TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH

Amanatul Husnia, Hairur Rahman

Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

e-mail: niaja10@yahoo.com

ABSTRAK

Ruang Banach merupakan suatu konsep penting dalam analisis fungsional. Pada tahun 1992, seorang ahli matematika berasal dari Polandia membuktikan teorema yang menyatakan ketunggalan titik tetap. Teorema tersebut disebut juga dengan teorema titik tetap Banach. Teorema titik tetap Banach (teorema kontraksi) merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik lengkap ke dalam dirinya sendiri. Pengertian ruang Banach sendiri adalah ruang norm yang lengkap, dikatakan lengkap jika barisan Cauchy tersebut konvergen. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pembuktian titik tetap di ruang Banach dengan kondisi yang diberikan yaitu pada pemetaan Kannan dan pemetaan Fisher. Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa pemetaan Kannan dan pemetaan Fisher mempunyai titik tetap yang tunggal $T(x) = x$ dan pemetaan tersebut merupakan pemetaan titik tetap terhadap dirinya sendiri di ruang metrik lengkap.

Kata Kunci: Titik Tetap, Pemetaan Kontraksi, Ruang Metrik Lengkap, Ruang Banach

ABSTRACT

Banach space is an important concept in functional analysis. In 1992, a mathematician from Poland proved the uniqueness of fixed point. The theorem is also called Banach fixed point theorem. Banach fixed point theorem (contraction theorem) is a unique fixed point theorem on a mapping called the contraction of a complete metric space into itself. The definition of Banach space itself is a complete norm space, to be said complete if the Cauchy sequence is convergent. This study aims to determine the evidence of fixed point in Banach space with the given conditions, namely Kannan mapping and Fisher mapping. Based on the results of the discussion, it is obtained that Kannan mapping and Fisher mapping has a single fixed point $T(x) = x$ *and the mapping is a fixed point mapping to itself in a complete metric space*.

Keywords: *Fixed Point, Contraction Mapping, Complete Metric Space, Banach Space*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Abstraksi secara bahasa berarti proses pengabstrakan. Abstraksi sendiri dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan jalan memusatkan perhatian pada sifat yang umum dari berbagai objek dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Untuk menyatakan hasil abstraksi, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Penggunaan bahasa simbol mempunyai dua keuntungan yaitu sederhana dan universal. Sederhana di sini berarti sangat singkat dan universal berarti bahwa ahli matematika di belahan bumi manapun akan dapat memahaminya (Abdussakir, 2009).

Menurut Kreyzig (1978:1-2) misalnya dalam analisis fungsional memusatkan perhatian pada *"ruang"*. Hal ini merupakan dasar penting untuk mengkaji ruang Banach, ruang norma, ruang metrik, dan ruang Hilbert dengan sangat rinci.

Dalam hubungan ini konsep "ruang" yang digunakan dalam ruang Banach mempunyai arti yang sangat luas. Ruang Banach adalah ruang norma yang lengkap, artinya bahwa ruang Banach adalah ruang norma, ruang yang memenuhi sifat-sifat ruang norma, dikatakan lengkap bahwa barisan Cauchy tersebut konvergen (Wilde, 2003:84).

Ruang Banach merupakan suatu konsep penting dalam analisis fungsional. Pada tahun 1992, seorang ahli matematika berasal dari Polandia membuktikan teorema yang menyatakan keberadaan dan ketunggalan suatu titik tetap. Teorema tersebut disebut juga dengan teorema titik tetap Banach atau prinsip kontraksi Banach. Teorema ini menyediakan teknik untuk memecahkan berbagai masalah yang diterapkan dalam matematika sains (ilmu matematika) dan ilmu teknik. Teorema titik tetap Banach (teorema kontraksi) merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik lengkap ke dalam dirinya sendiri.

KAJIAN TEORI

1. Ruang Metrik

Ruang metrik memperjelas konsep jarak. Definisi dari metrik bermanfaat untuk mengetahui aplikasi yang lebih umum dari konsep jarak. Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan real $\mathbb{R}$. Di dalam bilangan real $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangankan $d(x,y) = |x-y|$ dengan setiap pasangan titik $x,y \in \mathbb{R}$, jadi $\mathbb{R}$ mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dimana jarak $d\ (x,y) = |x-y|$ dengan setiap pasangan titik $x,y \in \mathbb{R}$ (Kreyszig, 1978:2-3).

