

Pemodelan Matematika Perpindahan Panas Konveksi Campuran (Mixed Convection) pada Pelat Horizontal

Leli Deswita

Matematika FMIPA Universitas Riau Pekanbaru, deswital@yahoo.com

DOI:<https://doi.org/10.15642/mantik.2017.3.2.96-100>

Abstrak

Penelitian ini mengkaji dan menganalisa model matematika perpindahan panas konveksi campuran (mixed convection) pada pelat horizontal. Analisa aliran perpindahan panas ini menggunakan model dalam bentuk sistem persamaan diferensial parsial nonlinear berorde dua yang berdimensi. selanjutnya persamaan ini diturunkan terlebih dahulu ke bentuk persamaan tidak berdimensi, kemudian dirobah ke bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang nonlinear, dengan menggunakan *similarity transformation*. Sistem persamaan diferensial biasa yang nonlinear ini, diselesaikan dengan menggunakan metode *finite-difference scheme*, juga dengan program Matematika dengan *Softwer matlab*. Hasil yang didapat dari program ini untuk menentukan koefisien pekali geseran kulit (Skin Friction Coefficient) $f''(0)$ suhu permukaan (wall temperture) $\theta(0)$, profil kecepatan (Velocity Profiles) $f'(\eta)$ dan profil suhu (Temperature profiles) $\theta(\eta)$.

Kata kunci: Finite difference sheme; Konveksi campuran; Pelat horizontal

Abstract

This study examines and analyzes mathematical model of mixed convection in horizontal plate. The heat transfer uses the model of a two dimensional nonlinear partial differential equations system. Then, this equation is derived first into the dimensionless equation form, and then it is changed into system of nonlinear ordinary differential equations form using similarity transformation. This system of nonlinear ordinary differential equations is solved by using the finite-difference scheme method, also with the mathematics program with software Matlab. The results obtained form this program is to determine skin friction coefficient $f''(0)$, wall temperature $\theta(0)$ velocity profiles $f'(\eta)$ and temperature profiles $\theta(\eta)$.

Keywords: Finite difference sheme; Mixed convection; Horizontal plate

1. Pendahuluan

Proses perpindahan panas secara konveksi merupakan suatu fenomena yang hanya terjadi di suatu permukaan, dimana Keadaan permukaan dan kedudukan permukaan akan mempengaruhi proses konveksi [8]. Proses perpindahan panas terjadi serentak dalam proses konveksi,

disebabkan dalam proses konveksi fluida menjadi pengantar panas, sehingga besarnya kecepatan fluida yang mempengaruhi banyaknya panas yang disebarkan [14]. Perbedaan suhu diantara fluida dengan persekitaran telah menyebabkan proses konveksi terjadi [1]. Pemanasan akan menyebabkan fluida menjadi kurang padat

(dense) dan bergerak ke atas, manakala yang lebih padat bergerak ke bawah. Proses ini akan berakhir apabila kestabilan panas tercapai.

Konsep dasar utama yang harus dipahami dalam penelitian yang akan dilakukan ini adalah masalah Konsep seperti yang telah dikembangkan oleh [3] dalam penelitian tentang solusi kesamaan untuk aliran syarat batas konveksi campuran pada pelat horizontal permeable (*similarity solution for mixed convection of boundary laminer flow on permeable horizontal plate*). Begitu juga dengan penelitian-penelitian yang telah dilakukan oleh [5]. Dimana para peneliti menghasilkan beberapa parameter penting seperti parameter apungan, parameter mikrokutub dan bilangan Prandtl dengan dua solusi. Selanjutnya [4] dalam penelitian tentang solusi kesamaan untuk aliran syarat batas konveksi bebas pada pelat horizontal (*similarity solution of free convection boundary layer flow on a horizontal plate with variable wall temperature*). Penelitian tersebut adalah berupa kajian secara teori tentang pengaruh apungan terhadap masalah syarat batas (*boundary condition*) aliran yang disebabkan oleh pemanasan atau pendinginan (*heat transfer*).

