# KEKONVERGENAN BARISAN DI DALAM RUANG FUNGSI KONTINU $C[a,b]$


**Firdaus Ubaidillah[1], Soeparna Darmawijaya, Ch. Rini Indrati**

[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
e-mail: firdaus_u@yahoo.com



**ABSTRAK**

Diberikan $C[a,b]$ merupakan koleksi semua fungsi kontinu bernilai real pada selang tertutup $[a,b]$. $C[a,b]$ merupakan ruang linear atas lapangan real. Dalam tulisan ini dibahas pengertian-pengertian norma, barisan konvergen, terbatas dan monoton, infimum dan supremum dan lain-lain yang semuanya disajikan dalam bahasa fungsi kontinu. Selain itu akan ditunjukkan bahwa barisan yang terbatas dan monoton di dalam ruang fungsi kontinu $C[a,b]$ belum tentu konvergen. Satu sifat yang menjamin sebuah barisan memiliki supremum atau infimum akan dibahas.



**Kata kunci**: Barisan konvergen, Fungsi kontinu bernilai real, Ruang fungsi kontinu



**ABSTRACT**

*Let C[a,b] be a collection of all real-valued continuous functions on a closed interval [a, b]. The C[a,b] is a linear space over the real field. In this paper, we discussed some notions of norm, monotone, bounded and convergent sequence, infimum and supremum and others of which are presented in the language of continuous functions. They will also be shown that bounded and monotone sequence in the continuous functions space C[a,b] is not necessarily convergent. A property that ensures a sequence has a supremum or infimum will be discussed.*



***Keywords:*** *Convergent sequence, Continuous real-valued function, Continuous function space*


---

## PENDAHULUAN

Telah banyak dibahas sifat-sifat fungsi kontinu bernilai real pada selang tertutup $[a,b]$ oleh Bartle dan Sherbert (2000), diantaranya sifat terbatas, mencapai nilai maksimum dan minimum, dapat didekati dengan fungsi tangga, merupakan fungsi kontinu seragam, terintegral Riemann dan lain sebagainya. Dalam tulisan ini, $C[a,b]$ menyatakan koleksi semua fungsi kontinu bernilai real pada selang tertutup $[a,b] \subset \mathbb{R}$, yakni $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu. Pembahasan beberapa sifat dasar $C[a,b]$ banyak dijumpai dalam ruang Banach klasik diantaranya oleh Lindenstrauss dan Tsafriri (1977), Diestel (1984), Meyer-Nieberg (1991), Albiac dan Kalton (2006), dan lain-lain.

Jika didefinisikan penjumlahan dan perkalian skalar di $C[a,b]$ berturut-turut

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

untuk setiap $f,g \in C[a,b], x \in [a,b]$, dan

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

untuk setiap $f \in C[a,b], \alpha \in \mathbb{R}, x \in [a,b]$, maka $\alpha f, (f+g) \in C[a,b]$. Oleh karena itu $C[a,b]$ merupakan ruang linear atas lapangan $\mathbb{R}$ (Yeh, 2006). Lebih jauh, jika diberikan norma pada $C[a,b]$ yang didefinisikan

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$$

untuk setiap $f \in C[a,b]$, maka $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ merupakan ruang Banach (Dales, 2003).

Dua anggota $f$ dan $g$ di dalam $C[a,b]$ dikatakan

i. $f = g$ jika $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$;
ii. $f < g$ jika $f(x) < g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$;
iii. $f \le g$ jika $f(x) \le g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Berdasarkan pengertian di atas, mudah dipahami bahwa $C[a,b]$ merupakan **himpunan terurut parsial** (*partially ordered set*) terhadap relasi "$\le$".

Dua anggota $f$ dan $g$ di dalam $C[a,b]$ dikatakan **dapat dibandingkan** (*comparable*) jika $f \le g$ atau $g \le f$ dan dikatakan **tidak dapat dibandingkan** (*incomparable*) jika tidak berlaku $f \le g$ dan $g \le f$. Selanjutnya jika dianggap penting, penulisan $f < g$ dan $f \le g$ berturut-turut dapat digantikan dengan $g > f$ dan $g \ge f$.