Definisi 2.1.1

Ruang metrik (X,d), dimana X merupakan himpunan dan d merupakan metrik di X (fungsi jarak X) yaitu fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ untuk setiap $x,y,z \in X$, sehingga diperoleh

1. $d(x,y) \geq 0$ (d adalah bernilai real, terbatas, dan tidak negatif)
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (ketaksamaan segitiga) (Kreyszig, 1978:3).

Contoh

Didefinisikan fungsi $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yaitu

$$d(a,b) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

dengan $a = (x_1,x_2)$ dan $b = (y_1,y_2)$. Tunjukkan bahwa fungsi d adalah metrik!

Definisi 2.1.2 (Persekitaran)

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik, maka untuk suatu $\varepsilon > 0$, persekitaran titik di $x_0 \in X$ merupakan himpunan

$v_\varepsilon(x_0) = \{x \in X: d(x_0,x) < \varepsilon\}$ (Sherbert dan Bartle, 2000:329).

2. Himpunan Terbuka dan Himpunan Tertutup

Definisi 2.2.1

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik, untuk sebarang $x \in X$ dan setiap $r > 0$, himpunan-himpunan

1. $B_x(r) = (y \in X \mid d(x,y) < r)$ disebut bola terbuka
2. $B_x(r) = (y \in X \mid d(x,y) \leq r)$ disebut bola tertutup (Rynne dan Youngson, 2008:13).

Contoh

a. Diketahui ruang metrik (X,d) dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$
b. $B(0,1) = (y \in X \mid -1 < y < 1)$ disebut bola terbuka berpusat di 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (X,d).
c. Diketahui ruang metrik (X,d) dengan metrik $d(x,y) = |x-y|$
d. $B(0,1) = (y \in X \mid -1 \leq y \leq 1)$ disebut bola tertutup berpusat di 0 dengan jari-jari 1 pada ruang metrik (X,d).

Definisi 2.2.2 (Titik Interior)

Titik p disebut suatu titik interior himpunan E jika terdapat suatu persekitaran dari p yang merupakan subset dari E (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.3 (Himpunan Terbuka)

Himpunan E disebut himpunan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan E (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.4 (Titik Limit)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, suatu titik $c \in \mathbb{R}$ disebut titik limit jika untuk setiap $\delta > 0$ terdapat paling sedikit satu titik $x \in A$, $x \neq c$ sedemikian sehingga $|x-c| < \delta$ (Bartle dan Sherbert, 2000:97).

Menurut Soemantri (1988) titik $p \in X$ disebut titik limit himpunan E subset X, bila setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in X$ dan $q \neq p$.

Definisi 2.2.5 (Himpunan Tertutup)

Himpunan E disebut tertutup jika semua titik limitnya termuat di dalam E (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.6 (Himpunan Terbatas)

Himpunan E dalam ruang metrik (X) disebut terbatas jika terdapat titik $p \in X$ dan bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$, maka jarak $d(p,x) \leq M$ (Soemantri, 1988).

3. Kekonvergenan dan Kelengkapan

Definisi 2.3.1 (Barisan Terbatas)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $X = (X,d)$ disebut barisan terbatas jika daerah jangkauan *(range)* dari barisan tersebut merupakan himpunan bagian terbatas di X (Soemantri, 1988).

Definisi 2.3.2 (Barisan Konvergen)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan konvergen jika ada $x \in X$, maka

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

x disebut limit dari $\langle x_n \rangle$ dapat juga ditulis dengan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

atau

$$x_n \to x$$

Barisan $\langle x_n \rangle$ yang tidak konvergen disebut divergen (Kreyszig, 1978:25).

Teorema 2.3.3

Jika barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen di dalam ruang metrik (X, d), maka barisan $\langle x_n \rangle$ tersebut terbatas dan limit barisan $\langle x_n \rangle$ tunggal.

Definisi 2.3.4 (Barisan Cauchy)

Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ (Ghozali, 2010:12).}$$

Teorema 2.3.5

Setiap barisan yang konvergen dalam suatu metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy

Definisi 2.3.6 (Ruang Metrik Lengkap)

Ruang metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen di dalam X (Sherbet dan Bartle, 2000:330).

