MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 1 (1963)

NAPRĘŻENIA CIEPLNE W CIAŁACH LEPKOSPRĘŻYSTYCH

ELI STERNBERG (PROVIDENCE)

1. Wstęp

Wiele przyczyn technicznych złożyło się w ostatnich latach na wzrost zainteresowania zagadnieniami naprężeń i odkształceń w ciałach lepkosprężystych. Praca nasza, poświęcona wyłącznie ciałom, które wykazują przy warunkach izotermicznych i dla odkształceń infinitezymalnych własności liniowej lepkosprężystości, ma służyć dwom zadaniom. Po pierwsze, zamierzamy podać w niej systematyczny przegląd ostatnich wyników w tej dziedzinie, a po drugie — zapoznać Czytelnika z zagadnieniami szczegółowymi i z literaturą przedmiotu.

Opracowanie nasze ogranicza się głównie do analizy quasi-statycznych naprężeń cieplnych w ciałach jednorodnych, izotropowych i wykazujących lepkosprężystość liniową. Zagadnienia dotyczące ciał niejednorodnych i anizotropowych, wpływu sił bezwładności i sprzężenia termo-mechanicznego są jedynie wymienione przy końcu pracy (p. 7).

W pierwszej części pracy (p. 2, 3 i 4) omawiamy teorię termo-lepkosprężystości przy założeniu, że mechaniczne własności materiału nie zależą od temperatury. Ponieważ prędkość zachodzenia procesów lepkosprężystych jest bardzo wrażliwa na zmiany temperatury, założenie to jest dalekie od rzeczywistości fizykalnej. Mimo to teoria materiałów o własnościach niezależnych od temperatury może być użyteczna jako wstęp do bardziej realistycznego potraktowania zagadnienia, tym bardziej że przy tych założeniach otrzymano wiele rozwiązań szczególnych.

Następna część pracy (p. 5 i 6) dotyczy ciał lepkosprężystych o własnościach zależnych od temperatury, przy czym szczególny nacisk położono na teorię materiałów o prostych własnościach termo-reologicznych. Teoria ta opiera się na hipotezie, że równomierna zmiana temperatury całego ciała wpływa na zmianę jego własności mechanicznych powodując tylko równomierne zniekształcenie skali czasu. Należy zaznaczyć, że szczupłość miejsca poświęconego tu wpływowi własności mechanicznych zależnych od temperatury nie oznacza, że wpływ ten ma niewielkie znaczenie, lecz że zagadnienie jest bardziej złożone.

Mimo że w naszych rozważaniach dużo uwagi poświęcamy związkom różniczkowym pomiędzy naprężeniami i odkształceniami, stwierdzić należy, że ogólniejsza od nich całkowa postać tych związków jest odpowiedniejsza w zastosowaniu do ciał o ciągłym widmie czasów relaksacji lub opóźnienia. Można to uzasadnić dobrze znanym faktem, że modele skończone, podlegające operatorowym prawom różniczkowym (pomimo ich wartości poznawczej i tradycyjnej popularności), nie dają ścisłej podstawy do opisania i przewidywań zachowania się rzeczywistego ciała lepkosprężystego w znacznym przedziale czasu lub częstości. Brak ten jest jeszcze bardziej widoczny dla modeli zależnych od temperatury.

Rozważania nasze dotyczące teorii termo-lepkosprężystości opierają się w dużym stopniu na wynikach otrzymanych we wcześniejszej pracy [1], dotyczącej teorii izotermicznej. W szczególności szerokie wykorzystanie własności splotu Stieltjesa, o których była mowa w pracy [1], ułatwia operowanie funkcjami nieciągłymi w czasie. W pracy [1] podkreśliliśmy, że algebra i rachunek splotu stanowią najwłaściwsze narzędzie matematyczne w przypadku teorii liniowej lepkosprężystości. Natomiast nadmierne poleganie na transformacjach całkowych powoduje czasami zaciemnienie odnośnych rozważań.

Wydaje się, że pewne podane w pracy wyniki teoretyczne, mimo że posiadają charakter elementarny, nie są jeszcze znane. W tym sensie praca nasza ma charakter pracy nie tylko przeglądowej.

2. Mechaniczne własności niezależne od temperatury. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

W przypadku braku efektów sprzężenia termo-mechanicznego podstawowy układ równań teorii pola, rządzących teorią quasi-statystycznych liniowych ciał lepkosprężystych, sprowadza się do zlinearyzowanych związków pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami, do naprężeniowych równań równowagi i do odpowiednich liniowych praw dziedziczenia. Odniesiemy nasz układ równań do kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych x_i i zastosujemy zwykłą notację wskaźnikową [1].

Niech $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ będą wartościami składowych przemieszczenia, infinitezymalnego odkształcenia oraz naprężenia w punkcie o promieniu wodzącym $\mathbf{x}$ w chwili t. Wtedy *związki pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami* przyjmują postać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2.1}$$

natomiast *równania równowagi* mają postać następującą:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \qquad \sigma_{ji} = \sigma_{ij}, \tag{2.2}$$

przy czym F_i są składowymi sił masowych.

[1] O ile nie będzie to osobno zaznaczone, wskaźniki łacińskie będą przybierać wartości 1, 2 i 3; stosujemy konwencję sumacyjną względem powtarzających się indeksów, a przecinek poprzedzający indeks oznacza różniczkowanie cząstkowe względem odpowiedniej współrzędnej układu kartezjańskiego.

W celu uproszczenia równań stanu lepkosprężystych ciał izotropowych wprowadzimy składowe dewiatora odkształcenia i naprężenia

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \end{aligned}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera. Następnie przez $T(\mathbf{x}, t)$ oznaczymy lokalną chwilową temperaturę, a przez T_0 dowolnie przyjętą temperaturą odniesienia. Funkcję Θ zdefiniowaną związkiem

$$(2.4)\qquad \Theta = T - T_0,$$

będziemy nazywali historią pola temperatury. Wreszcie przez α oznaczymy współczynnik rozszerzalności cieplnej zakładając, że jest on stały. Jeżeli α będzie funkcją temperatury, to wszystkie poprzednie rozważania ulegną zupełnie elementarnemu uogólnieniu: należy wtedy po prostu α zastąpić przez $\alpha_0 = \alpha(T_0)$, a związek (2.4) przez zależność

$$(2.5)\qquad \Theta(x, t) = \frac{1}{\alpha_0}\int_{T_0}^{T(x,t)} \alpha(T')\,dT'.$$

Odpowiednie liniowe, izotropowe związki dziedziczenia pomiędzy odkształceniami i naprężeniami w *postaci całkowego prawa relaksacji* przybiorą następującą postać:

$$(2.6)\qquad s_{ij} = e_{ij} * dG_1, \qquad \sigma_{kk} = (\varepsilon_{kk} - 3\alpha\Theta) * dG_2.$$

Tutaj G_1 i G_2 oznaczają odpowiednie moduły relaksacji dla ściskania izotropowego. Moduły te są obecnie wyłącznie funkcjami czasu, ponieważ ograniczamy się do ciał jednorodnych i zakładamy, że własności mechaniczne materiału nie zależą od temperatury.

Zapisując związki (2.6) zastosowaliśmy skrócony zapis splotu Stieltjesa, wprowadzony uprzednio w pracy [1] w związku z teorią izotermiczną. A więc jeżeli f i g są funkcjami położenia i czasu, to $\omega = f * dg$ będzie funkcją zdefiniowaną przez całkę Stieltjesa

$$(2.7)\qquad \omega(\mathbf{x}, t) = [f * dg](\mathbf{x}, t) = \int_{t'=-\infty}^{t} f(\mathbf{x}, t-t')\,dg(\mathbf{x}, t')$$

pod warunkiem, że całka ta ma sens.

Zauważmy, że zgodnie ze związkami (2.6) tensor naprężenia w każdej ustalonej chwili jest liniowym, ciągłym i izotropowym funkcjonałem całej poprzedzającej lokalnej historii temperatury i odkształcenia; co więcej, odwzorowanie historii temperatury i odkształcenia na stowarzyszoną historię naprężenia jest niezmiennikiem względem przesunięcia skali czasu oraz posiada tę własność, że naprężenia spowodowane swobodnym rozszerzeniem termicznym znikają tożsamościowo. Można wykazać [2] (przy odpowiednich założeniach o regularności), że (2.6) jest najogólniejszym związkiem pomiędzy odkształceniami i naprężeniami spełniającymi powyższe wymagania.

Równania pola (2.1), (2.2) i (2.6) muszą być spełnione w czaso-przestrzeni [3] $\mathcal{R}\times(-\infty, \infty)$, to znaczy dla wszystkich $(\mathbf{x}, t)$ takich, że $\mathbf{x}$ należy do otwartego obszaru $\mathcal{R}$ wypełniającego wnętrze ciała, a t leży w przedziale $(-\infty, \infty)$. Bez zasadniczego zmniejszenia ogólności możemy na powyższe równania pola nałożyć warunek, aby ciało znajdowało się pierwotnie w stanie niezaburzonym w sensie *warunków początkowych*:

$$u_i = \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} = F_i = \Theta = 0 \quad \text{dla} \quad R\times(-\infty, 0), \tag{2.8}$$

gdzie R jest domknięciem $\mathcal{R}$, to znaczy obszarem $\mathcal{R}$ wraz z jego brzegiem. Wreszcie w przypadku zagadnienia z mieszanymi warunkami brzegowymi mamy następujące *warunki brzegowe*:

$$\begin{aligned} &u_i = u_i^b \quad \text{na} \quad B_1\times(-\infty, \infty), \\ &S_i = \sigma_{ij}n_j = S_i^b \quad \text{na} \quad B_2\times(-\infty, \infty). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tutaj B_1 i B_2 są dopełniającymi podzbiorami brzegu B obszaru $\mathcal{R}$, n_i jest zewnętrzną jednostkową normalną do B, natomiast u_i^b i S_i^b są odpowiednio danymi przemieszczeniami i naprężeniami powierzchniowymi.

W braku wyraźnego stwierdzenia że jest inaczej, będziemy odtąd zakładać, że zbiory punktów R, B_1, B_2 nie zależą od czasu. Będziemy także przyjmować, że R jest ograniczonym regularnym obszarem przestrzeni [4] oraz że B_1 i B_2 są całkowalne.

Tak więc rozważany problem polega na wyznaczeniu funkcji u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, które dla danych R, B_1, B_2, znanych G_1, G_2, α i danych F_i, Θ, u_i^b, S_i^b spełniają równania pola (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) w $\mathcal{R}\times(-\infty, \infty)$ oraz ponadto — warunki początkowe (2.8) i warunki brzegowe (2.9). Historię pola temperatury Θ można w szczególności określić jako rozwiązanie niezależnego zagadnienia przewodnictwa cieplnego.

Wprowadzimy następującą definicję stanu *lepkosprężystego*. Mówimy, że *uporządkowany układ wielkości* u_i, ε_{ij}, σ_{ij} *należy do klasy stanów lepkosprężystych na* $R\times(-\infty, \infty)$, *odpowiadających danym* G_1, G_2, α, F_i, Θ i *zapisujemy*

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad R\times(-\infty, \infty), \tag{2.10}$$

jeżeli

a) $G_\beta(\beta = 1, 2)$ *znika na* $(-\infty, 0)$, *jest dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły na* $[0, \infty)$, *oraz* $G_\beta(0) > 0$;

---

[2] Por. [1] p. 2, gdzie przedstawiono odpowiednie wyniki w przypadku teorii izotermicznej.