Dalam penelitian selanjutnya pakar-pakar penelitian melakukan kajian tentang aliran konveksi campuran syarat batas pada baji (*permeable walls*). Aliran mantap berlapis (*laminar steady flow*) pada permungkaan benda berbentuk baji dengan menunjukkan penggunaan secara teori syarat batas dan bilangan Prandtl. Kemudian [10] telah mengkaji konveksi campurann pada aliran fluida micropolar, parameter mikrokutub. Selanjutnya [4] telah mengkaji aliran fluida pada pelat horizontal tentang masalah konveksi bebas dan seterusnya. Deswital mengkaji masalah aliran fluida pada pelat horizontal tentang konveksi campuran (*Similarity solution for mixed convection boundary layer flow over a permeable horizontal flat plate*) [3]. Selain daripada masalah pembentukan lapisan batas yang diselesaikan dengan metoda *finite-differenc scheme*, terdapat banyak lagi peneliti-peneliti lain mengkaji menggunakan metoda ini antara lain adalah [5], [6], [7], [10], [12], [13], [15] dan [16].

Penelitian ini menganalisa aliran perpindahan panas terhadap pelat horizontal dengan menggunakan Persamaan diferensial parsial dengan syarat batas dan konveksi campuran pada pelat horizontal Hansen [9].

2. Formulasi Matematika

Telah dibicarakan di atas bahwa penelitian ini menggunakan sistem persamaan diferensial parsial nonlinear dengan masalah model matematika perpindahan panas konveksi campuran (mixed conection) dengan syarat batas pada pelat horizontal, adapun bentuk model matematika yang digunakan dapat di tulis sebagai berikut

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + sg\beta(\bar{T} - T_\alpha) \quad (3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4)$$

Dengan syarat batas,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0, & \bar{v} &= V_w(\bar{x}), \\ (\partial \bar{T} / \partial \bar{y})_{\bar{y}=0} &= -\bar{q}_w(\bar{x})/k, & \text{pada } \bar{y} &= 0 \\ \bar{u} &= \bar{U}(\bar{x}), & \bar{T} &= T_\infty, & \bar{p} &= p_\infty \text{ apabila } \bar{y} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Didefinisikan parameter dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}/L, & y &= \text{Re}^{1/2}(\bar{y}/L), \\ v &= \text{Re}^{1/2}(\bar{v}/U_0), & U(x) &= \bar{U}(\bar{x})/U_0, \\ V_w(x) &= \text{Re}^{1/2}(\bar{V}_w/U_0), & p &= (P_\infty - \bar{P})/\rho U_0^2, \\ T &= (\bar{T} - T_\infty)(k/q_{w0}L)\text{Re}^{1/2}, & u &= \bar{u}/U_0, \\ q_w(x) &= \bar{q}_w(x)/q_{w0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Dengan $\text{Re} = U_0 L / \nu$ adalah nomor Reynolds, q_{w0} merupakan *characteristik heat flux*, sedangkan L adalah *characteristik length scale* dan U_0 adalah *characteristik velocity*.

Substitusikan persamaan (6) ke persamaan (1)-(5) sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (8)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \lambda T, \quad (9)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Dengan syarat batas (6) menjadi

$$u = 0, v = V_w(x), \quad (\partial T / \partial y)_{y=0} = -q_w(x)/k, \\ \text{pada } y = 0 \quad (11) \\ u = U(x), \quad T = 0, \quad p = 0 \text{ apabila } y \rightarrow \infty.$$

Dengan P_r adalah nomor Prandtl dan λ adalah konstanta konveksi campuran (mixed convection) atau disebut juga parameter keapungan (*buoyancy parameter*), didefinisikan sebagai berikut

$$\lambda = s \frac{Gr}{R_e^{5/2}}. \quad (12)$$

Dimana $Gr = g\beta(q_{w0}L/k)L^3/\nu^2$ merupakan nomor grashof. Selanjutnya Chellappa dan Singh [2] mendefinisikan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\psi = \phi_1(x)f(\eta), \quad p = \phi_2(x)p(\eta), \\ T = \phi_3(x)\theta(\eta), \quad \eta = \phi_4(x)y, \quad (13)$$

dengan ψ adalah fungsi strim yang didefinisikan sebagai berikut,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14)$$