Selanjutnya didefinisikan **fungsi nol** (*null function*) $\theta$ dan **fungsi satuan** (*unit function*) $e$ di dalam $C[a,b]$ berturut-turut dengan

$\theta(x) = 0$ dan $e(x) = 1$

untuk setiap $x \in [a,b]$.

Karena setiap $f, g, h \in C[a,b]$ dan $f \leq g$ berlaku

i. $f + h \leq g + h$
ii. $\gamma f < \gamma g$ untuk setiap bilangan $\gamma > 0$,

maka disimpulkan bahwa $C[a,b]$ merupakan ruang Riesz. Lebih jauh, jika didefinisikan perkalian di dalam $C[a,b]$, yakni $(fg)(x) = f(x)g(x)$ untuk setiap $f, g \in C[a,b]$ dan setiap $x \in [a,b]$ maka $fg \in C[a,b]$. Oleh karena itu $C[a,b]$ merupakan aljabar Banach dengan unsur satuan $e$ (Dales, 2003 ).

Dalam tulisan ini, akan diperkenalkan pengertian norma dalam "bahasa" fungsi kontinu. Untuk membedakan pengertian norma pada umumnya dengan norma dalam bahasa fungsi kontinu, untuk itu digunakan notasi norma*.

**Definisi 1.** (Darmawijaya, 2012) *Sebuah fungsi* $\|\cdot\|^*: C[a,b] \to C[a,b]$ *dikatakan **norma*** (norm*) pada* $C[a,b]$ *jika* $\|\cdot\|^*$ *memenuhi sifat-sifat*

*i.* $\|f\|^* \geq \theta$, *untuk setiap* $f \in C[a,b]$;
$\|f\|^* = \theta$ *jika dan hanya jika* $f = \theta$;
*ii.* $\|\alpha f\|^* = |\alpha|\|f\|^*$, *untuk setiap* $f \in C[a,b]$ $\alpha \in \mathbb{R}$;
iii. $\|f + g\|^* \leq \|f\|^* + \|g\|^*$, *untuk setiap* $f, g \in C[a,b]$.

Sekarang didefinisikan nilai mutlak $|\cdot|$ di dalam $C[a,b]$ dengan

$|f|(x) = |f(x)|$, untuk setiap $x \in [a,b]$.

Karena $|\cdot|$ memenuhi semua sifat dalam Definisi 1, maka $|\cdot|$ merupakan sebuah norma* pada $C[a,b]$.

Berkaitan dengan hal-hal tersebut di atas, tujuan dalam tulisan ini adalah membahas kekonvergenan barisan di dalam $C[a,b]$ dengan norma* $|\cdot|$ yang dijelaskan di atas dalam "bahasa" fungsi kontinu, yang mempunyai arti cukup bekerja di dalam $C[a,b]$. Namun begitu, untuk memudahkan pembuktian teorema dan perhitungan, dalam beberapa kasus akan dibawa ke fungsi real.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Dalam bagian ini akan dibahas beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan untuk membahas kekonvergenan barisan di dalam $C[a,b]$. Di akhir bagian ini dibahas syarat suatu barisan memiliki supremum atau infimum.

Untuk setiap $f, g \in C[a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, yang dimaksud dengan fungsi

i. $\frac{f}{g}$ adalah fungsi yang didefinisikan $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ asalkan $g(x) \neq 0$,
ii. $f \vee g$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $(f \vee g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$,
iii. $f \wedge g$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $(f \wedge g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$,
iv. $\sqrt{f}$ adalah fungsi yang didefinisikan dengan $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ dengan $f(x) \geq 0$,
v. $f^{-1} = \frac{e}{f}$ jika $f > \theta$ atau $f < \theta$,

untuk setiap $x \in [a,b]$.