[3] Kartezjański iloczyn zbioru A i zbioru B będziemy oznaczać w sposób konwencjonalny $A\times B$.

[4] Przez «regularny obszar przestrzeni» rozumiemy obszar, którego brzeg składa się ze skończonej liczby nie przecinających się zamkniętych powierzchni regularnych; z kolei ten termin użyty jest w sensie podanym przez Kellogga [2].

b) u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, F_i, Θ *znikają na* $R \times (-\infty, 0)$ *i są ciągłe na* $R \times [0, \infty)$. Θ *jest jednokrotnie, a* u_j*—trzykrotnie rożniczkowalne w sposób ciągły na* $R \times [0, \infty)$;

c) *równania* (2.1), (2.2) (2.3), (2.6) *są spełnione w* $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$. *Jeżeli w szczególności* $\Theta = 0$ *na* $R \times (-\infty, \infty)$, *to mówimy, że stan* $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *jest izotermiczny i piszemy*

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \underset{I}{\mathcal{V}} [G_1, G_2, F_0] \text{ na } R \times (-\infty, \infty). \tag{2.11}$$

Postulaty a), b), c), choć częściowo się pokrywają, to są jednak niesprzeczne. Również założenia dotyczące gładkości, zawarte w a), b), mogą być osłabione (szczególnie gdy dotyczy to zależności od czasu) kosztem bardziej wypracowanych hipotez regularności. Jednak takie ulepszenia wymagałyby wprowadzenia w dalszych twierdzeniach dodatkowych założeń ubocznych dotyczących gładkości, które odwiodłyby nas jednak od głównego celu naszej pracy.

Należy podkreślić, że funkcje występujące w poprzedniej definicji stanu lepkosprężystego mogą wykazywać nieciągłości o skończonym skoku w punkcie $t = 0$. Chociaż tego rodzaju osobliwości są fizykalnie nierealne, szczególnie w kontekście teorii quasi-statycznej, to — dzięki zasadzie Duhamela — grają one ważną rolę w teorii całkowania podstawowych równań pola. Jedną z korzyści wynikających ze sformułowania równań stanu (2.6) w postaci splotu Stieltjesa jest możliwość systematycznego rozpatrzenia wspomnianych nieciągłości i uniknięcia zwykłych, czysto formalnych manipulacji z funkcją delta Diraca.

Jeżeli równanie (2.10) jest spełnione, to związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami przedstawić można w sposób konwencjonalny za pomocą całki Riemanna (por. [1], twierdzenie 3.4) ważnej dla $(\mathbf{x}, t)$ z obszaru $R \times [0, \infty)$

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{x}, t) &= G_1(t)\, \overset{\circ}{e}_{ij}(\mathbf{x}) + \int_0^t G_1(t-t')\, \dot{e}_{ij}(\mathbf{x}, t')\, dt', \\ \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) &= G_2(t)\, [\overset{\circ}{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x}) - 3\alpha \overset{\circ}{\Theta}(\mathbf{x})] + \int_0^t G_2(t-t')\, [\dot{\varepsilon}_{kk}(\mathbf{x}, t') - 3\alpha\dot{\Theta}(\mathbf{x}, t')]\, dt'. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Zarówno tu jak i w dalszym ciągu pracy $\dot{f}$ oznacza pierwszą pochodną czasową funkcji miejsca i czasu f, natomiast

$$\overset{\circ}{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, 0). \tag{2.13}$$

Rozpatrzymy teraz przypadek ciała sprężystego. W tym celu zdefiniujemy jednostkową funkcję Heaviside'a $h(t)$ w sposób następujący

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \quad \text{dla} \quad -\infty < t < 0, \\ h(t) &= 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t < \infty. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ze związków (2.12) wynika natychmiast, że gdy przyjmiemy

$$G_1 = 2\mu h, \quad G_2 = 3Kh, \tag{2.15}$$

gdzie μ i K są stałymi, to związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.6) przyjmą postać

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3K(\varepsilon_{kk} - 3\alpha\Theta). \tag{2.16}$$

Uwzględniając (2.3) widzimy, że równania (2.16) są równoważne prawu Hooke'a (uzupełnionemu członami termicznymi), μ jest modułem odkształcenia postaciowego, a K modułem rozszerzalności objętościowej materiału sprężystego. Powyższa uwaga wskazuje na to, że klasyczna, *quasi-statyczna* teoria sprężystości jest przypadkiem szczególnym rozpatrywanej tu termo-lepkosprężystości. Podamy następującą definicję *quasi-statycznego stanu sprężystego. Jeżeli warunek* (2.10) *jest spełniony, a funkcje relakasacji spełniają związki* (2.15), *przy czym μ oraz K są stałymi* (*dodatnimi*), *to mówimy, że układ* $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *należy do klasy quasi-statycznych stanów sprężystych na* $R \times (-\infty, \infty)$ *odpowiadających danym* μ, K, α, F_i, Θ *i piszemy*

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \underset{Q}{\mathcal{E}} [\mu, K, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty). \tag{2.17}$$

Z powyższej definicji jasno wynika, że quasi-statyczny stan sprężysty, który nie znika tożsamościowo na $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$, nie może być niezależny od czasu w całej rozważanej czasoprzestrzeni. Z (2.17) wynika natomiast, że u_i, ε_{ij}, σ_{ij} muszą spełniać warunki początkowe (2.8). Ponieważ będziemy mieli do czynienia również z rozwiązaniami podstawowych równań pola termosprężystego, zależnymi tylko od miejsca, wygodne będzie wprowadzenie pojęcia *stacjonarnego* (*ustalonego*) *stanu sprężystego. Mówimy, że* $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *należy do klasy stacjonarnych stanów sprężystych na R, odpowiadających danym μ, K, α, F_i, Θ i zapisujemy*

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{E} [\mu, K, \alpha, F_i, \Theta] \quad \textit{na} \quad R \tag{2.18}$$

gdy:

a) *μ i K są stałymi* (*niekoniecznie rzeczywistymi*),

b) u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, F_i, Θ *są funkcjami miejsca ciągłymi na R, przy czym Θ jest jednokrotnie, a u_i — trzykrotnie różniczkowalne w sposób ciągły na R*,

c) *równania* (2.1), (2.2), (2.3), (2.16) *są spełnione* w $\mathcal{R}$.

Powód, dla którego w obecnej chwili nie żądamy, aby stałe μ i K były rzeczywiste, wyjaśni się w końcu p. 4. Na razie zauważmy, że dla każdego ustalonego t w przedziale $(-\infty, \infty)$ z równania (2.17) wynika[5]

$$[u_i(\cdot, t), \varepsilon_{ij}(\cdot, t), \sigma_{ij}(\cdot, t)] \in \mathcal{E} [\mu, K, \alpha, F_i(\cdot, t), \Theta(\cdot, t)] \text{ na } R. \tag{2.19}$$

Tak więc każdy quasi-statyczny stan sprężysty na $R \times (-\infty, \infty)$ uważać można za jednoparametrową rodzinę (z czasem spełniającym rolę parametru) stacjonarnych stanów sprężystych na R, odpowiadającą tym samym stałym sprężystym oraz odpowiedniej rodzinie sił masowych i rozkładów temperatury.

[5] Jeżeli f jest funkcją miejsca i czasu zdefiniowaną na $R \times (-\infty, \infty)$, to przez $f(\cdot, t)$ oznaczamy funkcję miejsca zdefiniowaną na R, otrzymaną jako wynik odwzorowania f przy ustalonym czasie z przedziału $(-\infty, \infty)$.

Spostrzeżenie to odzwierciedla fakt, że w quasi-statycznej teorii sprężystości czas spełnia tylko rolę parametru, natomiast quasi-statyczna teoria lepko-sprężystości zależy od czasu w sposób istotny.

Dotychczas sformułowaliśmy zagadnienia brzegowe w teorii termo-lepko-sprężystości w oparciu o prawo relaksacji (2.6). Zakładając, że $G_\beta(\beta = 1, 2)$, ε_{ij} i σ_{ij} spełniają warunki a) i b) podane w definicji stanu lepkosprężystego, możemy odwrócić związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.6). Prowadzi to (por. [1], twierdzenie 3.3) do równoważnego *całkowego prawa pełzania*:

$$e_{ij} = s_{ij} * dJ_1, \quad \varepsilon_{kk} = \sigma_{kk} * dJ_2 + 3\alpha\Theta, \tag{2.20}$$

gdzie J_1 i J_2 oznaczają odpowiednio funkcje pełzania przy ścinaniu i przy ściskaniu izotropowym. Ponadto dwie pary funkcji G_β i J_β $(\beta = 1, 2)$ połączone są związkiem

$$G_\beta * dJ_\beta = h \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty); \tag{2.21}$$

stosując zaś oznaczenia przyjęte w [1] (twierdzenie 1.3) dla «odwrotności Stieltjesa» funkcji czasu otrzymujemy

$$J_\beta = G_\beta^{-1} \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty). \tag{2.22}$$

Z równania (2.21) wynika dalej, że

$$\overset{\circ}{G}_\beta J_\beta(t) + \int_0^t \dot{G}_\beta(t-t') J_\beta(t') dt' = 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2.23}$$

Z równania (2.12) i odpowiadającego mu wzoru dotyczącego pełzania otrzymuje się natychmiast znane fizykalne znaczenie funkcji relaksacji i pełzania. Tak więc

$$e_{ij} = h \text{ na } R \times (-\infty, \infty) \text{ oznacza, że } s_{ij} = G_1 \text{ na } R \times (-\infty, \infty), \tag{2.24}$$

$$s_{ij} = h \text{ na } R \times (-\infty, \infty) \text{ oznacza, że } e_{ij} = J_1 \text{ na } R \times (-\infty, \infty). \tag{2.25}$$

Analogiczna interpretacja odnosi się do G_2 i J_2.

