ESTIMASI HARGA *MULTI-STATE EUROPEAN CALL OPTION* MENGGUNAKAN MODEL BINOMIAL

Mila Kurniawaty[1] dan Endah Rokhmati[2]

[1]Jurusan Matematika, Universitas Brawijaya, Malang.
email: mila akuwni@yahoo.com
[2]Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

ABSTRAK

Option merupakan kontrak yang memberikan hak kepada pemiliknya untuk membeli (call option) atau menjual (put option) sejumlah aset dasar tertentu (underlying asset) dengan harga tertentu (strike price) dalam jangka waktu tertentu (sebelum atau saat expiration date). Perkembangan option belakangan ini memunculkan banyak model pricing untuk mengestimasi harga option, salah satu model yang digunakan adalah formula Black-Scholes. Multi-state option merupakan sebuah option yang payoff-nya didasarkan pada dua atau lebih aset dasar. Ada beberapa metode yang dapat digunakan dalam mengestimasi harga call option, salah satunya masyarakat finance sering menggunakan model binomial untuk estimasi berbagai model option yang lebih luas seperti multi-state call option. Selanjutnya, dari hasil estimasi call option dengan model binomial didapatkan formula terbaik berdasarkan penghitungan eror dengan mean square error. Dari penghitungan eror didapatkan eror rata-rata dari masing-masing formula pada model binomial. Hasil eror rata-rata menunjukkan bahwa estimasi menggunakan formula 5 titik lebih baik dari pada estimasi menggunakan formula 4 titik.

Kata kunci: *option, formula Black-Scholes, multi-state option, model binomial.*

PENDAHULUAN

Perkembangan dunia perekonomian sekarang ini semakin pesat, seiring dengan kebutuhan masyarakat yang terus meningkat sehingga mendorong para pelaku ekonomi termasuk para investor untuk bersaing memperoleh keuntungan semaksimal mungkin. Dengan membayar sejumlah uang tertentu untuk investasi awal, investor dapat menguasai saham yang nilainya berlipat ganda dari investasi awal. Oleh karena itu, diperlukan alat investasi yang berupa *option.*

Pada dasarnya, *option* merupakan kontrak yang memberikan hak kepada pemiliknya untuk membeli atau menjual sejumlah aset dasar tertentu dengan harga tertentu (*strike price*) dalam jangka waktu tertentu. Aset dasarnya dapat berupa saham, kurs, indeks, atau komoditas. Menurut waktu *exercise*-nya, ada beberapa jenis *option*. Salah satunya adalah *European option*, yang hanya dapat di-*exercise* pada saat jatuh tempo.

Jika sebuah *option* yang *payoff*-nya berdasarkan pada dua atau lebih aset dasar maka dinamakan *multi-state option.* Model binomial paling banyak digunakan dalam komunitas *finance* untuk estimasi berbagai model *option* yang lebih luas seperti pada *multi-state European option*

Dalam mengkaji mengenai estimasi harga *multi-state European call option* menggunakan model binomial, akan diperoleh suatu pemahaman yang mendalam mengenai estimasi tersebut dan menjadi alternatif lain bagi komunitas *finance*, khususnya para investor untuk mengestimasi harga *option* di samping model-model lain yang telah ada agar dapat memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan kerugian.

PENDEKATAN PROSES RETURN

Dalam mengestrimasi harga *multi-state European call option* dengan model binomial digunakan suatu pendekatan proses *return.* Dalam melakukan pendekatan proses *return* diperlukan pemahaman mengenai fungsi *payoff* dan formula Black-Scholes.

Fungsi *payoff*

Berdasarkan waktu exercise-nya, ada beberapa jenis *option*. Salah satunya adalah *European option*, yang hanya dapat di-*exercise* pada saat jatuh tempo.

Fungsi *payoff* dari European *call option* adalah sebagai berikut

$$payoff = \max\{S_T - X, 0\}$$

Atau dapat dijabarkan sebagai berikut

$$payoff = \begin{cases} S_T - X, jika\ S_T > X \\ 0 \qquad ,jika\ S_T \le X \end{cases}$$

dimana S_T adalah stock price pada saat jatuh tempo dan X adalah strike price.