Telah ditunjukkan oleh Bartle dan Sherbert (2000), bahwa jika $f, g \in C[a,b]$, maka $f \vee g$, $f \wedge g$, $\sqrt{f}$ $(f(x) \geq 0)$ dan $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ di dalam $C[a,b]$. Oleh karena itu $C[a,b]$ merupakan sebuah **aljabar** (*algebra*), lebih jauh $C[a,b]$ sebuah **aljabar Banach** (*Banach algebra*) (Dales, 2003).

Berikut diberikan pengertian himpunan terbatas ke atas, himpunan terbatas ke bawah dan himpunan terbatas di dalam $C[a,b]$.

**Definisi 2.** *Sebuah himpunan* $A \subset C[a,b]$ *tidak kosong dikatakan*

*i.* ***terbatas ke atas*** *(bounded above) jika terdapat* $q \in C[a,b]$ *sehingga* $h \leq q$ *untuk setiap* $h \in A$; *selanjutnya* $q$ *disebut* ***batas atas*** *(upper bound) himpunan* $A$;
*ii.* ***terbatas ke bawah*** *(bounded below) jika terdapat* $p \in C[a,b]$ *sehingga* $p \leq h$ *untuk setiap* $h \in A$; *selanjutnya* $p$ *disebut* ***batas bawah*** *(lower bound) himpunan* $A$;
*iii.* ***terbatas*** *(bounded) jika* $A$ *terbatas ke atas dan terbatas ke bawah atau himpunan* $A$ *dikatakan terbatas jika terdapat* $t \in C[a,b]$ *dan* $t > \theta$ *sehingga* $|h| \leq t$ *untuk setiap* $h \in A$.

Selanjutnya diperkenalkan pengertian batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu himpunan.

**Definisi 3**. *Diberikan himpunan $A \subset C[a,b]$ tidak kosong.*

*i.* *Himpunan $A$ terbatas ke atas. Titik $s \in C[a,b]$ disebut **batas atas terkecil** (least upper bound) atau **supremum** $A$ jika $s$ adalah batas atas $A$ dan untuk setiap $v$ batas atas $A$ berlaku $s \leq v$. Dalam kasus ini ditulis*
$$s = sup(A).$$
*ii.* *Himpunan $A$ terbatas ke bawah. Titik $r \in C[a,b]$ disebut **batas bawah terbesar** (greates lower bound) atau **infimum** $A$ jika $r$ adalah batas bawah $A$ dan untuk setiap $u$ batas bawah $A$ berlaku $r \leq u$. Dalam kasus ini ditulis*
$$r = inf(A).$$

Dari pengertian ini, belum tentu benar bahwa setiap himpunan terbatas ke atas (bawah) memiliki supremum (infimum), lihat Contoh 10 dan Contoh 11. Dalam kasus himpunan $A \subset C[a,b]$ hingga, maka $A$ memiliki supremum dan infimum, dan

$$\sup(A) = \bigvee_{h\in A} h \quad \text{dan} \quad \inf(A) = \bigwedge_{h\in A} h.$$

Dalam Definisi 4 berikut ini diberikan pengertian dari barisan konvergen dan barisan Cauchy di dalam $C[a,b]$ dan dilanjutkan dengan sebuah contoh barisan konvergen (Contoh 5).

**Definisi 4**. *Sebuah barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ dikatakan*

*i.* ***konvergen** (converges) jika ada $f \in C[a,b]$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku*
$$|f_n - f| < \varepsilon e.$$
*Jika demikian halnya, barisan $\{f_n\}$ dikatakan **konvergen** (convergent) ke $f$ atau barisan $\{f_n\}$ mempunyai limit $f$ untuk $n \to \infty$ dan dituliskan dengan*
$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$
*ii.* ***barisan Cauchy** (Cauchy sequence) jika setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K$ sehingga untuk setiap $m, n \geq K$ berlaku*
$$|f_m - f_n| < \varepsilon e.$$

**Contoh 5.** Diberikan barisan $\{f_n\} \subset C[0,1]$ yang didefinisikan

$f_n(x) = \frac{x}{n}$ , untuk setiap $x \in [0,1]$.