Jeżeli f jest funkcją miejsca i czasu, posiadającą transformację Laplace'a względem czasu, to fakt ten zapisujemy następująco:

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \eta) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{x}, t); \eta\} = \int_0^\infty f(\mathbf{x}, t) \exp(-\eta t)\, dt, \tag{2.26}$$

gdzie η oznacza parametr transformacji. Przyjmując, że G_β i $J_\beta(\beta = 1, 2)$ są rzędu wykładniczego dla $t \to \infty$, możemy z (2.23) oraz z twierdzenia o splocie transformacji Laplace'a wyciągnąć następujący wniosek:

$$\overline{G}_\beta(\eta)\overline{J}_\beta(\eta) = \frac{1}{\eta^2}, \quad \beta = 1, 2. \tag{2.27}$$

Wreszcie zajmiemy się związkami pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w postaci równań różniczkowych, noszących tradycyjnie nazwę *operatorowych praw różniczkowych* liniowej lepkosprężystości. W tym celu wprowadzimy najpierw następujące oznaczenia. Jeżeli f jest (odpowiednio gładką) funkcją miejsca i czasu zdefiniowaną na R $\times(-\infty, \infty)$, to jej n-tą pochodną cząstkową względem czasu oznaczymy przez

(2.28) $$f^n \equiv D^n f, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie D jest operatorem różniczkowania względem czasu. Dalej oznaczymy przez $\overset{\circ}{f}{}^{(n)}$ funkcję miejsca zdefiniowaną następująco:

(2.29) $$\overset{\circ}{f}{}^{(n)}(\mathbf{x}) = f^{(n)}(\mathbf{x}, 0+) \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \text{ w } R.$$

Operatorowe prawo różniczkowe przyjmie więc postać:

(2.30) $$P_1(D)s_{ij} = Q_1(D)e_{ij}, \; P_2(D)\sigma_{kk} = Q_2(D)[\varepsilon_{kk} - 3a\,\Theta],$$

przy czym $P_\beta(D), Q_\beta(D)$ $(\beta = 1, 2)$ są liniowymi operatorami różniczkowymi

(2.31) $$P_\beta(D) = \sum_{n=0}^{N_\beta} p_{\beta;n} D^n, \qquad Q_\beta(D) = \sum_{n=0}^{N_\beta} q_{\beta;n} D^n, \quad \beta = 1, 2.$$

Tutaj $N_\beta(\beta = 1, 2)$ są liczbami naturalnymi, a współczynniki $p_{\beta;n}$, $q_{\beta;n}$ są stałymi parametrami dla danego (niezależnego od temperatury) materiału. Możemy oczywiście założyć, że albo $p_{\beta;n} \neq 0$, albo $q_{\beta;n} \neq 0$, gdy $n = N_\beta$ $(\beta = 1, 2)$, tak że dla ustalonego β co najmniej jeden z operatorów w (2.31) jest stopnia N_β. Równania różniczkowe (2.30) posiadają rozwiązania w $\mathcal{R} \times (0, \infty)$ oraz muszą spełniać następujące warunki początkowe na R:

(2.32) $$\sum_{n=r}^{N_1} p_{1;n}\overset{\circ}{s}{}_{ij}^{(n-r)} = \sum_{n=r}^{N_1} q_{1;n}\overset{\circ}{e}{}_{ij}^{(n-r)}, \qquad r = 1, 2, \dots, N_1,$$
$$\sum_{n=r}^{N_2} p_{2;n}\overset{\circ}{\sigma}{}_{kk}^{(n-r)} = \sum_{n=r}^{N_2} q_{2;n}[\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{kk}^{(n-r)} - 3a\,\overset{\circ}{\Theta}{}^{(n-r)}], \qquad r = 1, 2, \dots, N_2.$$

Z elementarnego uogólnienia twierdzenia 4.1 w [1] jest oczywiste, że równania (2.30) i (2.32) wynikają z warunku (2.8) oraz z całkowego prawa relaksacji (2.6) lub całkowego prawa pełzania (2.20), o ile tylko ε_{ij}, σ_{ij} i Θ są dostatecznie gładkie i podobnie jak funkcje relaksacji i pełzania wykazują zdegenerowane charakterystyki skończonego widma czasów relaksacji i opóźnienia. W pierwszym przypadku $p_{n;\beta} \neq 0$ dla $n = N_\beta(\beta = 1, 2)$, natomiast w drugim przypadku $q_{n;\beta} \neq 0$ dla $n = N_\beta(\beta = 1, 2)$.

Dla przypadku izotermicznego fizykalne znaczenie warunków brzegowych (2.32) zostało ustalone w pracy [1] (twierdzenie 4.1[6]).

[6] Por. również BOLEY i WERNER [3], p. 15.6.

Przypuśćmy więc, że Θ znika tożsamościowo, a $\mathbf{x}$ jest ustalone. Wtedy warunki (2.32) są konieczne i dostateczne na to, aby każda para funkcji $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \cdot)$, $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \cdot)$ która znika na $(-\infty, 0)$, spełnia (2.30) na $(0, \infty)$ i wykazuje nieciągłości o skończonym skoku w chwili $t = 0$, była granicą pary ciągów, które znikają na $(-\infty, 0)$, spełniają te same związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.30) i posiadają pochodne czasowe [*ciągłe* na $(-\infty, \infty)$] tych samych rzędów co równania (2.30).

Jeżeli prawo całkowe (2.6) daje się sprowadzić do różniczkowego prawa operatorowego (2.30), to wtedy transformacje Laplace'a funkcji relaksacji istnieją, są wymierne i wyrażają się ([1], twierdzenie 4.8) wzorem

$$\bar{G}_\beta(\eta) = \frac{Q_\beta(\eta)}{\eta P_\beta(\eta)}, \quad \beta = 1, 2. \tag{2.33}$$

Przekształcając w podobny sposób całkowe prawo pełzania (2.20) otrzymujemy

$$J_\beta(\eta) = \frac{P_\beta(\eta)}{\eta Q_\beta(\eta)}, \quad \beta = 1, 2. \tag{2.34}$$

Dodatkowe wyniki dotyczące przejścia od operatorowych praw całkowych do praw różniczkowych i odwrotnie znaleźć można w pracy [1] (p. 4).

Ponieważ materiały posiadające skończone widma relaksacji lub opóźnienia przedstawiać można w znany sposób za pomocą modeli złożonych z siatki o skończonej liczbie sprężyn i tłumików, to w większości prac z zakresu lepkosprężystości stosuje się związki między naprężeniami i odkształceniami w postaci różniczkowej, a nie całkowej. Należy jednak pamiętać, że takie podejście nie jest ani uzasadnione względami ogólności, ani usprawiedliwione z punktu widzenia praktyki, ponieważ ścisły opis zachowania się rzeczywistych ciał lepkosprężystych dla dużych zakresów czasu (lub częstości) wymaga zastosowania operatorów różniczkowych stosunkowo wysokiego rzędu.

3. Mechaniczne własności materiału niezależne od temperatury. Związki ogólne

Obecnie zajmiemy się ogólnymi wynikami dotyczącymi podstawowych równań teorii pola i zagadnień brzegowych rozpatrzonych w poprzednim punkcie. W związku z tym nasze rozważania ograniczymy do materiałów, którymi rządzi całkowe prawo relaksacji (2.6); analogiczne wnioski można jednak zastosować do całkowego prawa pełzania (2.20) oraz do operatorowego prawa różniczkowego (2.30).

W celu ułatwienia naszego zadania sformułujemy najpierw związek między omawianą teorią termo-lepkosprężystości i odpowiednią teorią izotermiczną. Związek ten wyraża *analogia sił masowych. Przypuśćmy, że*

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i, \Theta] \text{ na } R \times (-\infty, \infty) \tag{3.1}$$

oraz że

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^b \text{ na } B_1 \times (-\infty, \infty), \\ S_i &= S_i^b \text{ na } B_2 \times (-\infty, \infty). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Następnie niech $\tilde{u}_i$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{F}_i$ *będą zdefiniowane na* $R\times(-\infty, \infty)$ *w następujący sposób*:

$$\tilde{u}_i = u_i, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij},$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + a\delta_{ij}\Theta * dG_2, \tag{3.3}$$

$$\tilde{F}_i = F_i - a\Theta_{,i} * dG_2;$$

wtedy

$$[\tilde{u}_{ij}, \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}] \in \underset{I}{\mathcal{V}} [G_1, G_2, \tilde{F}_i] \text{ na } R\times(-\infty, \infty), \tag{3.4}$$

oraz

$$\tilde{u}_i = u_i^b \text{ na } B_1\times(-\infty, \infty), \tag{3.5}$$

$$\tilde{S}_i = S_i^b + an_i\Theta * dG_2 \text{ na } B_2\times(-\infty, \infty).$$

Na odwrót, jeżeli Θ *posiada te same własności jak w definicji stanu lepkosprężystego, to wtedy równania* (3.3), (3.4), (3.5) *pociągają za sobą* (3.1) i (3.2).

Prawdziwość powyższego twierdzenia można łatwo stwierdzić wychodząc z definicji dotyczących stanu lepkosprężystego oraz izotermicznego lepkosprężystego i wykorzystując znany wynik ([1] twierdzenie 1.6) odnoszący się do przestrzennego różniczkowania splotów Stieltjesa. Jako szczególny przypadek otrzymamy dobrze znaną w termosprężystości[7] analogię sił masowych, gdy funkcje relaksacji spełniać będą (2.15).

Chociaż rozpatrywana uogólniona analogia sprowadzająca mieszane zagadnienia brzegowe termo-lepkosprężystości do zwykłego mieszanego zagadnienia teorii izotermicznej nie posiada praktycznej wartości użytkowej w przypadku, gdy poszukujemy konkretnych rozwiązań zagadnień szczegółowych, to jednak ma ona poważne znaczenie teoretyczne. Analogia ta pozwala bowiem uogólnić twierdzenia znane z teorii izotermicznej na warunki nieizotermiczne. Wykażemy obecnie pewne ważniejsze wnioski osiągnięte w ten właśnie sposób.

Z twierdzenia Volterry [4][8] dotyczącego jednoznaczności rozwiązania mieszanego zagadnienia izotermicznego w związku z powyższą analogią sił masowych otrzymujemy natychmiast *twierdzenie o jednoznaczności*.

Przypuśćmy, że

$$\begin{aligned} &[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V} [G_1, G_2, a, F_i, \Theta] \text{ na } R\times(-\infty, \infty), \\ &[u_i', \varepsilon_{ij}', \sigma_{ij}'] \in \mathcal{V} [G_1, G_2, a, F_i, \Theta] \text{ na } R\times(-\infty, \infty) \end{aligned} \tag{3.6}$$

oraz niech

$$u_i = u_i' \text{ na } B_1\times(-\infty, \infty), \qquad S_i = S_i' \text{ na } B_2\times(-\infty, \infty), \tag{3.7}$$

[7] Por. np. [3], p. 3.3.

[8] Por. [1] p. 8; znaleźć tam można nieco ogólniejszą wersję i bardziej szczegółowy dowód wyniku Volterry w szczególnym przypadku ciała izotropowego.

wtedy

$$(3.8) \qquad [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = [u'_i, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}] + [w_i, 0, 0] \text{ na } R\times(-\infty, \infty),$$

przy czym $w_i = 0$ *na* $R\times(-\infty, 0)$ *oraz* w_i *przedstawia* (*infinitezymalny*) *sztywny ruch całego ciała na* R $[0, \infty]$.

Zgodnie z warunkiem a) w definicji stanu lepkosprężystego funkcje relaksacji występujące w (3.6) powinny spełniać nierówności

$$(3.9) \qquad \overset{\circ}{G}_\beta > 0, \quad \beta = 1, 2.$$

Oznacza to, że muszą one posiadać dodatnie wartości początkowe. Interesujące jest to, że (oprócz założenia o gładkości) dla zagwarantowania jednoznaczności nie potrzeba nakładać żadnych ograniczeń na przyszłe zachowanie się G_β.

Następujące twierdzenie, które jest elementarnym wnioskiem z twierdzenia 6.1 w [1] i z analogii o siłach masowych, podaje charakterystykę początkowego stanu pola odpowiadającego stanowi lepkosprężystemu.