Formula Black-Scholes untuk *European option*

Persamaan Black-Scholes dari *option pricing* adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc=0 \qquad (1)$$

Berdasarkan asumsi model Black-Scholes pada persamaan (1), persamaan Black-Scholes untuk *European vanilla call option* dapat dibentuk sebagai berikut

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc, -\infty<S<\infty, \tau>0 \qquad (2)$$

dimana $c=c(S,\tau)$ merupakan nilai European *call option*, S adalah harga aset dasar, τ adalah jatuh tempo, r adalah suku bunga bebas resiko dan σ adalah volatilitas.
Kondisi awal (*payoff* saat jatuh tempo) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$c(S,0)=\max\{S-X,0\}$$

dengan X adalah *strike price*.
Solusi dari persamaan (2) diperoleh sebagai berikut

$$c(S,\tau)=$$

$$e^{-r\tau}\int_0^\infty \max(S_T-X)\frac{1}{S_\tau\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left\{\ln S_T-\left[\ln S+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\right\}^2}{2\sigma^2\tau}\right)dS_T$$

Operasi ekspektasi

$$c(S,\tau)=E(\max(S_T-X,0))e^{-r(T-t)}$$

dapat dinyatakan sebagai berikut

$$c(S,\tau)=e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max(S_T-X)\psi(S_T;S)dS_T \qquad (3)$$

dengan $\tau=T-t$.

$\psi(S_T;S)$ merupakan *transition density function* dari harga aset S_T yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\psi(S_T;S)=\frac{1}{S_\tau\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left\{(\ln S_T-\ln S)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right\}^2}{2\sigma^2\tau}\right) \qquad (4)$$

Dari persamaan tersebut terlihat bahwa fungsi densitas berdistribusi normal dengan variabel $\ln\frac{S_T}{S}$, yang mempunyai mean $\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$ dan varians $\sigma^2\tau$.

Model yang digunakan adalah *two-state option* dan densitas bersama dari harga dua aset dasar S_1 dan S_2 adalah *lognormal bivariate*.

Dalam dunia netral resiko, *return* aset dasar diberikan sebagai berikut

$$\ln\frac{S_i^{\Delta t}}{S_i}=\zeta_i \text{ , i = 1,2}$$

dimana S_i merupakan harga dari aset dasar i pada saat ini, $S_i^{\Delta t}$ merupakan harga aset dasar i pada suatu periode Δt berikutnya dan ζ_i adalah *return* aset dasar.

Sesuai perhitungan pada (4), variabel acak normal ζ_i mempunyai mean $\left(r-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)\Delta t$ dan varians $\sigma_i^2\Delta t$.
dimana r adalah tingkat bunga bebas resiko dan σ^2 adalah varians dari proses lognormal.
ρ merupakan koefisien korelasi antara ζ_1 dan ζ_2 dan σ_i adalah volatilitas harga aset dasar $S_{i,}\ i=1,2$.

Proses normal bivariate bersama $\{\zeta_1,\zeta_2\}$ didekati oleh sepasang variabel acak diskrit $\{\zeta_1^a,\zeta_2^a\}$ dengan mengikuti distribusi berikut

Tabel 1. Distribusi variabel diskrit $\{\zeta_1^a,\zeta_2^a\}$

ζ_1^a	ζ_2^a	probabilitas
v_1	v_2	p_1
v_1	$-v_2$	p_2
$-v_1$	$-v_2$	p_3
$-v_1$	v_2	p_4
0	0	p_5

dimana $v_i=\lambda_i\sigma_i\sqrt{\Delta t}$, $i=1,2$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Nilai Probabilitas