Barisan $\{f_n\}$ merupakan barisan konvergen ke $\theta$, sebab jika diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang maka dipilih bilangan asli $K > 1/\varepsilon$, sehingga jika untuk setiap $n \geq K$ diperoleh

$$|f_n(x) - \theta(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \theta$.

Selanjutnya dibahas beberapa sifat dasar barisan konvergen diantaranya ketunggalan limit barisan dan keterbatasan barisan yang konvergen berturut-turut disajikan dalam Teorema 6 dan Teorema 7.

**Teorema 6.** *Jika barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ konvergen, maka limit barisan $\{f_n\}$ tunggal.*
*Bukti*: Anggap $f, g \in C[a,b]$ sehingga barisan $\{f_n\}$ konvergen ke $f$ dan $g$. Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat dua bilangan asli $n_0$ dan $m_0$ sehingga

$$|f_n - f| < \tfrac{\varepsilon}{2} e \ \text{ jika } n \geq n_0$$

dan

$$|f_n - g| < \tfrac{\varepsilon}{2} e \text{ jika } n \geq m_0.$$

Oleh karena itu untuk setiap bilangan asli $n \geq maks\{n_0, m_0\}$ diperoleh
$$|f - g| \leq |f_n - f| + |f_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}e + \frac{\varepsilon}{2}e = \varepsilon e.$$
Jadi $f = g$. ■

**Teorema 7**. *Jika barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ konvergen, maka $\{f_n\}$ terbatas.*
*Bukti*: Diberikan barisan $\{f_n\}$ konvergen ke $f \in C[a,b]$ dan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Terdapat bilangan asli $K$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ dipunyai

$$|f_n - f| < \varepsilon e.$$

Untuk setiap $n \geq K$ diperoleh

$$|f_n| = |f_n - f + f| \leq |f_n - f| + |f| < \varepsilon e + |f|.$$

Selanjutnya diambil

$$p = \left(\bigvee_{n=1}^{K-1} |f_n|\right) \vee (\varepsilon e + |f|).$$

Jadi diperoleh $|f_n| \leq p$ untuk setiap bilangan asli $n$, atau dengan kata lain $\{f_n\}$ terbatas. ■

Berikutnya dibahas pengembangan lebih lanjut sifat-sifat kekonvergenan barisan yang disajikan dalam Teorema 8 dan Teorema 9.

**Teorema 8.** *Diberikan sebarang bilangan $\gamma \in \mathbb{R}$ dan barisan-barisan $\{f_n\}, \{g_n\} \subset C[a,b]$ konvergen berturut-turut ke $f$ dan $g$. Maka barisan $\{\gamma f_n\}, \{f_n + g_n\}$ dan $\{f_n g_n\}$ konvergen berturut-turut ke $\gamma f, f + g$ dan $fg$. Lebih jauh, barisan*
$$\left\{\frac{f_n}{g_n} : g_n > \theta \text{ atau } g_n < \theta \text{ untuk setiap } n\right\}$$
*konvergen ke $\frac{f}{g}$ bilamana $g > \theta$ atau $g < \theta$.*

*Bukti*: Di sini hanya akan dibuktikan untuk barisan $\{f_n g_n\}$ konvergen ke $fg$ saja.

Diberikan barisan $\{f_n\}, \{g_n\} \subset C[a,b]$ konvergen berturut-turut ke $f$ dan $g$. Berdasarkan Teorema 7, terdapat $p > \theta$ sehingga $|f_n| \leq p$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Didefinisikan $t = p \vee |g|$. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $\{f_n\}$ konvergen ke $f$ dan $\{g_n\}$ konvergen ke $g$, maka terdapat bilangan $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq K_1$ berlaku

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon e}{2t}$$

dan jika $n \geq K_2$ berlaku

$$|g_n - g| < \frac{\varepsilon e}{2t}.$$

Dipilih $K = \sup\{K_1, K_2\}$. Oleh karena itu jika $n \geq K$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} |f_n g_n - fg| &\leq |f_n g_n - f_n g| + |f_n g - fg| \\ &= |f_n||g_n - g| + |f_n - f||g| \\ &< t\frac{\varepsilon e}{2t} + \frac{\varepsilon e}{2t}t = \varepsilon e. \end{aligned}$$