Warunki początkowe. Niech $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *spełnia* (2.10). *Wtedy*

$$(3.10) \qquad [\overset{\circ}{u}_i, \overset{\circ}{\varepsilon}_{jj}, \overset{\circ}{\sigma}_{jj}] \in \mathcal{C}\, [\mu, K, a, \overset{\circ}{F}_i, \overset{\circ}{\Theta}] \text{ na } R,$$

gdzie

$$\mu = \frac{1}{2}\overset{\circ}{G}_1, \qquad K = \frac{1}{3}\overset{\circ}{G}_2.$$

W kontekście teorii termo-lepkosprężystości wynik powyższy posiada określoną interpretację fizyczną, jest bowiem równoważny znanemu twierdzeniu, że w chwili początkowej ciało lepkosprężyste zachowuje się tak jak ciało sprężyste. Oprócz tego powyższe twierdzenie pozwala bezpośrednio wyznaczyć początkowe przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia należące do rozwiązania mieszanego zagadnienia teorii termo-lepkosprężystości, z rozwiązania stacjonarnego zagadnienia termosprężystości; z kolei tym zagadnieniem rządzą *początkowe* siły masowe, temperatura i dane powierzchniowe problemu pierwotnego oraz stałe sprężystości (3.11). Podobnie twierdzenie 6.2 w [1] daje nam analogiczną charakterystykę początkowych (prawostronnych) pochodnych czasowych wszystkich rzędów należących do poszukiwanego stanu lepkosprężystego. Te początkowe pochodne czasowe $\overset{\circ}{u}{}_i^{(n)}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij}^{(n)}$, $\overset{\circ}{\sigma}{}_{ij}^{(n)}$ $(n = 1, 2, ...)$ można znaleźć bezpośrednio z odpowiednich danych początkowych rozwiązując kolejno ciąg stacjonarnych zagadnień termosprężystych, z których każde jest również związane ze stałymi sprężystymi określonymi w (3.11). Ponieważ zgodnie z twierdzeniem o jednoznaczności w klasycznej teorii termosprężystości bez sprzężenia nierówności $\mu > 0$, $K > 0$ wystarczają dla zagwarantowania jednoznaczności odpowiednio regularnego rozwiązania zagadnienia mieszanego, to kryterium Volterry o jednoznaczności (3.9) nie stanowi już niespodzianki.

Dodatkowy wniosek dotyczący zależności stanów lepkosprężystych od czasu i pozwalający wnosić o gładkości stanu względem czasu na podstawie odpowiedniej gładkości funkcji pola i danych powierzchniowych można wyprowadzić z twierdzenia 6.4 w [1].

Przejdziemy obecnie do twierdzenia *wyrażającego zależność stanów lepkosprężystych od miejsca.*

Niech układ $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *spełnia równanie* (2.10); *przyjmijmy ponadto, że*

$$(3.12)^{9} \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{F} = 0, \quad \nabla^2 = 0 \quad \text{na} \quad \mathcal{R} \times (-\infty, \infty).$$

Wtedy w całym $\mathcal{R} \times (-\infty, \infty)$ *spełnione są równania*

$$(3.13) \qquad \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad \nabla^2(\nabla \wedge \mathbf{u}) = 0,$$

$$(3.14) \qquad \nabla^4 u_i = 0, \quad \nabla^4 \varepsilon_{ij} = 0, \quad \nabla^4 \sigma_{ij} = 0.$$

A więc tak jak w termosprężystości wzór (3.12) oznacza, że dylatacja i rotacja przemieszczenia są harmonicznymi, a odkształcenia biharmonicznymi funkcjami miejsca. Wszystkie powyższe funkcje posiadają ciągłe pochodne przestrzenne dowolnych rzędów. Twierdzenie powyższe jest następstwem twierdzenia 6.6 w [1].

Na mocy analogii sił masowych, przekształcenia Greena oraz twierdzeń 1.2 i 1.6 w [1] odpowiednik twierdzenia Bettiego o wzajemności w izotermicznej teorii lepkosprężystości (por. [1], twierdzenie 7.4) prowadzi do następującego *twierdzenia o wzajemności.*

Przypuśćmy, że

$$(3.15) \qquad \begin{aligned} &[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty), \\ &[u_i', \varepsilon_{ij}', \sigma_{ij}'] \in \mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i', \Theta'] \quad \text{na} \quad R \times (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

wtedy na $(-\infty, \infty)$ *mamy:*

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \int_B S_i * du_i' dA + \int_R F_i * du_i' dV + \alpha \int_R \Theta * d\varepsilon_{ii}' * dG_2 dV &= \\ = \int_B S_i' * du_i dA + \int_R F_i' * du_i dV + \alpha \int_R \Theta' * d\varepsilon_{ii} * dG_2 dV &= \\ = \int_R \sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij}' dV + \alpha \int_R \Theta * d\varepsilon_{ii}' * dG_2 dV &= \\ = \int_R \sigma_{ij}' d\varepsilon_{ij} dV + \alpha \int_R \Theta * d\varepsilon_{ii} * dG_2 dV&. \end{aligned}$$

Należy podkreślić, że związki wzajemności otrzymane z powyższego twierdzenia przez przyjęcie $G_\beta (\beta = 1, 2)$ zgodnie z (2.15) oraz założenie $\Theta = 0$ na $R \times (-\infty, \infty)$ będą się różnić od quasi-statycznej wersji związków wzajemności Bettiego w przypadku sprężystości izotermicznej. Różnica ta znika, gdy siły masowe i historia pól temperatury oraz dane powierzchniowe obu stanów w (3.15) są rozdzielnymi funkcjami miejsca i czasu o wspólnej zależności od czasu. W tym szczególnym przypadku można wykazać [10], że sploty wchodzące do (3.16) (np. $S_i * du_i'$) redukują się do zwykłych iloczynów (tzn. $S_i u_i'$),

[9] Tutaj i w dalszym ciągu ∇ oznacza zwykły, przestrzenny operator gradientu, natomiast $\nabla\cdot$, ∇^1, ∇^2 są odpowiednio diwergencją, rotacją i operatorem Laplace'a.

[10] Por. twierdzenie 7.5 w [1].

a w wyniku otrzymujemy związki wzajemności identyczne ze związkami otrzymywanymi z uogólnienia twierdzenia Bettiego na quasi-statyczną teorię termosprężystości.

Powyższe twierdzenie o wzajemności może posłużyć do wyprowadzenia wzorów na odkształcenia średnie (niezależne od temperatury) wywołane w ciele lepkosprężystym danymi siłami objętościowymi, historią pola temperatury oraz siłami powierzchniowymi [11]. Ograniczymy się tu jedynie do podania wzoru na całkowitą zmianę objętości. Wzór ten można wyprowadzić bezpośrednio z twierdzenia 7.6 w [1] za pomocą analogii sił masowych i twierdzenia Greena.

Zmiana objętości. Ze wzoru (2.10), *dla t z przedziału* $(-\infty, \infty)$ *wynika, że*

$$\nabla V(t) = [\Lambda * dJ_2](t) + 3\alpha \int_R \Theta(\mathbf{x}, t)\, dV, \tag{3.17}$$

przy czym J_2 jest funkcją pełzania odpowiadającą modułowi relaksacji G_2, a ponadto

$$\Delta V(t) = \int_R \varepsilon_{ii}(\mathbf{x}, t)\, dV, \tag{3.18}$$

$$\Lambda(t) = \int_B x_j S_i(\mathbf{x}, t)\, dA + \int_R x_i F_i(\mathbf{x}, t)\, dV. \tag{3.19}$$

Trzeba zauważyć, że wzór (3.17) można również wyprowadzić [12] wyłącznie z (3.18), (2.2) i z drugiego ze wzorów (2.6) bez potrzeby uciekania się do (2.21) i twierdzeń 1.2 oraz 1.6 w pracy [1]. A zatem *wzór* (3.17) *jest ważny dla dowolnego ciała będącego w stanie odkształceń infinitezymalnych, którego lepkosprężysta liniowa dylatacja jest niezależna od temperatury i to bez względu na charakter odkształceń postaciowych.* Jeżeli w szczególności $S_i = 0$ na $B(-\infty, \infty)$ oraz $F_i = 0$ na $R(-\infty, \infty)$, to (3.17) pociągnie za sobą równość

$$\Delta V(t) = 3\alpha \int_R \Theta(\mathbf{x}, t)\, dV \quad \text{dla} \quad t \quad \text{w} \quad (-\infty, \infty). \tag{3.20}$$

Ten sam wniosek otrzymał W. NOWACKI ([7], Rozdział XI) opierając się na mniej bezpośrednim dowodzie. A więc w przypadku braku sił powierzchniowych i objętościowych całkowita zmiana objętości jest taka sama jak przy swobodnym rozszerzeniu się termicznym. Widać stąd, że ten dobrze znany wynik klasycznej termosprężystości [13] pozostaje ważny bez zmiany przy obecnych ogólniejszych założeniach.

Następne twierdzenie dotyczące również braku sił powierzchniowych i objętościowych otrzymujemy przez odpowiednie przystosowanie wyniku podanego w [6] do klasy materiałów lepkosprężystych zależnych od temperatury.

---

[11] Wyprowadzenie analogicznych wyników w izotermicznej teorii ciał lepkosprężystych anizotropowych Czytelnik znajdzie w [5].

[12] Por. [6]. Znaleźć tam można takie wyprowadzenie w przypadku szczególnym, gdy materiał wykazuje czysto sprężystą dylatację.

[13] Por. np. [3], p. 9.15. Wynik ten otrzymał Hieke [8], który oparł swój dowód na uogólnionym twierdzeniu Bettiego o wzajemności w teorii termosprężystości.

Historia beznaprężeniowych pól temperatury. Przyjmijmy, że równanie (2.10) *jest spełnione oraz przypuśćmy, że* $S_i = 0$ *na* $B\times[0, \infty)$, $F_i = 0$ *na* $R\times[0, \infty)$. *Równość* $\sigma_{ij} = 0$ na $R\times(-\infty, \infty)$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = a_0(t)+a_i(t)x_i \quad \text{dla} \quad (\mathbf{x}, t) \text{ w } R[0,\infty), \tag{3.21}$$

gdzie a_0, a_i *są funkcjami ciągłymi na* $[0, \infty)$.

Wskazówka dotycząca dowodu konieczności warunku (3.21) w przypadku, gdy ciało ma być swobodne od naprężeń, ukazała się wcześniej od [6] w pracy HILTONA [9]. Analogiczne twierdzenia dla przypadku dwuwymiarowego, gdy rozkład temperatury nie wywołuje naprężeń termicznych (dla płaskiego stanu odkształcenia i uogólnionego płaskiego stanu naprężenia), można również znaleźć w pracy [6].

Odpowiednie rezultaty trójwymiarowej i dwuwymiarowej teorii termosprężystości, wynikające z rozpatrywanych obecnie twierdzeń, znaleźć można w [3], pp. 3.9 i 4.9.

Na zakończenie tego rozdziału wymienimy jeszcze kilka dodatkowych wniosków wynikających z analogii sił masowych. Można np. rozszerzyć zasadę Duhamela znaną z teorii izotermicznej (por. [1], p. 5) na naprężenia i odkształcenia termiczne. Podobnie otrzymać można analogiczne uogólnienie zasad wariacyjnych izotermicznej teorii lepkosprężystości [14]. Wreszcie całkowe przedstawienie za pomocą funkcji Greena rozwiązań izotermicznych zagadnień brzegowych podane w [11] można w ramach omawianej teorii łatwo uogólnić przez uwzględnienie efektów termicznych.

Kilka dalszych wniosków z analogii sił masowych spotykamy w p. następnym, w którym zajmiemy się wynikami mającymi bezpośredni związek z rozwiązaniami zagadnień brzegowych tego typu co sformułowane w p. 2.