Persamaan (13) disubstitusikan ke persamaan (14), selanjutnya disubstitusikan ke persamaan (7)-(11) beserta persamaan (12), kemudian diperoleh persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

$$f''' + \frac{n+1}{2}ff'' - nf'^2 - 2nP - \frac{n-1}{2}\eta P' = 0, \quad (15)$$

$$P' = \lambda\theta, \quad (16)$$

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + \frac{n+1}{2}f\theta' - \frac{5n-1}{2}f'\theta = 0. \quad (17)$$

Dengan syarat batas (11) dihasilkan

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = f_0, \quad \theta'(0) = -1 \quad (18)$$

$$f'(\infty) = 1, \quad \theta(\infty) = 0, \quad P(\infty) = 0.$$

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan (15)–(17) dengan syarat batas (18) diselesaikan secara numerik untuk beberapa nilai parameter f_0 (suction), nomor prantal P_r , parameter n dan λ adalah konstanta konveksi campuran atau disebut juga parameter keapungan (*buoyancy parameter*) dengan menggunakan metoda *finite difference schem* seperti yang telah dijelaskan dalam Keller [11]

Penyelesaian secara numerik telah menghasilkan pekali geseran kulit (Skin Friction Coefficient) $f''(0)$, Suhu permukaan $\theta(0)$, profil kecepatan (Velocity Profiles) $f'(\eta)$ dan profil suhu (Temperature profiles) $\theta(\eta)$. Dalam kajian ini nilai n yang diteliti adalah 0.01 dan beberapa nilai parameter f_0 (suction), nilai nomor Prandtl yang digunakan adalah $P_r = 0,7$ (udara). Hasil yang didapati dari kajian ini dapat dilihat pada tabel 3.1, untuk beberapa nilai f_0 , dengan nilai $n = 0,01$ dan $P_r = 0,7$ untuk nilai kritikal parameter λ_c .

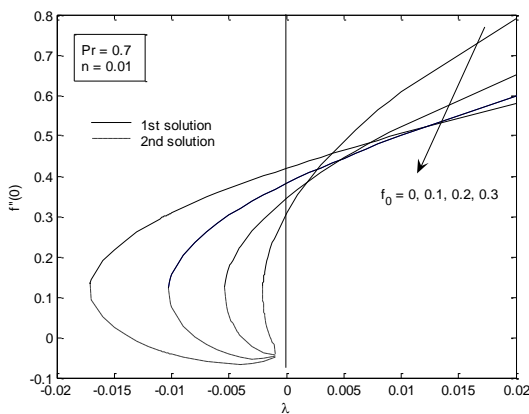
Perubahan pekali geseran kulit (skin friction coefficient) $f''(0)$ terhadap λ dapat dilihat pada Gambar 3.2 dengan beberapa nilai parameter f_0 untuk $n = 0,01$ dan $P_r = 0,7$. Nilai-nilai parameter f_0 yang dinyatakan pada Gambar 3.2, untuk nilai $f_0 > 0$ (suction), dan $f_0 = 0$ (impermeable plate). Perubahan suhu permukaan $\theta(0)$ terhadap λ dapat dilihat pada Gambar 3.3. Untuk nilai $n = 0,01$ dan $P_r = 0,7$. Selanjutnya pada Gambar 3.2, jika nilai f_0 meningkat, didapati bahwa pekali geseran kulit (Skin Friction Coefficient) $f''(0)$ meningkat.

Gambar 3.4 menunjukkan Profil kecepatan (velocity profiles) $f'(\eta)$ untuk nilai $n = 0,01$ nilai $P_r = 0,7$ dan untuk beberapa nilai parameter f_0 seperti yang dinyatakan pada Gambar 3.4, untuk $f_0 > 0$ (sedutan) dan $f_0 = 0$ (impermeable plate). Garis penuh artinya cabang atas dan garis putus-putus artinya cabang bawah. Gambar tersebut menunjukkan, untuk nilai f_0 meningkat untuk cabang atas didapati profil kecepatan berkurang dan ketebalan lapisan batas semakin berkurang.