Jadi $\{f_n g_n\}$ konvergen ke $fg$. ■

**Teorema 9**. *Barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ konvergen jika dan hanya jika $\{f_n\}$ barisan Cauchy.*

*Bukti: Syarat perlu*. Diketahui $\{f_n\}$ konvergen, maka terdapat $f \in C[a,b]$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K$ sehingga jika $n \geq K$ berlaku

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}e.$$

Jadi untuk setiap bilangan asli $n, m \geq K$ diperoleh

$$|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2}e + \frac{\varepsilon}{2}e = \varepsilon e.$$

*Syarat cukup*: Diketahui $\{f_n\}$ barisan Cauchy. Artinya, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N$ sehingga jika $m, n \geq N$ benar bahwa

$$|f_n - f_m| < \varepsilon e.$$

Jadi untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Ini berarti untuk setiap $x \in [a,b]$, $\{f_n(x)\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Oleh karena itu setiap $x \in [a,b]$, barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen di $\mathbb{R}$. Selanjutnya didefinisikan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N$ sehingga jika $n \geq N$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ untuk setiap } x \in [a,b]. \quad (1)$$

Karena $f_N \in C[a,b]$, maka $f_N$ kontinu seragam pada $[a,b]$. Artinya, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \delta$ maka berlaku

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

Berdasarkan ketaksamaan (1) dan (2), untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \delta$, diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| \\ &\quad + |f_N(x) - f_N(y)| \\ &\quad + |f_N(x) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi terbukti $f \in C[a,b]$.

Selanjutnya, berdasarkan ketaksamaan (1) karena untuk setiap $n \geq N$ dan untuk setiap $x \in [a,b]$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ maka untuk setiap $n \geq N$ diperoleh

$$|f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{3}e < \varepsilon e.$$

Jadi $\{f_n\}$ barisan konvergen. ■

Barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ dikatakan **naik monoton** (*nondecreasing*) jika setiap bilangan asli $n$ dipunyai

$$f_n \leq f_{n+1}.$$

Barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ dikatakan **turun monoton** (*nonincreasing*) jika setiap bilangan asli $n$ dipunyai

$$f_{n+1} \leq f_n.$$

Sebuah barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ dikatakan **monoton** (*monotone*) jika $\{f_n\}$ naik monoton atau turun monoton.

Sebuah barisan yang turun (naik) monoton dan terbatas ke bawah (ke atas) belum tentu mempunyai infimum (supremum), seperti diberikan dalam dua contoh berikut.

**Contoh 10**. *Diberikan barisan $\{f_n\} \subset C[0,1]$ yang didefinisikan $f_n(x) = x^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan setiap $x \in [0,1]$. Akan ditunjukkan bahwa barisan $\{f_n\}$ turun (naik) monoton dan terbatas tetapi tidak mempunyai infimum.*

Cukup jelas bahwa barisan $\{f_n\}$ terbatas sebab $\theta \leq f_n \leq e$ dan turun monoton sebab $f_{n+1} \leq f_n$ untuk setiap $n$. Barisan $\{f_n(x)\}$ konvergen titik demi titik ke $f(x) = 0$ untuk $x \in [0,1)$ dan $f(1) = 1$, tetapi $f \notin C[0,1]$.

**Contoh 11**. *Diberikan barisan $\{g_n\} \subset C[0,1]$ yang didefinisikan $g_n(x) = nx$ untuk $0 \leq x < \frac{1}{n}$ dan $g_n(x) = 1$ untuk $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan setiap $x \in [0,1]$. Akan ditunjukkan bahwa barisan $\{g_n\}$ naik monoton dan terbatas tetapi tidak mempunyai supremum.*

Cukup jelas bahwa barisan $\{g_n\}$ terbatas sebab $\theta \leq g_n \leq e$ dan naik monoton sebab $g_n \leq g_{n+1}$ untuk setiap $n$. Barisan $\{g_n(x)\}$ konvergen titik demi titik ke $g(x) = 1$ untuk $x \in (0,1]$ dan $g(0) = 0$, tetapi $g \notin C[0,1]$.