4. Materiały o własnościach niezależnych od temperatury. Metody całkowania, dostępne rozwiązania

W celu odmiennego sformułowania zagadnień brzegowych danych w p. 2 podamy obecnie przemieszczeniowe równania równowagi i równania zgodności odkształceń w naprężeniach. Równania te można otrzymać z podstawowego układu równań pola przez eliminację naprężeń i odkształceń lub przemieszczeń i odkształceń. Poszukiwane uogólnienia równań równowagi Cauchy'ego i równań Beltramiego–Michella otrzymuje się natychmiast za pomocą analogii sił masowych z ich odpowiedników w przypadku izotermicznym (twierdzenia 5.5 i 5.7 w [1]).

Przemieszczeniowe równania równowagi. Z równania (2.10) *wynika na* $R\times$ $\times(-\infty, \infty)$

$$u_{i,jj} * dG_1+\frac{1}{3}u_{j,ji} * d(G_1+2G_2)+2F_i = 2\alpha\Theta_{,i} * dG_2 \tag{4.1}$$

[14] Uogólnienie klasycznych zasad wariacyjnych teorii sprężystości na przypadek teorii lepkosprężystości można znaleźć w pracy [10].

lub

(4.2) $$\nabla^2\mathbf{u}*dG_1+\frac{1}{3}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}*d(G_1+2G_2)+2\mathbf{F}=2\alpha\nabla\Theta*dG_2.$$

Równania zgodności odkształceń w naprężeniach. Z równania (2.10) *wynika na* $\mathcal{R}\times(-\infty,\infty)$

(4.3) $$\nabla^2\sigma_{ij}*dJ_1+\frac{1}{3}\sigma_{kk,ij}*d(2J_1+J_2)=\Phi_{ij},$$

gdzie J_β *jest funkcją pełzania odpowiadającą* G_β $(\beta=1,2)$,

(4.4) $$\Phi_{ij}=\delta_{ij}F_{k,k}*d\Omega-(F_{i,j}+F_{j,i})*dJ_1-\alpha\delta_{ij}\nabla^2\Theta*dG_2*d(\Omega+J_1)-\alpha\Theta_{,ij}$$

oraz

(4.5)[15] $$\Omega=J_1*d(J_2-J_1)*d(J_1+2J_2)^{-1}.$$

Zagadnienie mieszane sformułowane wyłącznie w przemieszczeniach polega na znalezieniu rozwiązania równania (4.1) na $\mathcal{R}\times(-\infty,\infty)$ takiego, że $u_i=0$ na $R\times(-\infty,0)$ i spełniającego warunki brzegowe

$$u_i=u_i^b \text{ na } B_1\times(-\infty,\infty),$$

(4.6) $$\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})*dG_1+\frac{1}{3}\delta_{ij}u_{k,k}*d(G_2-G_1)-\alpha\delta_{ij}\Theta*dG_2\right]n_j=S_i^b$$
$$\text{na } B_2\times(-\infty,\infty),$$

wynikające z (2.9) przy uwzględnieniu (2.1), (2.3) i (2.6). Z drugiej strony, jeżeli obszar R jest jednospójny i $B_2=B$ (siły powierzchniowe dane są na całym brzegu), to nie znane naprężenia są w zupełności określone wzorami (2.2), (4.3) i drugim z warunków brzegowych (2.9).

Naszym następnym zadaniem jest pokazanie rozwiązania *szczególnego* równania (4.2), odpowiadającego brakowi sił masowych i danej historii pola temperatury, drogą uogólnienia znanego potencjału termosprężystego, który — jak się zdaje — został po raz pierwszy wprowadzony przez BORCHARDTA [12].

Potencjał termo-lepkosprężysty. Niech $G_\beta(\beta=1,2)$ *i* Θ *spełniają warunki a*) *i b*) *definicji stanu lepkosprężystego. Przypuśćmy, że* Θ *jest dostatecznie gładką funkcją o wartościach rzeczywistych, zdefiniowaną na* $\mathcal{R}\times(-\infty,\infty)$ *znikającą na* $\mathcal{R}\times(\infty,0)$ *i spełniającą w* $\mathcal{R}\times(-\infty,\infty)$ *równanie*

(4.7) $$\nabla^2\theta=3\alpha\Theta*dG_2d(2G_1+G_2)^{-1}.$$

Wtedy w całym obszarze funkcja u zdefiniowana wzorem

(4.8) $$\mathbf{u}=\nabla\theta$$

spełnia (4.2), *jeśli tylko* $\mathbf{F}=0$ *na* $\mathcal{R}\times(-\infty,\infty)$.

Aby udowodnić to twierdzenie, należy po prostu podstawić (4.8) do (4.2), zastosować (4.7), przekształcenia algebraiczne i rachunek splotów Stieltjesa[16].

[15] Tu i w dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenia na odwrotność całki Stieltjesa wprowadzone w [1], twierdzenie 1.3. Por. (2.21) i (2.22).

[16] Rozwiązania szczególne (4.2) można znaleźć w książkach H. Parkusa [13], Rozdział VI, i W. Nowackiego [7], Rozdział XI.

Odpowiednio regularne rozwiązanie równania Poissona (4.7) można otrzymać z kolei za pomocą potencjału Newtona. Jest to widoczne z lematu 9.1 w [1]. I rzeczywiście, jeżeli ϱ oznacza prawą stronę równania (4.7), to rozwiązanie takie dane jest przez

$$\theta(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R}\frac{\varrho(\boldsymbol{\xi}, t)}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}dV_{\xi} \tag{4.9}$$

dla wszystkich $(\mathbf{x}, t)$ w $R\times(-\infty, \infty)$.

Ostatnie twierdzenie dostarcza oczywiście jeszcze innych środków do sprowadzenia zagadnienia brzegowego z p. 2 do zagadnienia mieszanego teorii izotermicznej. Twierdzenie to w połączeniu z twierdzeniem 9.2 w [1] prowadzi do następującego uogólnienia funkcji Papkowicza-Neubera znanej z klasycznej teorii sprężystości na przypadek teorii termo-lepkosprężystości.

Uogólnione rozwiązanie Papkowicza-Neubera. Niech G_β $(\beta = 1, 2)$, Θ, θ *spełniają założenia poprzedniego twierdzenia oraz niech* F *spełnia warunek b) w definicji stanu lepkosprężystego. Przypuśćmy, że* φ i ψ *są (dostatecznie gładkimi) funkcjami zdefiniowanymi na* $\mathcal{R}\times(-\infty, \infty)$, *znikającymi na* $\mathcal{R}\times(-\infty, 0)$ *i spełniającymi równanie*

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{H}, \quad \nabla^2\boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{2}\mathbf{H}, \tag{4.10}$$

gdzie

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} * dG_1^{-1} * d(2G_1+G_2)^{-1} \tag{4.11}$$

w obszarze w $\mathcal{R}\times(-\infty, \infty)$. *Wtedy funkcja* $\mathbf{u}$ *zdefiniowana przez*

$$\mathbf{u} = \nabla\theta+\nabla(\varphi+\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\psi}) * d(G_1+2G_2)-4\boldsymbol{\psi} * d(2G_1+G_2) \tag{4.12}$$

spełnia równanie (4.2) *w obszarze* $\mathcal{R}\times(-\infty, \infty)$.

Z uwagi na twierdzenie 9.4 w [1] powyższe rozwiązanie przemieszczeniowych równań równowagi jest zupełne w tym samym sensie, że każde odpowiednio regularne rozwiązanie (4.2) można przedstawić w postaci (4.7), (4.10), (4.12). Tak więc wprowadzenie potencjałów przemieszczenia (funkcji naprężeń) θ, φ oraz $\boldsymbol{\psi}$ sprowadza mieszane zagadnienie brzegowe do wyznaczenia odpowiednich rozwiązań równania Poissona. Z drugiej strony, ponieważ sploty Stieltjesa w równaniu (4.12) zawierają funkcje φ i $\boldsymbol{\psi}$ oraz ze względu na budowę drugiego z równań (4.6), zastosowanie warunków brzegowych do funkcji naprężeń prowadzi zwykle do układu równoczesnych równań całkowych.

Przejdziemy obecnie do dobrze znanej zasady odpowiedniości łączącej liniowe teorie lepkosprężystości i sprężystości. Zasadę tę, posiadającą kapitalne znaczenie dla rozwiązań omawianej klasy zagadnień brzegowych, wyrazić można w następującej zwięzłej postaci za pomocą definicji stanu podanych w p. 2.

Zasada odpowiedniości. Przypuśćmy, że

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]\in\mathcal{V}[G_1, G_2, \alpha, F_i, \Theta] \quad \text{na} \quad \mathcal{R}\times(-\infty, \infty) \tag{4.13}$$

oraz

$$u_i = u_i^b \text{ na } B_1\times(-\infty, \infty), \quad S_i = S_i^b \text{ na } B_2\times(-\infty, \infty). \tag{4.14}$$

Przyjmijmy, że funkcje $G_\beta(t)$ $(\beta = 1, 2)$, $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $F_i(\mathbf{x}, t)$ *oraz* $\Theta(\mathbf{x}, t)$ *dla wszystkich* $\mathbf{x}$ *w* R *są rzędu wykładniczego* $0(\exp(s_0 t))$, *gdy* $t \to \infty$, *przy czym* s_0 *jest stałą (rzeczywistą). Wtedy dla każdego* η *takiego, że* $\mathrm{Re}(\eta) > s_0$, *mamy*

(4.15)[17] $[\bar{u}_i(\cdot,\eta), \bar{\varepsilon}_{ij}(\cdot,\eta), \bar{\sigma}_{ij}(\cdot,\eta)] \in \mathcal{E}[\mu(\eta), K(\eta), \alpha, \bar{F}_i(\cdot,\eta), \bar{\Theta}(\cdot,\eta)$ *na* R,
gdzie

$$\mu(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\bar{G}_1(\eta)), \qquad K(\eta) = \frac{1}{3}\eta\,\bar{G}_2(\eta) \tag{4.16}$$

i ponadto

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(\cdot,\eta) &= \bar{u}_i^b(\cdot,\eta) \text{ na } B_1, \\ \bar{S}_i(\cdot,\eta) &= \bar{S}_i^b(\cdot,\eta) \text{ na } B_2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Z powyższego twierdzenia oczywiście wynika, że jeżeli na rozwiązaniu termo-lepkosprężystego zagadnienia opisanego przez (4.13) i (4.14) można dokonać transformacji Laplace'a, to rozwiązanie to musi być zgodne z odwrotną transformacją rozwiązania jednoparametrowej rodziny stacjonarnych, termo-sprężystych zagadnień brzegowych scharakteryzowanych związkami (4.15), (4.16), (4.17). Wobec tego zasada odpowiedniości sprowadza zagadnienie pierwotne do ustalonego problemu teorii termosprężystości.

W celu udowodnienia powyższej zasady należy po prostu pozbyć się zależności od czasu w równaniach pola i w odpowiednich warunkach brzegowych stanu lepkosprężystego przez zastosowanie transformacji Laplace'a do (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.9), a następnie porównać otrzymany układ równań z równaniami (2.1), 2.2), (2.3), (2.16) i (2.9). W szczególności, ponieważ ze związków pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (2.6) na mocy (2.8) wynika (2.12), to z twierdzenia o splocie transformacji Laplace'a otrzymamy

$$\begin{cases} \bar{s}_{ij}(\cdot,\eta) = \eta\bar{G}_1(\eta)\bar{e}_{ij}(\cdot,\eta), \\ \bar{\sigma}_{kk}(\cdot,\eta) = \eta\bar{G}_2(\eta)[\bar{\varepsilon}_{kk}(\cdot,\eta) - 3\alpha\bar{\Theta}(\cdot,\eta)]. \end{cases} \tag{4.18}$$

Równania te na podstawie (2.16) wyjaśniają znaczenie określenia «stałe sprężyste» (4.16).