4. Ruang Vektor Bernorma

Definisi 2.4.1 (Ruang Vektor Bernorma)

Ruang vektor bernorma adalah ruang vektor X dengan pemetaan $\| \| : X \to R_+$, dengan sifat-sifat

1. $\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ $(x \in X)$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ untuk setiap $x \in X$ dan skalar α
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$

Ruang vektor bernorma ini dinotasikan dengan $(x, \| \|)$ dan pemetaan ini $\| \|$ disebut *"norma"* pada ruang (Cohen, 2003:174).

Contoh

Misalkan X merupakan ruang vektor berdimensi hingga di $\mathbb{F}$ dengan basis $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ yang mana $x \in X$ dapat juga ditulis dengan $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Maka fungsi $\|x\| : X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Merupakan norma di X

5. Kekonvergenan dalam Ruang Bernorma

Menurut Cohen (2003:178) dalam mempertimbangkan ruang bernorma menjadi ruang metrik dapat diketahui dengan satu cara. Kemudian gagasan yang terkait pada kekonvergenan barisan di ruang metrik dapat dipindahkan ke ruang bernorma. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan dengan barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang norma konvergen jika terdapat bilangan $\varepsilon > 0$ dan terdapat elemen $x \in X$ serta terdapat bilangan bulat positif N seperti

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \text{ dimana } n > N$$

dapat ditulis dengan $x_n \to x$ atau $lim_{x_n} = x$ dan x disebut limit pada barisan.

Definisi 2.5.1 (Ruang Banach)

Setiap ruang vektor bernorma yang lengkap disebut ruang Banach (Cohen, 2003:178).

6. Teorema Titik Tetap

Definisi 2.6.1

Misalkan T merupakan pemetaan dari ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri

a. Sebuah titik $x \in X$ sedemikian sehingga $T(x) = x$ maka x disebut titik tetap pada pemetaan T
b. Jika ada α, dengan $0 < \alpha < 1$, maka untuk setiap pasangan dari titik $x, y \in X$ diperoleh
$$d(T_x, T_y) \leq \alpha\, d(x, y)$$

Kemudian T disebut pemetaan kontraksi atau kontraksi sederhana, sedangkan α disebut kontraksi konstan di T (Cohen, 2003:116).

Teorema 2.6.2

Jika T adalah pemetaan kontraksi di ruang metrik X maka T kontinu di X.

Teorema 2.6.3 (Teorema Titik Tetap/ Titik Tetap Banach)

Setiap pemetaan kontraksi di ruang metrik lengkap hanya mempunyai titik tetap tunggal.

7. Pemetaan

Definisi 2.7.1 (Pemetaan)

Misalkan X dan y adalah ruang metrik. Pemetaan T dari himpunan X ke himpunan Y dinotasikan dengan $T: X \to Y$ adalah suatu pengawanan setiap $x \in X$ dikawankan secara tunggal dengan $y \in Y$ dan ditulis $y = T(x)$.

Definisi 2.7.2 (Pemetaan Kontinu)

Misalkan $X = (X, d_1)$ dan $Y = (Y, d_2)$ adalah ruang metrik. Pemetaan $T: X \to Y$ dikatakan kontinu di titik $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $d_1(x, x_0) < \delta$ maka berlaku

$$d_2(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$$

Pemetaan T dikatakan kontinu pada X jika T kontinu di setiap titik anggota X.

Definisi 2.7.3 (Komposisi Pemetaan)

Misalkan A, B dan C adalah ruang metrik. jika $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ maka komposisi pemetaan gof merupakan pemetaan dari $A \to C$ yang didefinisikan

$$(gof)(x) = g(f(x)) \text{ untuk setiap } x \in X$$

Komposisi $(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = f^2(x)$ dan jika komposisi sebanyak n suku, maka $(fofofo \ldots of) = f^n(x)$

Definisi 2.7.4 (Pemetaan Kontraksi)

Misalkan (X, d) merupakan ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi, jika ada konstanta c dengan $0 \le c \le 1$ berlaku

$$d(T(x)T(y)) \le cd(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$

PEMBAHASAN

Dalam matematika teorema titik tetap Banach juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi yang merupakan alat penting dalam teori ruang metrik, untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan diri pada ruang metrik, dan menyediakan metode kontraksi untuk menemukan titik tetap (Banach, 1992:133).