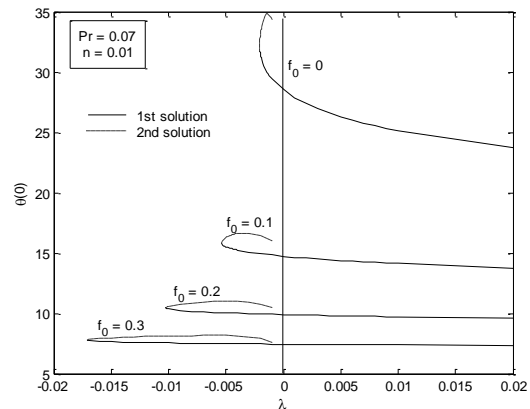
Gambar 3.5 menunjukkan Profil suhu (Temperature profiles) $\theta(\eta)$ untuk nilai $n = 0,01$ nilai $P_r = 0,7$ dan untuk beberapa nilai parameter f_0 , seperti yang dinyatakan pada Gambar 3.5, untuk $f_0 > 0$ (sedutan) dan $f_0 = 0$ (impermeable plate). Garis penuh artinya cabang atas dan garis putus-putus artinya cabang bawah. Gambar tersebut menunjukkan, untuk nilai f_0 meningkat untuk cabang atas didapati profil kecepatan berkurang dan ketebalan lapisan batas semakin berkurang.

Tabel 3.1. Nilai λ_c Untuk Beberapa Nilai n dan $P_r = 0,7$

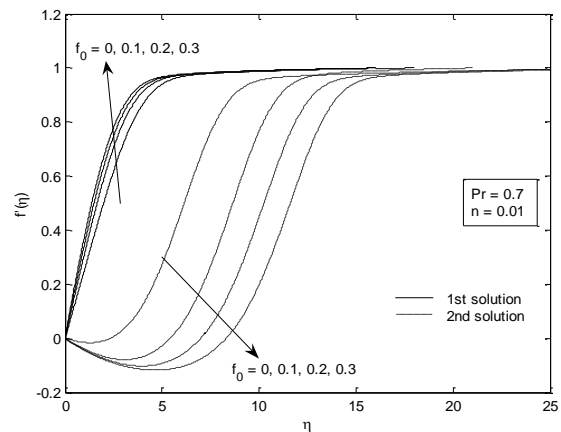
n	f_0	λ_c
0,01	0	-0,0020
	0,1	-0,0054
	0,2	-0,0103



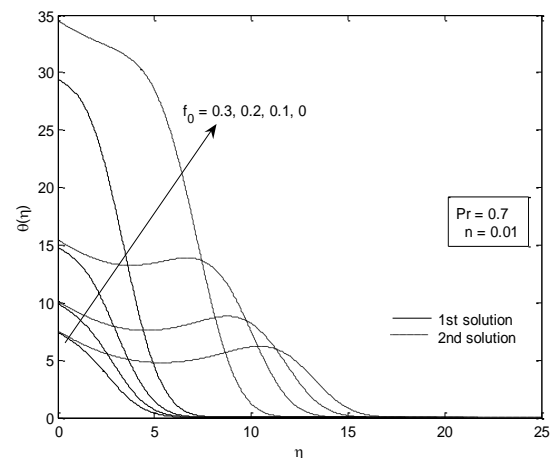
Gambar 3.2. Pekali geseran kulit (Skin Friction Coefficient) $f''(0)$ Sebagai fungsi λ untuk beberapa nilai f_0 apabila $P_r = 0,7$ dan $n = 0,01$



Gambar 3.3. Suhu permukaan (wall temperature) $\theta(0)$ Sebagai fungsi λ untuk beberapa nilai f_0 apabila $P_r = 0,7$ dan $n = 0,01$.



Gambar 3.4. Profil kecepatan (Velocity Profiles) $f'(\eta)$ Untuk Beberapa Nilai f_0 Apabila $p_r = 0,7$ dan $n = 0,01$



Gambar 3.5. Profil suhu (Temperature profiles) $\theta(\eta)$ Untuk Beberapa Nilai f_0 Apabila $p_r = 0,7$ dan $n = 0,01$.