Przypuśćmy obecnie, że sformułowanie pierwotnego (termo-lepkosprężystego) zagadnienia brzegowego opiera się na różniczkowym prawie operatorowym (2.30) i warunkach brzegowych (2.32), a nie na całkowym prawie relaksacji (2.6). W takim przypadku wyniki (4.15) i (4.16) pozostają w dalszym ciągu ważne (przy założeniu regularności rozpatrywanych historii pól), o ile tylko (4.16) zostanie zastąpione przez

$$\mu(\eta) = \frac{1}{2}\frac{Q_1(\eta)}{P_1(\eta)}, \qquad K(\eta) = \frac{1}{3}\frac{Q_2(\eta)}{P_2(\eta)} \tag{4.19}$$

zgodnie z (2.33). Bezpośredni dowód zasady odpowiedniości w przypadku operatorowego prawa różniczkowego można otrzymać w zupełnie analogiczny

[17] Por. odnośnik do wzoru (2.19) i oznaczenia transformacji Laplace'a, wprowadzone we wzorze (2.26).

sposób do nakreślonego powyżej dowodu odnoszącego się do przypadku całkowego prawa relaksacji. Zauważmy jednak, że wykonując transformację Laplace'a na (2.30) otrzymamy

$$(4.20)\quad \begin{aligned} \bar{s}_{ij}(\cdot,\eta) &= \frac{Q_1(\eta)}{P_1(\eta)}\bar{e}_{ij}(\cdot,\eta),\\ \bar{\sigma}_{kk}(\cdot,\eta) &= \frac{Q_2(\eta)}{P_2(\eta)}[\bar{\varepsilon}_{kk}(\cdot,\eta)-3a\bar{\Theta}(\cdot,\eta)] \end{aligned}$$

na R dla wszystkich η o dostatecznie dużej części rzeczywistej *pod warunkiem* spełnienia warunków początkowych (2.32)[18]. W ten sposób równania (2.32), których znaczenie fizykalne omówiono w p. 2, są dokładnie warunkami koniecznymi, uzasadniającymi formalne stosowanie transformacji Laplace'a do operatorowych praw różniczkowych. W prawach takich nieciągłości skokowe σ_{ij}, ε_{ij} (oraz ich odpowiednie pochodne czasowe) w chwili $t = 0$ są albo milcząco wykluczane, albo również milcząco przyjmuje się, że równanie (2.32) jest spełnione. Kwestia ta została najpierw rozpatrzona przez CORNELIUSSENA i LEE [14], następnie wyjaśniona przez BOLEYA i WEINERA [3] w p. 15.6, a ściśle i szczegółowo rozważona w pracy [1].

Poprzednia analogia pomiędzy zagadnieniami brzegowymi liniowych teorii lepkosprężystości i sprężystości została zapoczątkowana w pracach Alfreya [15]. Zasada odpowiedniości w postaci Alfreya opiera się na różniczkowym prawie operatorowym i ogranicza się do ciał nieściśliwych i warunków izotermicznych. Pewne rozszerzenie analogii Alfreya na przypadek ciał ściśliwych pochodzi od TSIENA [16], który zarzucił założenie nieściśliwości postulując sztuczne (z punktu widzenia fizyki — nierealne) związki pomiędzy dewiatorowymi i dylatacyjnymi charakterystykami materiału.

Transformacje całkowe zastosował po raz pierwszy do problemu postawionego w pracy [15] W. T. READ [17], który za pomocą transformacji Fouriera sprowadził zagadnienie lepkosprężystości dla ciała ściśliwego do problemu teorii sprężystości. Chociaż związki pomiędzy odkształceniami i naprężeniami zastosowane w [17] zawierają tylko trzy niezależne operatory różniczkowe, to te nieistotne ograniczenia nie wpływają na ogólność rozumowania Reada. BRULL [18] doszedł do analogicznej zasady odpowiedniości dla ośrodka o ciągłym widmie czasów relaksacji za pomocą transformacji Laplace'a opierając się na całkowym prawie relaksacji. W pracy [17] prawo zmiany objętości jest (niepotrzebnie) założone jako sprężyste. LEE [19] wyprowadził odpowiednik wersji Brulla zasady odpowiedniości w przypadku ogólnego operatorowego prawa różniczkowego. HILTON, HASSAN i RUSSEL [20] uwzględnili w ramach analogii Alfreya rozszerzalność termiczną[19], natomiast LEE w podobny sposób uogólnił zagadnienie na przypadek teorii termo-lepkosprężystości.

[18] Szczegóły znajdzie Czytelnik w twierdzeniu 4.7 w [1].

[19] Ściśle mówiąc włączenie członu związanego z rozszerzalnością cieplną nie pozostaje w zgodzie z założeniem o nieściśliwości.

Dalsze wyniki omówimy później. Dodatkowo zauważymy tylko, że warunki początkowe (2.32), które muszą uzupełniać operatorowe prawo różniczkowe (2.30), nie są wspomniane w [15, 16, 17, 19] ani w [20]; szczególne warunki początkowe przyjęte w [21] są nieścisłe.

Rozszerzona zasada odpowiedniości została zastosowana w pracy [21] do rozwiązania szczególnego przestrzennego zagadnienia brzegowego i odtąd wykorzystywana w quasi-statycznej analizie naprężeń i odkształceń termicznych dla ciał o liniowej lepkosprężystości i własnościach niezależnych od temperatury. Przypadki szczególne oraz odpowiednie pozycje bibliograficzne można znaleźć w [3, 7 i 13]. Monografia W. Nowackiego [7] stanowić może przewodnik w dziedzinie ostatnich polskich prac dotyczących zagadnień typu sformułowanego w p. 2. Spośród nich zacytujemy prace W. Nowackiego [22, 23] i M. Sokołowskiego [24]. W obecnym kontekście należy również wymienić pracę B. W. Shaffera i M. Levitsky'ego [25]. Dodatkowe badania dotyczące przede wszystkim dynamicznych efektów cieplnych w liniowych ciałach lepkosprężystych z własnościami niezależnymi od temperatury wymienimy w p. 7.

5. Materiały o własnościach zależnych od temperatury. Sformułowanie zagadnień brzegowych dla ciał termo-reologicznie prostych

Z poprzedniego punktu jasno wynika, że quasi-statyczna analiza naprężeń i odkształceń w ramach liniowej teorii jednorodnych izotropowych ciał lepkosprężystych, przy braku sprzężenia termo-mechanicznego, nie przedstawia podstawowych trudności, jeśli tylko założy się, że mechaniczne własności materiału nie zależą od temperatury. Niestety, jak to już podkreśliliśmy we wstępie, tego rodzaju podejście do zagadnienia jest dalekie od fizykalnej rzeczywistości, chyba że zakres zmiany temperatury jest niezmiernie mały. Pozostała część naszej pracy dotyczy głównie modyfikacji powstających w rozpatrywanej teorii, jeżeli moduł relaksacji w (2.6), funkcja pełzania w (2.20) oraz parametry określające mechaniczne własności materiału w (2.30) i (2.31) zależą od temperatury.

Waga efektów, które wynikają z zależności własności lepkosprężystych od temperatury, została podkreślona i zilustrowana dość wcześnie przez Freudenthala [26, 27, 28, 29]. Zagadnienia szczególne dotyczące liniowych ciał lepkosprężystych o własnościach zależnych od temperatury rozpatrywali H. H. Hilton, H. A. Hassan i H. G. Russel [20], H. H. Hilton [30], L. Rongved [31], J. H. Weiner i H. Mechanic [32], H. G. Landau, J. H. Weiner i E. E. Zwicky [33] oraz B. D. Aggarwala [34].

Wszystkie zagadnienia rozpatrzone w wymienionych publikacjach dotyczą albo płyt nieskończonych, albo (pełnych lub wydrążonych) kul i walców kołowych, przy czym zagadnienia i warunki brzegowe są tego rodzaju, że nie występuje w nich więcej niż jedna współrzędna przestrzenna. Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami są zdegenerowane do operatorowego prawa różniczkowego. W istocie rozpatrywane ciała zachowują się jak modele Maxwella, Kelvina lub model standartowy, jeśli idzie o ścinanie, natomiast przyjmuje się, że zmiany objętościowe są albo sprężyste, albo ciało jest nieściśliwe.

W końcu, zależność własności materiału od temperatury we wszystkich przypadkach z wyjątkiem [34] ogranicza się do parametrów lepkości, a ich wybór jest zwykle częściowo kwestią wygody.

Szczególnie interesujące jest rozwiązanie L. Rongveda [31] (w zamkniętej, elementarnej postaci) zagadnienia nieustalonych naprężeń cieplnych w sprężyście ściśliwej kuli z materiału Maxwella. Rozwiązanie to uwzględnia dowolną osiowo-symetryczną historię pola temperatury i nie zakłada żadnych ograniczeń na zależność lepkości ścinania od temperatury.

Systematyczne badania uwzględniające wpływ temperatury na własności ciała lepkosprężystego w analizie naprężeń termicznych zostały zapoczątkowane przez L. W. MORLANDA i E. H. LEE [35], którzy za podstawę swoich rozważań wzięli temperaturowo-czasową hipotezę równoważności, zaproponowaną pierwotnie przez H. LEADERMANA [36], a następnie w nieco zmienionej postaci wprowadzoną przez T. D. FERRIEGO [37]. Zgodnie z tym postulatem równomierna zmiana temperatury posiada wpływ na mechaniczne własności materiału powodując jedynie równomierną zmianę skali czasu; następuje więc równomierne przyśpieszanie lub opóźnianie reakcji materiału w zależności od wzrostu lub obniżenia się temperatury.

Materiały spełniające postulat równoważności temperaturowo-czasowej nazywane są «termo-reologicznie prostymi» według terminologii F. Schwarzla i A. J. Stavermana [38], którzy w swoim przeglądowym artykule [39] podają doświadczenia potwierdzające ten postulat. Okazuje się, że wykazuje on godną uwagi zgodność z doświadczeniami wykonanymi na szeregu polimerów przy znacznych zakresach temperatury. Analityczne ujęcie zagadnienia rozwinięto w pracy [35], a następnie w [40].

Przystąpimy obecnie do krótkiego streszczenia teorii termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. W tym celu rozpatrzymy najpierw poszukiwane uogólnienie całkowego prawa relaksacji (2.6). Niech więc odtąd $G_\beta(t)$ ($\beta = 1, 2$) oznaczają wartości modułów relaksacji w chwili t mierzonych przy podstawowej temperaturze T_0; oznaczmy ponadto przez $\mathcal{G}_\beta(t, T)$ odpowiednie wartości mierzone przy (ustalonej) temperaturze T. Mamy zatem

$$(5.1) \qquad \mathcal{G}_\beta(t, T_0) = G_\beta(t), \quad \beta = 1, 2.$$

Hipotezę równoważności temperaturowo-czasowej można wtedy wyrazić analitycznie w sposób następujący:

$$(5.2) \qquad \mathcal{G}_\beta(t, T) = G_\beta(\xi), \quad \xi = t\varphi(T), \text{ dla } (t, T) \text{ w } [-\infty, \infty]\times[T_1, T_2],$$

gdzie $[T_1, T_2]$ jest zakresem temperatury, dla której hipoteza termo-reologicznie prostego zachowywania się będzie spełniona. Tutaj ξ jest «zredukowanym czasem», a φ przedstawia charakterystyczną «funkcję przesunięcia» materiału określającą skrócenie (lub rozciągnięcie) skali czasu, które spowodowane jest zmianą temperatury $T - T_0$. Mamy oczywiście

$$T_0 = 1, \quad \varphi(T) > 0, \quad T_1 \leqslant T \leqslant T_2, \tag{5.3}$$

przy czym φ jest funkcją stale rosnącą.