Teorema 3.1.2

Misalkan T adalah pemetaan kontraksi pada ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri. Maka T^n adalah pemetaan Kannan, untuk setiap n adalah bilangan bulat positif (Kannan, 1969:71-78).

Bukti

Menurut definisi pemetaan kontraksi **(definisi 2.7.4)** bahwa misalkan (X, d) merupakan ruang metrik. Pemetaan $T: X \to X$ dikatakan pemetaan kontraksi, jika ada konstanta c dengan $0 \le c \le 1$ sehingga

$$d(T(x)T(y)) \le cd(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa T^n adalah pemetaan Kannan, jika ada konstanta k dengan $0 \le k \le 1$ sehingga

$$d(T^n(x), T^n(y)) \le k[d(T(x), x) + d(T(y), y)]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} d\big(T^n(x), T^n(y)\big) &= d(TT^{n-1}(x), TT^{n-1}(y)) \\ &\le cd(T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)) \\ &= cd(TT^{n-2}(x), TT^{n-2}(y)) \\ &\le c^2 d(T^{n-2}(x), T^{n-2}(y)) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \le c^n d(x, y) \qquad \textbf{(3.1)}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Karena $d(x, y) \le d(T^n(x), x) + d\big(T^n(x), T^n(y)\big) + d(T^n(y), y)$

Dengan menggunakan ketaksamaan **(3.1)**, maka diperoleh

$$\begin{aligned} d\big(T^n(x), T^n(y)\big) &\le c^n d(x, y) \\ &\le c^n[d(T^n(x), x) + \\ &\quad d\big(T^n(x), T^n(y)\big) + \\ &\quad d(T^n(y), y)] \\ &= c^n d(T^n(x), x) + \\ &\quad c^n d\big(T^n(x), T^n(y)\big) + \\ &\quad c^n d(T^n(y), y) \end{aligned}$$

Sehingga mengakibatkan

$$(1 - c^n) d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \le c^n[d(T^n(x), x) + d(T^n(y), y)]$$

$$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \le \frac{c^n}{(1 - c^n)}[d(T^n(x), x) + d(T^n(y), y)] \qquad \textbf{(3.2)}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Karena $c < 1$, maka dapat diambil n sebarang dengan $c^n < \frac{1}{3}$, sehingga

$(1 - c^n) > 1 - \frac{1}{3}$

$(1 - c^n) > \frac{2}{3}$ atau $\frac{1}{(1-c^n)} < \frac{3}{2}$

Oleh karena itu $\frac{c^n}{(1-c^n)} < \frac{1}{2}$

Dimana $\frac{c^n}{(1-c^n)} = k$, dengan menggunakan ketaksamaan **(3.2)** diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \le [d(T^n(x), x) + d(T^n(y), y)]$$

untuk setiap $x, y \in X$, dimana $0 \le k \le \frac{1}{2}$.

Sehingga terbukti bahwa T^n adalah pemetaan Kannan.

Contoh

Misalkan X adalah himpunan bilangan real dengan $-2 < x < 2$ dan didefinisikan metrik dengan

$$d(x,y) = |x-y|$$

T adalah pemetaan pada ruang metrik (X,d) ke dalam dirinya sendiri dengan

$$Tx = \begin{cases} -\dfrac{x}{4}, & |x| \le 1 \\ \dfrac{x}{4}, & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

Maka

$$d(Tx,Ty) = |Tx - Ty|$$
$$\le |Tx| + |Ty| = \left|\tfrac{x}{4}\right| + \left|\tfrac{x}{4}\right|$$

Sehingga mengakibatkan

$$d(Tx,Ty) \le \tfrac{1}{4}|x| + |y| \qquad \textbf{(3.3)}$$

untuk setiap $x, y \in X$.