Untuk mendapatkan nilai probabilitas p_1,p_2,p_3,p_4 dan p_5, mean, varian, dan covarian dari $\{\zeta_1^a,\zeta_2^a\}$ disamakan dengan $\{\zeta_1,\zeta_2\}$. Sehingga didapatkan persamaan yang bersesuaian sebagai berikut

$$E(\zeta_1^a)=v_1(p_1+p_2-p_3-p_4)=\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\Delta t$$

$$E(\zeta_2^a)=v_2(p_1-p_2-p_3+p_4)=\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\Delta t$$

$$\text{var}(\zeta_1^a)=v_1^2(p_1+p_2+p_3+p_4)=\sigma_1^2\Delta t \qquad (5)$$

$$\text{var}(\zeta_2^a)=v_2^2(p_1+p_2+p_3+p_4)=\sigma_2^2\Delta t \qquad (6)$$

$$\text{cov}(\zeta_1^a,\zeta_2^a)=v_1v_2(p_1-p_2+p_3-p_4)=\sigma_1\sigma_2\rho\Delta t$$

Agar persamaan (5) dan (6) konsisten, harus ditentukan $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ sehingga diperoleh empat persamaaan independen untuk lima nilai probabilitas sebagai berikut

$$p_1+p_2-p_3-p_4=\frac{\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{\lambda\sigma_1}$$

$$p_1-p_2-p_3+p_4=\frac{\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\sqrt{\Delta t}}{\lambda\sigma_2}$$

$$p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$p_1-p_2+p_3-p_4=\frac{\rho}{\lambda^2}$$

Karena jumlahan probabilitas harus sama dengan satu, maka diberikan kondisi berikut

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$$

Sehingga didapatkan penyelesaian persamaan tersebut dan diperoleh nilai masing-masing probabilitas yang terjadi

$$p_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{r-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} + \frac{r-\frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) + \frac{\rho}{\lambda^2}\right]$$

$$p_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(\frac{r-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} - \frac{r-\frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{\rho}{\lambda^2}\right]$$

$$p_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(-\frac{r-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} - \frac{r-\frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) + \frac{\rho}{\lambda^2}\right]$$

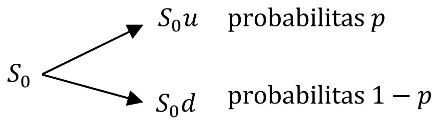
$$p_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\lambda}\left(-\frac{r-\frac{\sigma_1^2}{2}}{\sigma_1} + \frac{r-\frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{\rho}{\lambda^2}\right]$$

$$p_5 = 1 - \frac{1}{\lambda^2},$$

dengan $\lambda \geq 1$ adalah parameter bebas.

Estimasi Harga *Multi-state European Call Option* Menggunakan Model Binomial.

Dalam model binomial, perubahan harga saham tiap periode dari interval waktu Δt diasumsikan mempunyai dua kemungkinan hasil, yaitu u dengan probabilitas p dan d dengan probabilitas $1-p$ $(u > d)$ seperti pada gambar berikut



Gambar 1. Kontruksi pohon binomial

Jika harga saham (*stock option*) saat ini S_0, maka harga saham pada saat t adalah sebagai berikut

$$S_t = S_0 u^n d^{t-n}, t = 1, 2, \ldots, T$$

dimana $0 < d < 1 < u$ dan $n = 0, 1, \ldots, t$.

Harga *call* saat ini dinotasikan dengan c, dan $c_u^{\Delta t}$ dan $c_d^{\Delta t}$ menunjukkan harga *call* setelah satu periode (waktu jatuh tempo dalam konteks sekarang) yang bersesuaian dengan pergerakan naik dan turunnya harga aset, Misal X menyatakan *strike price* dari *call*, maka *payoff* dari *call* pada saat jatuh tempo adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} c_u^{\Delta t} = \max(uS - X, 0) \text{dengan probabilitas } p \\ c_d^{\Delta t} = \max(dS - X, 0) \text{dengan probabilitas } 1-p \end{cases} \quad (7)$$

Nilai terkini dari *call* diberikan sebagai berikut

$$c = \frac{pc_u^{\Delta t} + (1-p)c_d^{\Delta t}}{R}$$

dengan $p = \frac{R-d}{u-d}$ dan $R = e^{r\Delta t}$.