Obecnie ważność równania stanu (2.6) jest ograniczona do materiałów, które są utrzymywane w równomiernej temperaturze T_0. W tych warunkach przyjmując $\Theta = 0$ w (2.6), uwzględniając (2.7) oraz wykorzystując prawo przemienności splotów Stieltjesa otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \int\limits_{t'=-\infty}^{t} G_1(t-t')de_{ij}(\mathbf{x}, t'), \\ \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) &= \int\limits_{t'=-\infty}^{t} G_2(t-t')d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t'). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Jeżeli materiał jest utrzymywany stale w równomiernej temperaturze T, to zgodnie z (5.2) wielkości $G_\beta(t-t')$ w (5.4) należy zastąpić przez $G_\beta(\xi-\xi')$, gdzie $\xi' = t'\varphi(T)$. Jeżeli wreszcie materiał znajduje się pod wpływem *zmiennego* (zależnego od czasu i miejsca) rozkładu temperatury T o wartościach z przedziału $[T_1, T_2]$, to wtedy trzeba wprowadzić do (5.4) dwie dodatkowe poprawki: 1) należy w ten sposób uogólnić definicję czasu zredukowanego ξ, aby uwzględniała ona wpływ nakładania się kolejnych zmian temperatury; 2) należy raz jeszcze uwzględnić wpływ rozszerzalności cieplnej. Prowadzi to do *zmodyfikowanego całkowego prawa relaksacji*

$$\begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \int\limits_{t'=-\infty}^{t} G_1(\xi-\xi')de_{ij}(\mathbf{x}, t'), \\ \sigma_{kk}(\mathbf{x}, t) &= \int\limits_{t'=-\infty}^{t} G_2(\xi-\xi')d\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t') - 3a \int\limits_{t'=-\infty}^{t} G_2(\xi, -\xi')d\Theta(\mathbf{x}, t'), \end{aligned} \tag{5.5}$$

gdzie

$$\xi = \varrho(\mathbf{x}, t) = \int\limits_0^t \varphi(T(\mathbf{x}, t'))dt', \quad \xi' = \varrho(\mathbf{x}, t'). \tag{5.6}$$ [20]

Zauważmy, że temperatura występuje w równaniu (5.5) bezpośrednio i przez ξ, ξ'. W przeciwieństwie do (2.6) ze związków pomiędzy naprężeniami i odkształceniami (5.5) wynika nieliniowa zależność lokalnych chwilowych naprężeń od lokalnej historii temperatury. Ze związków (5.6) i (5.3) widać, że $\varrho(\mathbf{x}, \cdot)$ jest monotonicznie wzrastającą funkcją czasu w przedziale $(-\infty, \infty)$, której odwrotność oznaczamy prez $\omega(\mathbf{x}, \cdot)$. Mamy stąd

$$t = \omega(\mathbf{x}, \xi). \tag{5.7}$$

[20] Chociaż to uogólnienie czasu zredukowanego wprowadzone w [35] jest oparte na pewnych podstawach fizykalnych, to jednak brak ścisłego wyprowadzenia wzoru (5.5) ze związków (5.4) i postulatu równoważności temperaturowo-czasowej.

Jeżeli f jest funkcją miejsca i czasu, to konsekwentnie będziemy oznaczać przez $\hat{f}$ funkcję

$$\hat{f}(\mathbf{x}, \xi) = f(\mathbf{x}, \omega(\mathbf{x}, \xi)). \tag{5.8}$$

Poddając zmienną całkowania w (5.5) transformacji $t' = \omega(\mathbf{x}, \xi')$ można wyeliminować z (5.5) każdą bezpośrednią zależność od czasu fizykalnego, wprowadzając czas zredukowany. W ten sposób stosując oznaczenia przyjęte w (2.7) i (5.8) i korzystając raz jeszcze z prawa przemienności splotów Stieltjesa dochodzimy do następującej szczególnie dogodnej wersji zmodyfikowanego całkowego prawa relaksacji:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{ij} &= \hat{e}_{ij} * dG_1, \\ \hat{\sigma}_{kk} &= (\hat{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\hat{\Theta}) * dG_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Widać z (5.8), że sploty w (5.9) są obliczane względem czasu zredukowanego, a nie fizykalnego. Zauważmy ponadto, że wzory (5.9) mają tę samą strukturę co (2.6).

Dokładnie takie same rozważania stosuje się do uogólnienia równań (2.20), co prowadzi ostatecznie do *zmodyfikowanego całkowego prawa pełzania w postaci*

$$\begin{aligned} \hat{e}_{ij} &= \hat{s}_{ij} * dJ_1, \\ \hat{\varepsilon}_{kk} &= \sigma_{kk} * dJ_2 + 3\alpha\hat{\Theta}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Związki te można również wyprowadzić bezpośrednio z (5.9).

Wreszcie za pomocą uproszczeń tego samego typu co stosowane w powyższym rozumowaniu, które prowadziło od praw całkowych (2.6) lub (2.20) do związków (2.30), otrzymamy obecnie *zmodyfikowane operatorowe prawo różniczkowe*

$$\begin{aligned} P_1(\hat{D})\hat{s}_{ij} &= Q_1(\hat{D})\hat{e}_{ij}, \\ P_2(\hat{D})\hat{\sigma}_{kk} &= Q_2(\hat{D})[\hat{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\hat{\Theta}]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tutaj $\hat{D}$ oznacza pochodną względem czasu zredukowanego, tzn.

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \tag{5.12}$$

natomiast wielomianowe operatory P_β, $Q_\beta (\beta = 1, 2)$ zachowują swoje poprzednie znaczenie. Do (5.11) należy dołączyć warunki brzegowe (2.32), które nie ulegają zmianie.

Odnosząc (5.11) do czasu fizykalnego t za pomocą (5.6), (5.7) i (5.8) otrzymamy oczywiście dwa równania różniczkowe o tej samej strukturze co (2.30) z tą tylko różnicą, że poprzednio stałe parametry $p_{\beta;n}$, $q_{\beta;n}$ będą obecnie funkcjami temperatury. Jest również rzeczą jasną, że funkcje te nie mogą być dane w sposób dowolny dla termo-reologicznie prostego ciała lepkosprężystego, ponieważ całą zależność od temperatury takiego ciała określa jedna funkcja przesunięcia φ. Co więcej, dowolny rozkład zależnych od temperatury parametrów w (2.30) jest nie tylko niezgodny z postulatem równoważności temperaturowo-czasowej, ale, jak łatwo stwierdzić, niedopuszczalny z powodów energetycznych.

Wnioski z postulatu równoważności dla ciał sprężystych, ciał Maxwella oraz Kelvina zbadano w pracy [40]. Ze wzoru (2.15) widać od razu, że materiały sprężyste o modułach zależnych od temperatury nie należą do klasy termo–reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Z drugiej strony, prawo ścinania dla termo–reologicznie prostego ciała Maxwella przyjmuje postać

$$\dot{s}_{ij}+\frac{1}{\tau}s_{ij}=2\mu\dot{e}_{ij}, \tag{5.13}$$

gdzie μ i τ są modułem ścinania i czasem relaksacji danego ciała; μ pozostaje stałe w obecnej chwili, natomiast τ spełnia związek

$$\tau(T)=\frac{\tau_0}{\varphi(T)},\ (T_1\leqslant T\leqslant T_2),\quad \tau_0=\tau(T_0), \tag{5.14}$$

jest więc monotonicznie malejącą funkcją temperatury.

Analogiczne wnioski można zastosować do prawa dylatacji i do ciał typu Kelvina. Warto zauważyć, że założenia przyjęte dość dowolnie w pracach [26] oraz [33] i dotyczące zależności pewnych parametrów od temperatury są w rzeczywistości ścisłymi konsekwencjami hipotezy równoważności temperaturowo–czasowej.

Zanim zakończymy omawianie tego tematu, zauważmy za E. H. LEE i T. G. ROGERSEM [41], że braki operatorowego prawa różniczkowego (tzn. modeli o widmie skończonym) wyjdą jeszcze bardziej na jaw, jeśli weźmiemy pod uwagę (termo–reologicznie prostą) zależność materiału od temperatury, a to z uwagi na towarzyszące skrócenie skali czasu.

Obecnie jesteśmy w stanie rozpatrzeć mieszane zagadnienie brzegowe quasi–statycznej liniowej teorii termo–reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Sformułowanie oparte na zmodyfikowanym całkowym prawie relaksacji można wyrazić w sposób następujący: poszukujemy historii pól u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, które dla danych R, B_1, B_2, znanych G_1, G_2, a, T_0, φ i danych F_i, T, u_i^b S_i^b spełniają zależności (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (5.5), 5.6) na $\mathcal{R}\times(-\infty,\infty)$ oraz warunki początkowe (2.8) jak i warunki brzegowe (2.9). Zagadnienie to sugeruje wprowadzenie poniższego uogólnienia definicji stanu lepkosprężystego wprowadzonego w p. 2.

Termo–reologicznie prosty stan lepkosprężysty. Mówimy, że u_i, ε_{ij}, σ_{ij} *należą do klasy termo–reologicznie prostych stanów lepkosprężystych na* $R\times(-\infty,\infty)$ *odpowiadających danym* G_1, G_2, a, T_0, φ, F_0, T *dla zakresu temperatury* $[T_1, T_2]$ *i piszemy*

$$[u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}]\in\mathcal{T}[G_1,G_2,a,T_0,\varphi,F_i,T] \text{ na } R\times(-\infty,\infty) \tag{5.15}$$

jeżeli:

a) G_1, G_1, u_i, ε_{ij}, σ_{ij} *oraz* F_i *spełniają warunki* a), b) *definicji stanu lepkosprężystego*;

b) *funkcja* φ *jest ciągła na* $[T_1, T_2]$ *i spełnia* (5.3);

c) *funkcja* $T = T_0$ *na* $R\times(-\infty, 0)$ *jest ciągła na* $R\times[0, \infty)$ *oraz posiada wartości zawarte w przedziale* $[T_1, T_2]$;

d) *równania* (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (5.5), (5.6) *są spełnione na* $\mathcal{R}\times(-\infty, \infty)$.

Oczywiście warunek (5.15) w połączeniu z warunkiem $\varphi(T) = 1$ dla T z przedziału $[T_1, T_2]$ pociąga za sobą związek (2.10), skąd wynika, że tego rodzaju ograniczenie funkcji przesunięcia sprowadza obecną teorię do teorii materiałów niezależnych od temperatury, rozpatrywanych poprzednio.

6. Wnioski z termo-reologicznie prostego zachowania się ciał. Zastosowania

Zestawimy teraz kilka ogólnych wniosków odnoszących się do termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Większość twierdzeń, które tu podamy, to uogólnienia analogicznych tez p. 3; po odpowiednim przyjęciu funkcji φ sprowadzają się one do wymienionych tez.