$d(x,Tx) = |x - Tx| \ge |x| - |Tx|$ dan
$d(y,Ty) = |y - Ty| \ge |y| - |Ty|$

Sehingga

$$d(x,Tx) + d(y,Ty) \ge |x| - |Tx| + |y| - |Ty|$$
$$= |x| - \left|\tfrac{x}{4}\right| + |y| - \left|\tfrac{y}{4}\right|$$
$$= |x|\left(1 - \tfrac{1}{4}\right) + |y|(1 - \tfrac{1}{4})$$
$$= |x|\left(\tfrac{3}{4}\right) + |y|(\tfrac{3}{4})$$
$$= \tfrac{3}{4}(|x| + |y|)$$

Maka

$$d(x,Tx) + d(y,Ty) \ge \tfrac{3}{4}(|x| + |y|) \qquad \textbf{(3.4)}$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan ketaksamaan **(3.3)** dan **(3.4)** diperoleh

$$d(Tx,Ty) \le \frac{1}{3}[d(x,Tx) + d(y,Ty)]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Jadi, terbukti bahwa T adalah pemetaan Kannan.

Dari teorema dan contoh di atas akan ditunjukkan bahwa pemetaan Kannan mempunyai titik tetap yang tunggal.

Pertama akan ditunjukkan bahwa ruang metrik (X,d) adalah lengkap, dapat diketahui bahwa kondisi pemetaan Kannan adalah

$$d(T(x),T(y)) \le k[d(T(x),x) + d(T(y),y)] \quad \textbf{(3.5)}$$

untuk setiap $x, y \in X$, dimana $0 \le k < \frac{1}{2}$.

$$d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big) = d\big(TT^{n-1}(x), TT^n(x)\big)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan **(3.5)**, diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big)$$
$$\le k[d\big(T^{n-1}(x), T^n(x)\big) + d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big)]$$

Mengakibatkan

$$(1-k)d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big) \le kd\big(T^{n-1}(x), T^n(x)\big)$$
$$d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big) \le \tfrac{k}{(1-k)} d\big(T^{n-1}(x), T^n(x)\big)$$

(3.6)

Dengan mengubah n menjadi $n-1$ dari persamaan di atas, diperoleh

$$d\big(T^{n-1}(x), T^n(x)\big)$$
$$\le \frac{k}{(1-k)} d\big(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x)\big)$$

Maka dari ketaksamaan **(3.6)**, diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^{n+1}(x)\big) \le$$
$$\tfrac{k}{(1-k)}\tfrac{k}{(1-k)} d\big(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x)\big)$$
$$= (\tfrac{k}{(1-k)})^2 d\big(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x)\big)$$
$$\le (\tfrac{k}{(1-k)})^n d\big((x), T(x)\big)$$

untuk setiap $x, y \in X$, dimana $0 \le k < \frac{1}{2}$.

$$d\big(T^n(x), T^{n+r}(x)\big) \le d\big(T^n(x), T^{n+}(x)\big) +$$
$$d\big(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)\big) + \cdots +$$
$$d\big(T^{n+r-1}(x), T^{n+r}(x)\big)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, diperoleh

$$d\big(T^n(x), T^{n+r}(x)\big) \le \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^n d\big((x), T(x)\big) + \le$$
$$\left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^{n+1} d\big((x), T(x)\big) +$$
$$\ldots + \le$$
$$(\tfrac{k}{(1-k)})^{n+r-1} d\big((x), T(x)\big)$$
$$= \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^n \left[1 + \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right) + \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^{n+r-1}\right] d\big((x), T(x)\big)$$
$$\le \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^n \left[1 + \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right) + \left(\tfrac{k}{(1-k)}\right)^2 + \cdots + \infty\right] d\big((x), T(x)\big)$$

Dengan rasio $\frac{k}{(1-k)} < 1$, maka barisan tersebut konvergen yaitu konvergen terhadap $\frac{1}{1-(\frac{k}{(1-k)})}$.

Maka

$$1 + \left(\frac{k}{(1-k)}\right) + \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^2 + \cdots + \infty$$
$$= \frac{1}{1 - \left(\dfrac{k}{(1-k)}\right)} = \frac{1-k}{1-2k}$$

Dari persamaan di atas diperoleh

$$d\left(T^n(x), T^{n+r}(x)\right) \le \left(\frac{k}{(1-k)}\right)^n \left(\frac{1-k}{1-2k}\right) d\left((x), T(x)\right)$$

Karena barisan $\langle T^n(x)\rangle$ adalah barisan Cauchy yang konvergen maka x mempunyai titik tetap tunggal yaitu $T(x) = x$.