Jika S dan $S_{\Delta t}$ menyatakan harga aset saat ini dan harga aset satu periode setelah Δt, maka mean dan varians dari $\frac{S_{\Delta t}}{S}$ adalah

$$pu + (1-p)d$$

dan

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2.$$

Dengan derajat akurasi $O(\Delta t)$ nilai dari parameter u dan d adalah $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ dan $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Karena terdapat dua aset dasar yang mendasari harga *European call option* yaitu S_1 dan S_2, maka kemungkinan yang terjadi dapat digambarkan sebagai berikut

Gambar 2. Kontruksi pohon binomial dua aset dasar

Jika $S_i, i = 1, 2, \ldots, n$ menyatakan harga aset dasar i dan $V(S_1, S_2, \ldots, S_n, T)$ menyatakan nilai dari sekuritas derivatif, maka secara umum fungsi *payoff*-nya dinyatakan sebagai fungsi linier berikut

$$V(S, 0) = \max(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i S_i + b, 0) \quad (8)$$

dimana b dan $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah konstanta.

Dengan menggunakan fungsi *payoff* untuk multi-state *option* pada (8) dan persamaan (7), maka dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{cases} c_{u_1u_2}^{\Delta t} = \max(u_1S_1 + u_2S_2 - X, 0), \text{dengan peluang } p_1 \\ c_{u_1d_2}^{\Delta t} = \max(u_1S_1 + d_2S_2 - X, 0), \text{dengan peluang } p_2 \\ c_{d_1d_2}^{\Delta t} = \max(d_1S_1 + d_2S_2 - X, 0), \text{dengan peluang } p_3 \\ c_{d_1u_2}^{\Delta t} = \max(d_1S_1 + u_2S_2 - X, 0), \text{dengan peluang } p_4 \\ c_{0,0}^{\Delta t} = \max(S_1 + S_2 - X, 0), \text{dengan peluang } p_5 \end{cases}$$

dengan $u_i = e^{v_i}, d_i = e^{-v_i}, i = 1,2.$

Sehingga menurut formula binomial, diperoleh harga dari *multi-state call option* sebagai berikut

$$c = \frac{p_1c_{u_1u_2}^{\Delta t} + p_2c_{u_1d_2}^{\Delta t} + p_3c_{d_1d_2}^{\Delta t} + p_4c_{d_1u_2}^{\Delta t} + p_5c_{0,0}^{\Delta t}}{R} \quad (9)$$

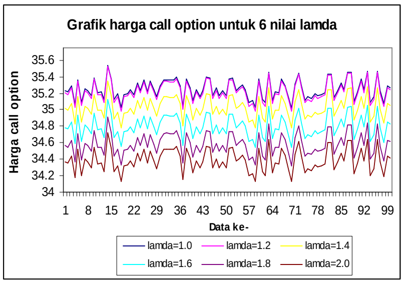
Jika $\lambda = 1$, maka $p_5 = 0$ dan formula 5 titik berkurang menjadi 4 titik sebagai berikut

$$c = \frac{p_1c_{u_1u_2}^{\Delta t} + p_2c_{u_1d_2}^{\Delta t} + p_3c_{d_1d_2}^{\Delta t} + p_4c_{d_1u_2}^{\Delta t}}{R} \quad (10)$$

dimana $R = e^{r\Delta t}$.

Simulasi untuk Mengestimasi Harga *Option*

Hasil estimasi *call option* dengan model binomial dengan σ_1=0.2 dan σ_2=0.3, untuk λ bernilai 1.0 sampai 2.0 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik *Call Option* Model Binomial untuk beberapa nilai lamda

Dari grafik terlihat bahwa pertambahan nilai λ menurunkan harga *call option*. Hal ini berarti, penggunaan formula 5 titik dapat menurunkan *harga call option* dari pada formula 4 titik.

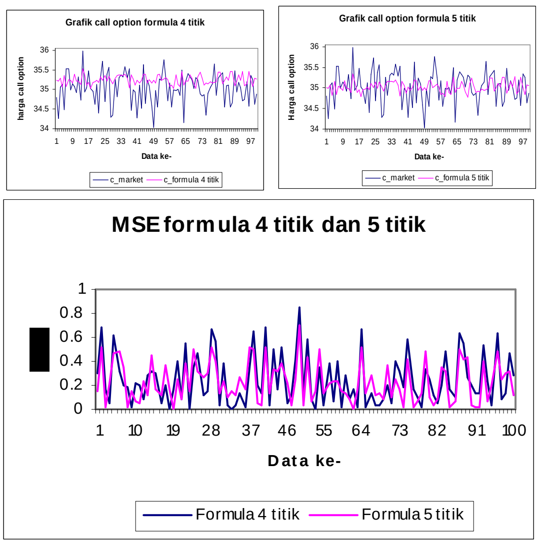
Mean Square Error (MSE)

Penghitungan eror menggunakan *Mean Square Error* dituliskan sebagai berikut:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{m} \eta_n^2}{m}}$$

dimana $\eta =$ *market option price – model option price*.

