktnogo vzaimodejstvija, Mir, 1989, 510 p.
3. Maksak V.I. Predvaritelnoe smeshhenie i zhestkost mehanicheskogo kontakta, Nauka, 1975, 60 p.
4. Levin Z.M., Reshetov D.N. Kontaktnaja zhestkost' mashin, Mashinostroenie, 1971, 364 p.