Teorema 3.1.4

Misalkan $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$ dengan

$$d\left(T(x), T(y)\right) \le \alpha[d(T(x), x) + d(T(y), y) + \beta d(x, y)]$$

Maka T mempunyai titik tetap tunggal di X (Fisher, 1976:193-194).

Bukti

Ambil titik $x_0 \in X$ dan $\langle x_n\rangle$ barisan di X didefinisikan dengan

$$x_n = Tx_{n-1}, \qquad n \in N$$

Maka

$$x_0,\ x_1 = T(x_0),\ x_2 = T(x_1),\ x_3 = T(x_2), \dots, x_{n-1} = T(x_{n-2}), x_n = T(x_{n-1})$$

Akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n\rangle$ adalah barisan Cauchy

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &= d(T(x_0), T(x_1)) \\
&\le \alpha[d(T(x_0), x_0) + d(T(x_1), x_1)] + \beta d(x_0, x_1) = \alpha[d(x_1, x_0) + d(x_2, x_1)] + \beta d(x_0, x_1) \\
&= \alpha[d(x_1, x_2) + d(x_0, x_1)] + \beta d(x_0, x_1) \\
&\le \tfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1) + \beta d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_3) &= d(T(x_1), T(x_2)) \\
&\le \alpha[d(T(x_1), x_1) + d(T(x_2), x_2)] + \beta d(x_1, x_2) \\
&= \alpha[d(x_2, x_1) + d(x_3, x_2)] + \beta d(x_1, x_2) \\
&= \alpha[d(x_2, x_3) + d(x_1, x_2)] + \beta d(x_1, x_2) \\
&\le \tfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2) + \beta d(x_1, x_2) \\
&\le (\tfrac{\alpha}{1-\alpha})^2 d(x_0, x_1) + \beta^2 d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(x_3, x_4) &= d(T(x_2), T(x_3)) \\
&\le \alpha[d(T(x_2), x_2) + d(T(x_3), x_3)] + \beta d(x_2, x_3) \\
&= \alpha[d(x_3, x_2) + d(x_4, x_3)] + \beta d(x_2, x_3) \\
&= \alpha[d(x_3, x_4) + d(x_2, x_3)] + \beta d(x_2, x_3) \\
&\le \tfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_2, x_3) + \beta d(x_2, x_3) \\
&\le (\tfrac{\alpha}{1-\alpha})^3 d(x_0, x_1) + \beta^3 d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

.
.
.

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n-1}) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\
&\le \alpha[d(T(x_n), x_n) + d(T(x_{n-1}), x_{n-1})] + \beta d(x_n, x_{n-1}) \\
&= \alpha[d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n+1}, x_n)] + \beta d(x_n, x_{n-1}) \\
&= \alpha[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n-1})] + \beta d(x_n, x_{n-1}) \\
&\le \tfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1}) + \beta d(x_n, x_{n-1}) \\
&\le (\tfrac{\alpha}{1-\alpha})^n d(x_n, x_{n-1}) + \beta^n d(x_n, x_{n-1})
\end{aligned}$$

Secara umum diperoleh jika m merupakan bilangan bulat positif maka berlaku

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_{m+1}) &\le (\tfrac{\alpha}{1-\alpha})^m d(x_0, x_1) + \beta^m d(x_0, x_1) \\
&= (q)^m d(x_0, x_1) + r^m d(x_0, x_1) \quad \textbf{(3.7)}
\end{aligned}$$

dengan $q = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ dan $r = \beta$.

Karena $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$, jelas bahwa $0 < q < 1$ dan $0 < r < 1$

Ambil $\varepsilon > 0$ dan ambil bilangan $n, m \in \mathbb{N}$ dengan sifat ketaksamaan segitiga pada metrik dan jumlah dari barisan geometri, didapatkan untuk $n > m$

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+3}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \le \\
&(q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + q^{m+3} + \dots + q^{n-1}) d(x_0, x_1) + (r^m + r^{m+1} + r^{m+2} + r^{m+3} + \dots + r^{n-1}) d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le q^m(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-m-1}) d(x_0, x_1) + r^m(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-m-1})\, d(x_0, x_1) \\
&= q^m \textstyle\sum_{i=0}^{n-m-1} q^i\ d(x_0, x_1) + r^m \sum_{i=0}^{n-m-1} r^i\ d(x_0, x_1) \\
&= q^m \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} q^i\ d(x_0, x_1) + r^m \sum_{i=0}^{\infty} r^i\ d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