**Teorema 12**. *Jika barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ naik (turun) monoton dan mempunyai supremum (infimum) maka barisan $\{f_n\}$ konvergen ke supremumnya (infimumnya).*

*Bukti*: Diberikan $s = \sup\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \in C[a,b]$. Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K$ sehingga $s - \varepsilon e < f_K$. Nyatanya bahwa barisan $\{f_n\}$ naik monoton, hal ini mengakibatkan $f_K \leq f_n$ untuk setiap $n \geq K$, sehingga diperoleh

$$s - \varepsilon e < f_K \leq f_n \leq s < s + \varepsilon e$$

untuk setiap $n \geq K$.
Oleh karena itu diperoleh
$|f_n - s| < \varepsilon e$ untuk setiap $n \geq K$.
Jadi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = s$.
Bukti untuk infimum serupa. ■

Barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ dikatakan **naik seragam** (uniformly *nondecreasing*) jika setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ dipunyai

$$\theta \leq f_{n+1} - f_n < \varepsilon e.$$

Barisan $\{f_n\} \subset C[a,b]$ dikatakan **turun seragam** (uniformly *nonincreasing*) jika setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ dipunyai

$$\theta \leq f_n - f_{n+1} < \varepsilon e.$$

Di akhir bagian ini diberikan Teorema 13 yang menjamin suatu barisan memiliki supremum atau infimum.

**Teorema 13**. *Diberikan barisan* $\{f_n\} \subset C[a,b]$ *terbatas.*
*(i). Jika* $\{f_n\}$ *naik seragam maka* $\{f_n\}$ *memiliki supremum. Lebih jauh, barisan* $\{f_n\}$ *konvergen ke supremumnya.*
*(ii). Jika* $\{f_n\}$ *turun seragam maka* $\{f_n\}$ *memiliki infimum. Lebih jauh, barisan* $\{f_n\}$ *konvergen ke infimumnya.*

*Bukti*: (i). Diberikan barisan $\{f_n\}$ terbatas dan naik seragam. Maka, untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N_1$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ dipunyai

$$\theta \leq f_{n+1} - f_n < \varepsilon e \;\Leftrightarrow\; 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) < \varepsilon$$

untuk setiap $x \in [a,b]$.
Karena $\{f_n\}$ terbatas maka untuk setiap $x \in [a,b]$ barisan $\{f_n(x)\}$ terbatas di $\mathbb{R}$. Oleh karena itu, terdapat bilangan $f(x) = \sup\{f_n(x)\}$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N_2$ sehingga jika $n \geq N_2$ maka berlaku

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{3} < f_n(x) \leq f(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{3}$$

atau

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

Jelas bahwa $f$ fungsi bernilai real yang terdefinisi pada $[a,b]$. Selanjutnya diambil bilangan asli $N = \sup\{N_1, N_2\}$. Karena $f_N \in C[a,b]$ maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \delta$ dipunyai

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \tfrac{\varepsilon}{3}. \qquad (4)$$

Akibatnya, berdasarkan ketaksamaan (3) dan (4) disimpulkan bahwa jika setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \delta$ diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| \\ &\quad + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi $f \in C[a,b]$.
Bukti untuk infimum serupa. ■

## REFERENSI


[1] Albiac, F., dan Kalton, NJ., (2006), *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York.

[2] Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R., (2000), *Introduction to Real Analysis*, 3rd edition, JohnWiley, New York.

[3] Dales, H.G., (2003), *Introduction Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis,* Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Darmawijaya, S., (2012), *Calculus on the Family of Continuous Functions*, Seminar Nasional KNM XVI, Universitas Padjadjaran Sumedang.

[5] Diestel, J., (1984), *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York.

[6] Lindenstrauss, J. dan Tsafriri, L., (1977), *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin.

[7] Meyer-Nieberg, P., (1991), *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin.

[8] Yeh, J., (2006), *Real Analysis: Theory of Measure and Integration*, 2nd edition, World Scientific Publishing, Singapore