Error dari model binomial berdasarkan *Mean Square Error* sesuai penghitungan apabila ditampilkan dalam grafik sebagai berikut



Gambar 4. Grafik harga *call* dan *mean square error* model binomial formula 4 titik dan 5 titik

Dari hasil penghitungan eror menggunakan *Mean Square Error* didapatkan rata-rata eror sebagai berikut:

Tabel 2. Tabel hasil average *MSE* dari model binomial 4 titik dan 5 titik

Model Binomial	*Average MSE*
Formula 4 titik	0.244817
Formula 5 titik	0.2271071

Berdasarkan hasil penghitungan eror dari dua formula pada model binomial dapat disimpulkan bahwa formula 5 titik mempunyai eror yang lebih kecil daripada formula 4 titik . Oleh karena itu Formula 5 titik pada model binomial dapat dinyatakan sebagai formula yang yang lebih baik daripada formula 4 titik.

PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai estimasi harga multi-state European *call option* dengan model binomial dapat disimpulkan bahwa estimasi harga *multi-state European call option* dengan model Binomial diperoleh dengan pendekatan proses *return* yang mempunyai variabel acak normal didekati dengan sepasang variabel acak diskrit untuk mendapatkan nilai probabilitas yang terjadi pada masing-masing aset dasar sehingga dapat diestimasi menggunakan model binomial.

Estimasi harga *multi-state European call option* menggunakan model binomial diperoleh dua formula, yaitu:

1. Formula 5 titik

$$c = \frac{p_1 c_{u_1u_2}^{\Delta t} + p_2 c_{u_1d_2}^{\Delta t} + p_3 c_{d_1d_2}^{\Delta t} + p_4 c_{d_1u_2}^{\Delta t} + p_5 c_{0,0}^{\Delta t}}{R}$$

2. Formula 4 titik

$$c = \frac{p_1 c_{u_1u_2}^{\Delta t} + p_2 c_{u_1d_2}^{\Delta t} + p_3 c_{d_1d_2}^{\Delta t} + p_4 c_{d_1u_2}^{\Delta t}}{R}$$

Formula terbaik dalam model binomial pada *multi-state option* adalah formula 5 titik karena mempunyai eror rata-rata yang lebih kecil daripada formula 4 titik.

Dari hasil simulasi dapat dilihat bahwa estimasi harga *multi-state European call option* menggunakan model binomial sangat dipengaruhi oleh besarnya suatu parameter bebas **λ**. Semakin tinggi nilai **λ** maka harga dari *call option* akan semakin turun.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kwok, Yue-Kuen. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Singapore: Springer.

[2] Pliska, R. Stanley. 1997. *Introduction toMathematical Finance: Discrete Time Model.* Oxford: Blackwell.

[3] Bodie, Kane, Marcus. 2005. *Investment.* Sixth Edition. McGraw-Hill, International Edition.

[4] Sembel, Roy, dan Fardiansyah, Tedy. 2002. *Sekuritas Derivatif: Madu atau Racun.* Jakarta: Salemba empat.

[5] Rudiger, Seydel. 2002. *Tools for Computational Finance*. Koln: Springer.

[6] Higham, Desmond J. 2004. *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics, and Computation.* Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Rahayu, S.K.T. 2006. *Estimasi Nilai European Call Option Menggunakan Metode Historical Data dan Filter Kalman*. Skripsi ITS Surabaya.

[8] Hull, John C. 2002. *Option Future and Other Derivatives*. New Jersey: Prentice Hall.

[9] Ross, Sheldon M. 2004. *An Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics*. Cambridge: Cambridge University Press.