(3.8)

Karena $0 < q < 1$ dan $0 < r < 1$, maka deret $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$ pada ketaksamaan **(3.8)** konvergen ke $\frac{1}{1-q}$ dan deret $\sum_{i=0}^{\infty} r^i$ konvergen ke $\frac{1}{1-r}$

Sehingga diperoleh

$$d(x_m, x_n) \le \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1) + \frac{r^m}{1-r} d(x_0, x_1)$$

untuk $n > m > N$.

Karena $lim_{m\to\infty} q^m = 0$ dan $lim_{m\to\infty} r^m = 0$, maka $lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$

maka $\langle x_n\rangle$ adalah barisan Cauchy.

Karena X lengkap, maka $\langle x_n\rangle$ konvergen.

Katakan $x_n \to x$. Artinya sedemikian sehingga jika $N \in \mathbb{N}$, untuk setiap $n \ge N$ berlaku $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari pemetaan T. Dari sifat ketaksamaan segitiga dan prinsip Fisher, didapatkan

$$\begin{aligned}
d\left(x, T(x)\right) &\le d(x, x_n) + d(x_n, T(x)) \\
&= d(x, x_n) + (T(x_{n-1}), T(x)) \\
&\le d(x, x_n) + \alpha[d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) + d(T(x), x)] + \beta d(x_{n-1}, x)
\end{aligned}$$

Karena $x_n \to x$ diperoleh ketaksamaan

$$d\left(x, T(x)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \alpha[d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) + d(T(x), x)] + \beta d(x_{n-1}, x)$$

$< \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) + \beta d(x_{n-1}, x)$
$= \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) d(x_{n-1}, x_n) + \beta d(x_{n-1}, x)$

Menurut ketaksamaan **(3.8)**

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) + (\beta)^{n-1} d(x_0, x_1)$$

Sehingga diperoleh

$d \leq \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) + \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{n-1} d(x_0, x_1) + \beta d(x_{n-1}, x)$
$= \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n} d(x_0, x_1) + \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{n} d(x_0, x_1)$
$= \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)} + q^n d(x_0, x_1) + (r)^{n-1} d(x_0, x_1)$

Untuk $n \to \infty$, maka $q^n \to 0$ dan $r^n \to 0$, sehingga

$$d(x, T(x)) < \frac{\varepsilon}{2(1-\alpha)}$$

Karena ε sebarang, maka $d(x, T(x)) = 0$ atau $T(x) = x$, dengan demikian terbukti bahwa pemetaan Fisher pada X yang lengkap mempunyai titik tetap tunggal.

Contoh

Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di l_2

Akan ditunjukkan bahwa barisan di l_2 tersebut konvergen, untuk setiap $n \in N$ dan $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots)$ yang telah didefinisikan pada ruang l_2 atau $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^2$ konvergen terhadap n.

Dimana $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif N, sehingga

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2} < \varepsilon$$

dengan $m, n > N$. Dengan menggunakan definisi l_2, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_{mk}|^2 < \varepsilon^2, \quad m, n > N$$

sehingga

$$|x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon, \quad m, n > N$$

untuk setiap $k \in N$. Maka untuk setiap k, (x_{nk}) adalah barisan Cauchy di C sehingga $lim_{n\to\infty} x_{nk}$ ada ketika C merupakan ruang metrik lengkap.

$$lim_{n\to\infty} x_{nk} \text{ dimana } x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Akan ditunjukkan bahwa $x \in l_2$ dan $\langle x_n \rangle$ konvergen terhadap x. Maka l_2 dapat dikatakan lengkap

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{nk} - x_{mk}|^2 < \varepsilon^2, \quad m, n > N$$