4. Kesimpulan

Model matematika perpindahan panas konveksi campuran (mixed convection) pada pelat horizontal menggunakan model sistem persamaan diferensial parsial nonlinear berorde dua, kemudian dirobah kebentuk persamaan defenrenensial biasa nonlinear dengan menggunakan metode *finite-difference scheme* dan program matematika *softwer matlab*. Hasil yang didapat dari program ini untuk menentukan koefisien pekali geseran kulit (Skin Friction Coefficient) $f''(0)$ suhu permukaan (wall tempearture) $\theta(0)$, profil kecepatan (Velocity Profiles) $f'(\eta)$ dan profil suhu (Temperature profiles) $\theta(\eta)$

Referensi

- [1] Cebeci, T. & Brandshaw, P. 1988. Physical and Computation Aspects of Convective Heat Transfer. New York: Springer-Verlag.
- [2] Chellappa, AK. P. Singh. 1989. Possible similarity formulations for laminar free convection on a semi-infinite horizontal plate, Int. J. Engng. Scie. 27: 161-167.
- [3] Deswita, L., Nazar. R., Ishak. A., Ahmad. R. & Pop. I. 2010. Similarity solution for mixed convection boundary layer flow over a permeable horizontal flat plate. *Applied Mathematics and Computation* 217: 2619-2630.
- [4] Deswita. L., Nazar. R., Ahmad. R. Ishak. A. & Pop. I. 2009. Similary solution of free convection boundary layer flow on a horizontal plate with variable wall tempe-rature. *European Journal of Scien tific Research* ISSN 1450-216X Vol. 2: 188-1985.
- [5] Fadzilah M. Ali, RoslindaNazar, Norihan M. Arifin & Ioan Pop. 2014. Mixed con-vection stagnation-point flow on a vertical stretching sheetwith external magnetic field. *Applied Mathematics & Mechanics-English Edition* 35(2): 155-166.
- [6] Fernandez-Feria, R., Ortega-Casanova, J. 2014. A pseudospectral based method of lines for solving integro differential boundary layer equations. Application to the mixed con-vection over a heated horizontal plate, *Applied Mathematics and computation.* 242, pages 388-396
- [7] Fernandez-Feria, Del Pino, C and Fernande-Gutiérrez , A., View Affiliations. Separation in the mixed convection boundary layer radial flow over a constanta temperature horizontal plate, *Physics of Fluids* 26, 103603.
- [8] Ghebart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L, Sammakia, B. Buoyancy Induced Flows and Transport, Hemisphere, New York, 1988.
- [9] Hansen, A.G. Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering, Prentice Hal Inc, New Jersey,1964.
- [10] Kartini Ahmad, RoslindaNazar & Ioan Pop. 2012. Mixed convection in laminar film flow of a micropolar fluid. Interna-tional Communi-cations in *Heat and Mass Transfer* 39(1): 36-39.
- [11] Keller, H.B. 1970. A new differenc scheme for parabolic promlems. Dalam: Bramble, J Numerical *Soluctions of Partical Defferential Equations*. New York. Achademic
- [12] Rajesh Sharma, Anuar Ishak, Roslinda Nazar & Ioan Pop. 2014. Boundary layer flow & heat transfer over a permeable exponentially shrinking sheet in the presence of thermal radiation and partial slip. *Journal of Applied Fluid Mech.* 7(1): 125-134.
- [13] Rashad, A. M., Chamkha, A. J, Modather. 2013. Mixed convection boundary-Layer flow past a horizontal circular cylinder embedded in a poros medium filled with ananofluid under convective boundary condition. November volume 86, Pages 380-388.
- [14] Stewartson, K. 1958. on free convection from a horizontal plate, *J. App. Math. Phys. (ZAMP)* 276-281.
- [15] Tham L, Nazar R, Pop I. 2013. Mixed convection boundary layer flow past a horizontal circular cylinder embedded in a porous Medium saturated by a nano-fluid: Brinkman model. *J Porous Med* 16: 445–457
- [16] Tham L, Nazar R, 2014. Mixed convec-ion flow about a solid sphere embedded in a porous medium filled with a nano-fluid. *Sains Malaysia* 41: 1643-1649