Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 15–16, 2012.

О представлении β-равномерных алгебр

М. И. Караханян
Ереванский государственный университет
E-mail: m_karakhanyan@yahoo.com

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются свойства представления β-равномерной алгебры $A(\Omega)$ (см. [1,2]) соответственно в алгебрах всех ограниченных линейных операторов $BL(M(\Omega))$ и $BL(L^p(\mu))$ $(1 \leq p \leq \infty)$, учитывая свойства Бишоп-Шиловского антисимметричного разбиения Ω, для β-равномерных алгебр (см. [3, 4]), где Ω есть локально компактное хаусдорфово пространство, $M(\Omega)$ – пространство всех конечных комплексных регулярных мер на Ω, а $L^p(\mu)$ – соответствующее пространство, порожденное мерой $\mu \in M(\Omega)$.

Отметим, что на важность такого подхода в теории операторов было впервые отмечено П. Фойашем в работе [5] (см. также [6]).

Рассмотрим представление T β-равномерной алгебры $A(\Omega)$ в $BL\,(M(\Omega))$ по формуле $T_f(\mu) = f\mu$, где $f\mu$ – мера из $M(\Omega)$, такая, что для каждого $g \in C(\Omega)_\beta$

$$\int\limits_\Omega g\, d(T_f\mu) = \int\limits_\Omega gf\, d\mu\,.$$

В силу теоремы Бака (см. [1,2]) данное представление является корректным.

Рассмотрим также представление T алгебры $A(\Omega)$ в $BL\,(L^p(\mu))$, где $T_f g = fg$ если $f \in A(\Omega)$, а $g \in L^p(\mu)$. Учитывая тот факт, что $f \in A(\Omega)$ непрерывен, нетрудно видеть, что это представление также корректно.

Заметим, что в случае, когда Ω – компакт мы имеем дело с представлением равномерной алгебры.

Пополнение образа $T(A(\Omega))$ в сильной и слабой операторных топологиях алгебры $BL\,(M(\Omega))$ обозначим соответственно через $A(\Omega)_{st}$ и $A(\Omega)_w$, а через $A_p(\mu)$ пополнение образа $T(A(\Omega))$ в слабой операторной топологии алгебры $BL\,(L^p(\mu))$. Ясно, что $T(A(\Omega)) \subset A(\Omega)_{st} \subset A(\Omega)_w$.

Пусть $A^\perp(\Omega)$ – пространство всех мер из $M(\Omega)$, которые ортогональны к алгебре $A(\Omega)$. По теореме о биполяре (см. [7]) $A^{\perp\perp}(\Omega) = A(\Omega)$, так как $A(\Omega)$ есть β-равномерная алгебра на Ω.

Обозначим через $\mathcal{P}(A(\Omega))$ все множества пика алгебры $A(\Omega)$, а через $\mathcal{R}(A(\Omega))$ все p-множества алгебры $A(\Omega)$ (см. [7, 8]) . Тогда $\mathcal{P}(A(\Omega))$ и $\mathcal{R}(A(\Omega))$ являются решетками относительно операций $E_1 \wedge E_2 = E_1 \cap E_2$ и$E_1 \vee E_2 = E_1 \cup E_2$.

Пусть $\mathcal{P}(\widehat{A(\Omega)})$ и $\mathcal{R}(\widehat{A(\Omega)})$ есть соответственно множество всех проекторов отвечающие соответственно множествам $\mathcal{P}(A(\Omega))$ и $\mathcal{R}(A(\Omega))$. Из [3] следует, что $\mathcal{P}(\widehat{A(\Omega)})$ и $\mathcal{R}(\widehat{A(\Omega)})$ есть решетки, относительно операций $P_{E_1} \wedge P_{E_2} = P_{E_1} \cdot P_{E_2}$ и $P_{E_1} \vee P_{E_2} = P_{E_1} + P_{E_2} - P_{E_1}P_{E_2}$.

Для дальнейшего важны следующие утверждения

Предложение 1 Пусть $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$ есть β-равномерные алгебры на Ω. Если $A(\Omega) \neq B(\Omega)$, то тогда $A(\Omega)_w \neq B(\Omega)_w$.

Учитывая теорему 1 из [3] нетрудно видеть, что имеет место.

Предложение 2 Существуют гомоморфизмы из $\mathcal{P}(A(\Omega))$ в $\mathcal{P}(\widehat{A(\Omega)})$ и из $\mathcal{R}(A(\Omega))$ в $\mathcal{R}(\widehat{A(\Omega)})$.

2. Основные результаты

Применение вышеуказанных предложений приводит к следующим основным результатам.

Теорема 1 Пусть $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$ есть β-равномерные алгебры на Ω. Если для каждого $\mu \in A^{\perp}(\Omega)$, $B_p(\mu) \subseteq A_p(\mu)$ при некотором p, где $1 \leq p \leq \infty$, то тогда $B(\Omega) \subseteq A(\Omega)$.

Теорема 2 Пусть $A(\Omega)$ и $B(\Omega)$ есть β-равномерные алгебры на Ω, у которых одно и тоже Бишоп- Шиловское разложение Ω максимальными множествами антисимметрии. Если для каждой меры $\mu \in A^{\perp}(\Omega)$, $A_p(\mu) = B_p(\mu)$ при некотором p, где $1 \leq p \leq \infty$, то тогда $A(\Omega) = B(\Omega)$.

Теорема 3 Пусть мера $\mu \in M(\Omega)$ и $supp(\mu) = F$. Если для каждого $P \in \mathcal{P}(\widehat{A(\Omega)})$, $supp(P\mu) = \{0 \text{ или } F\}$, то множество F является множеством антисимметрии для алгебры $A(\Omega)$.

Так как $\mathcal{P}(\widehat{A(\Omega)})$ есть решетка всех проекторов алгебры $A(\Omega)_w$, то учитывая свойства Бишоп- Шиловского разбиения Ω на максимальные множества антисимметрии ($\Omega = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} m_\alpha$, $m_\alpha \cap m_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$) имеет место

Теорема 4 Пусть T $-$ непрерывное представление алгебры $A(\Omega)_w$ в банаховом пространстве Y. Тогда $T = \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha$, где T_α $-$ представление $P_\alpha(A(\Omega)_w)$ в Y.

Список литературы

[1] Buck R.C., Bounder continuous functions on a locally compact space. Michigan, Math. J. V. 5, N. 2, 1958, 95-104.

[2] Karakhanyan M.I., Khor'kova T.A., A characterization property of the algebra $C(\Omega)_\beta$. Siberian Math. J. V. 50, N. 1, 2009, 77-85.

[3] Григорян С.А., Караханян М.И., Хорькова Т.А. О β-равномерных алгебрах Дирихле. Известие НАН Армении, Математика. Т. 45, N 6, 2010, 17-26.

[4] Gliksberg I., Bishops generalized Stone-Weierstrass theorem for the strict topology. Proc. Amer. Math. Soc., V. 14, 1963, 329-333.

[5] Sz. Nagy B., Foias C. Une relation parmi les vecteurs propres d'un operateur de l'espace de Hilbert et de l'operateur adjoint. Acta Sci. Math. Sreged 20, 1959, 91-96.

[6] Mlak W., Decompositions of operator-valued representations of function algebra. Studia Math. J. XXXVI, 1970, 111-123.

[7] Шефер Х., Топологические векторные пространства. Изд. "Мир", Москва, 1971.

[8] Гамелин Т., Равномерные алгебры. Изд. "Мир", Москва, 1973.