Dapat diperhatikan bahwa $r = 1,2,3, \dots$

Maka n merupakan titik dan $lim_{m\to\infty} x_{mk} = x \cdot k$

$$\sum_{k=1}^{r} |x_{nk} - x \cdot k|^2 < \varepsilon^2, \quad n > N$$

Ambil titik

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r), (b_1, b_2, b_3, \dots, b_r), (c_1, c_2, c_3, \dots, c_r) \in C^r$

dengan menggunakan ketaksamaan segitiga di C^r, diperoleh

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{r} |a_k - c_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |a_k - b_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |b_k - c_k|^2}$$

Misalkan $a_k = x \cdot k$, $b_k = x_{nk}$ dan $c_k = 0$, sehingga diperoleh

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x \cdot k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x \cdot k - x_{nk}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_{nk}|^2}$$
$$\leq \varepsilon + \sqrt{\sum_{k=1}^{r} |x_{nk}|^2} \leq \varepsilon + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^2}$$

Jika $n > N$ dan konvergen terhadap $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^2$, tentu $x \in l_2$. Oleh karena itu, dapat dilihat pada ketaksamaan segitiga sebelumnya

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x \cdot k|^2} < \varepsilon, \quad n > N$$

Yang mengakibatkan bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen terhadap x dan l_2 adalah lengkap.

PENUTUP

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa teorema titik tetap Banach juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi, sebelum mencari ketunggalan titik tetap dapat dicari kelengkapan ruang metrik, dikatakan lengkap jika suatu barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga dapat dibuktikan bahwa teorema titik tetap di ruang Banach mempunyai titik tetap yang tunggal. Dalam membuktikan teorema titik tetap di ruang Banach, diperlukan suatu teorema yaitu:

Pemetaan Kannan $d(T(x), T(y)) \leq k[d(T(x), x) + d(T(y), y)]$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X. Dan Pemetaan Fisher $d(T(x), T(y)) \leq \alpha[d(T(x), x) + d(T(y), y) + \beta d(x, y)]$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha, \beta \in [0, \frac{1}{2}]$, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X.

1. Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan pemetaan Kannan dan pemetaan Fisher untuk membuktikan titik tetap di ruang Banach. Oleh karena itu penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya dengan menggunakan pada fungsi ruang yang lainnya

BIBLIOGRAPHY

[1] Abdussakir. 2009. *Pentingnya Matematika dalam Pemikiran Islam*: State Islamic University of Malang. (Online: http://abdussakir.wordpress.com/artikel/ diakses 20 Desember 2013).

[2] Al-Mahali, M.J.A. dan As-Suyuthi, A.J.A.. 2010. *Tafsir Jalalain 1*. Surabaya: Bina Ilmu Surabaya

[3] Al-Maraghi, M.A.. 1993. *Tafsir Al-Maraghi 2*. Mesir: Musthafa Al-Babi Al-Halabi

[4] Banach, S.. 1992. Sur Les Operations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Equations *Integrales*, *Fund. Math*. 133-181.

[5] Bartle, R.G. and Sherbert, D.R.. (2000). *Introduction to Real Analysis*, Third Edition. New York: John Wiley and Sons.

[6] Cohen, G.. 2003. *A Course in Modern Analysis and Its Applications.* United States of America: Cambridge University Press.

[7] Fisher. 1976. A fixed Point Theorem for Compact Metric space. *Publ. Inst. Math*. 25, 193-194.

[8] Ghozali, M.S.. 2010. *Analisis Real 1*. Bandung. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan

[9] Kreyzig, E.. 1989. *Introductory Functional* Analysis *with Application*. United States of America.

[10] Kannan, R.. 1969. Some Result on Fixed Point Theorems, *Bull. Calcutta. Math. Soc*, Vol. 60, 71-78.

[11] Nasoetion, A.H.. 1980. *Landasan Matematika*. Jakarta: PT. Bharatara Karya Aksara.

[12] Quth, S.. 2002. *Tafsir Fi Dzilalil Qur'an jilid 24*. Jakarta: Bina Insani

[13] Rynne, B.P. and Youngson, M.A.. 2008. *Linear Functional Analysis*. New York: Springger-Verlag.

[14] Soemantri. 1988. *Analisis Real 1*. Jakarta: Universitas Terbuka

[15] Wijaya, B.T.. 2011. Spectrum Detour Graf m-Partisi Komplit. *Skripsi S1*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

[16] Wilde, F.I.. 2003. *Topological Vector Space*. London.