Twierdzenie o jednoznaczności. Przypuśćmy, że

$$\left\{\begin{array}{l} [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] \in \mathcal{T}[G_1, G_2, a, T_0, \varphi, F_i, T] \text{ na } R\times(-\infty, \infty), \\ [u_i', \varepsilon_{ij}', \sigma_{ij}'] \in \mathcal{T}[G_1, G_2, a, T_0, \varphi, F_i, T] \text{ na } R\times(-\infty, \infty); \end{array}\right. \tag{6.1}$$

niech ponadto

$$u_i = u_i' \text{ na } B_1\times(-\infty, \infty), \qquad S_i = S_i' \text{ na } B_2\times(-\infty, \infty), \tag{6.2}$$

wtedy

$$[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}] = [u_i', \varepsilon_{ij}', \sigma_{ij}'] + [w_i, 0, 0] \text{ na } R\times(-\infty, \infty), \tag{6.3}$$

gdzie $w_i = 0$ na $R\times(-\infty, 0)$, *a* w_i *przedstawia* (*infinitezymalny*) *ruch sztywny całego ciała na* $R\times[0, \infty)$.

Wynik ten jest przypadkiem szczególnym twierdzenia o jednoznaczności udowodnionego w [42], które można również stosować do *topniejących* ciał lepkosprężystych. Warto zauważyć, że oprócz warunku ciągłości i warunku (5.3) nie nakłada się w obecnych warunkach na funkcję przesunięcia żadnych ograniczeń w celu zagwarantowania jednoznaczności.

Następne twierdzenie można wyprowadzić z definicji stacjonarnego, sprężystego oraz termo-reologicznie prostego stanu lepkosprężystego za pomocą (5.8), (5.9) i twierdzenia 1.2 w [1].

Warunki początkowe. Niech układ $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *spełnia warunek* (5.15), *wtedy*

$$[\mathring{u}_i, \mathring{\varepsilon}_{ij}, \mathring{\sigma}_{ij}] \in \mathcal{E}[\mu, K, a, \mathring{F}_i, \mathring{\Theta}] \text{ na } R, \tag{6.4}$$

gdzie

$$\mu = \frac{1}{2}\mathring{G}_1, \qquad K = \frac{1}{3}\mathring{G}_2. \tag{6.5}$$

A zatem stan początkowy jest znowu stacjonarnym stanem sprężystym, który można wyznaczyć bezpośrednio z warunków początkowych i danych powierzchniowych.

Rozpatrzymy obecnie tezę wynikającą z rezultatów podanych[21] w p. 3.

Zmiana objętości. Niech układ $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ *spełnia warunek* (5.15) *i przypuśćmy, że*

$$G_2 = 3Kh \text{ na } (-\infty, \infty), \tag{6.6}$$

gdzie K jest stałą (modułem sprężystości objętościowej). Wtedy zmiana objętości dana jest wzorami (3.17) i (3.19).

Niżej podany wynik został wyprowadzony w [6] i stanowi uogólnienie wcześniejszego spostrzeżenia H. H. HILTONA [9].

Pola historii temperatury wolne od naprężeń. Przyjmijmy, że (5.15) *jest spełnione i przypuśćmy, że* $S_i = 0$ *na* $B\times[0, \infty)$ *oraz* $F_i = 0$ *na* $R\times[0, \infty)$. *Równość* $\sigma_{ij} = 0$ *zachodzi na* $R\times(-\infty, \infty)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = a_0(t)+a_i(t)x_i \quad dla \quad (\mathbf{x}, t) \text{ w } R\times(0, \infty), \tag{6.7}$$

gdzie a_0, a_i *są funkcjami ciągłymi na* $[0, \infty)$.

Pokrewne twierdzenia dotyczące pól temperaturowych wolnych od naprężeń i zastosowane do płaskiego stanu odkształcenia oraz uogólnionego płaskiego stanu naprężenia znaleźć można w [6], gdzie zbadano szczegółowo dwuwymiarową teorię termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Rozważania dotyczące przypadków dwuwymiarowych w [6] prowadzą również do związków pomiędzy rozwiązaniami dla płaskiego stanu odkształcenia i uogólnionego płaskiego stanu naprężenia związanymi z tym samym zagadnieniem[22] płaskim.

Poważne trudności analityczne wynikające wskutek wprowadzenia zależności zachowania się materiału lepkosprężystego od temperatury powstają przy rozwiązywaniu rzeczywistych zagadnień brzegowych. Niestety, teorii całkowania przedstawionej w p. 4 nie można przenieść na przypadek termo-reologicznie prostych ośrodków lepkosprężystych. W szczególności dotyczy to ważnej zasady odpowiedniości rozpatrzonej w końcu p. 4, zasady, za pomocą której zagadnienie lepkosprężystości (dla ciał z własnościami zależnymi od temperatury) sprowadzić można do ustalonego zagadnienia termosprężystości.

W celu wykazania trudności, z jakimi mamy tu do czynienia, zauważmy najpierw, że całki występujące w zmodyfikowanym prawie relaksacji (5.5) nie są już całkami typu splotu. Tym samym zastosowanie transformacji Laplace'a (względem czasu fizykalnego) do równań (5.5) nie doprowadzi już do związków algebraicznych pomiędzy transformatami naprężeń i odkształceń.

Druga wersja zmodyfikowanego prawa relaksacji (5.9) o wymaganej budowie w postaci splotów sugeruje możliwość sprowadzenia za pomocą nowych zmiennych niezależnych $(\mathbf{x}, \xi)$ również i pozostałych równań pól oraz warunków brzegowych do takiej postaci, z której — dzięki transformacji Laplace'a — można będzie wyeliminować czas zredukowany. W ogólności tego rodzaju tok postępowania nie powoduje godnego uwagi uproszczenia zagadnienia. Istotnie,

[21] Por. odnośnik za wzorem (3.19).

[22] Analogiczne związki w przypadku dwuwymiarowej teorii termosprężystości znaleźć można w książce Mindlina i Salvadori [43], s. 762.

zastosujmy do (5.6) i (5.8) proponowaną zmianę zmiennych i oznaczmy przez $\hat{f}_{,i}$ i $\hat{f}^{\cdot}$ odpowiednio pochodną przestrzenną i pochodną względem czasu zredukowanego funkcji $\hat{f}$. Wtedy związki pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami (2.1) przyjmą postać

$$\hat{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j}+\hat{u}_{j,i})+\frac{1}{2}(\hat{u}_i^{\cdot}\varrho_{,j}+\hat{u}_j^{\cdot}\varrho_{,i}), \tag{6.8}$$

a równania równowagi (2.2) postać

$$\hat{\sigma}_{ij,j}+\hat{\sigma}_{ij}^{\cdot}\varrho_{,j}+\hat{F}_i=0\,, \qquad \hat{\sigma}_{ji}=\hat{\sigma}_{ij}\,. \tag{6.9}$$

Z powodu występowania członów zawierających $\varrho_{,i}$, transformacje (6.8) i (6.9) (wzięte względem czasu zredukowanego) nie zachowują pożądanej budowy (2.1) i (2.2), chyba że $\varrho_{,i}$ znika. Ze wzoru (5.6) wynika, że będzie to miało miejsce wtedy, gdy *T jest wyłącznie funkcją czasu.* Wobec tego w tym szczególnym przypadku otrzymujemy ważne uogólnienie zasady odpowiedniości. W celu uniknięcia zbytecznie zawiłej notacji wprowadzimy następujące oznaczenie

$$\tilde{f}(\mathbf{x},\eta)=\int_0^\infty \hat{f}(\mathbf{x},\xi)\exp(-\eta\xi)\,d\xi \tag{6.10}$$

na transformację Laplace'a funkcji $\hat{f}(\mathbf{x},\xi)$ względem czasu zredukowanego.

Zasada odpowiedniości dla historii temperatury zależnych wyłącznie od czasu. Przypuśćmy, że

$$[u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}]\in\pi[G_1,G_2,\alpha,T_0,\varphi,F_i,T] \text{ na } R\times(-\infty,\infty), \tag{6.11}$$

gdzie T jest funkcją tylko czasu; następnie niech

$$u_i=u_i^b \text{ na } B_1\times(-\infty,\infty), \qquad S_i=S_i^b \text{ na } B_2\times(-\infty,\infty). \tag{6.12}$$

Przyjmijmy, że $G_\beta(\xi)$ $(\beta=1,2)$, $\hat{u}_i(\mathbf{x},\xi)$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},\xi)$, $\hat{F}_i(\mathbf{x},\xi)$ *oraz* $\hat{T}(\xi)$ *są rzędu wykładniczego* $0(\exp(s_0\xi))$ *dla każdego* $\mathbf{x}$ w R *gdy* $\xi\to\infty$, *przy czym* s_0 *jest stałą (rzeczywistą). Wtedy dla każdego* η, *spełniającego warunek* $\mathrm{Re}(\eta)>s_0$, *mamy*

$$[\tilde{u}_i(\cdot,\eta),\ \tilde{\varepsilon}_{ij}(\cdot,\eta),\ \tilde{\sigma}_{ij}(\cdot,\eta)]\in\mathcal{E}[\mu(\eta),K(\eta),\alpha,\tilde{F}_i(\cdot,\eta)],\ \tilde{\Theta}(\eta) \text{ na } R, \tag{6.13}$$

gdzie

$$\mu(\eta)=\frac{1}{2}\eta\tilde{G}_1(\eta), \qquad K(\eta)=\frac{1}{3}\eta\tilde{G}_2(\eta) \tag{6.14}$$

oraz

$$\tilde{u}_i(\cdot,\eta)=\tilde{u}_i^b(\cdot,\eta) \text{ na } B_1. \qquad \tilde{S}_i(\cdot,\eta)=\tilde{S}_i^b(\cdot,\eta) \text{ na } B_2. \tag{6.15}$$

Analogia ta staje się trywialna, gdy $B=B_2$, $F_i=0$ na $R\times(-\infty,\infty)$ oraz $S_i=0$ na $B\times(-\infty,\infty)$. W tym przypadku analogia po prostu potwierdza nasz poprzedni wniosek[23], że $\sigma_{ij} = 0$ na $R\times(-\infty, \infty)$ zgodnie z dobrze znanym twierdzeniem o polach temperatury wolnych od naprężeń w teorii termosprężystości ([3], p. 3.9).

Przypuśćmy następnie, że dla czasów nieujemnych temperatura *T jest funkcją tylko miejsca*. W tym drugim zdegenerowanym przypadku zmodyfikowane całkowe prawo relaksacji (5.5) można znowu zapisać w postaci splotów względem czasu fizykalnego, jak to widać z (5.6). Mamy obecnie

$$s_{ij} = H_1 * de_{ij}, \quad \sigma_{kk} = H_2 * d(\varepsilon_{kk} - 3a\Theta), \tag{6.16}$$

pod warunkiem, że

$$H_\beta(\mathbf{x}, t) = G_\beta(t\varphi(T(\mathbf{x}))) \quad \text{dla} \quad (\mathbf{x}, t) \text{ w } R\times[0, \infty). \tag{6.17}$$

Po wykonaniu transformacji Laplace'a na (6.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{s}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) &= 2\mu(\mathbf{x}, \eta)\bar{e}_{ij}(\mathbf{x}, \eta), \\ \bar{\sigma}_{kk}(\mathbf{x}, \eta) &= 3K(\mathbf{x}, \eta)[\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, \eta) - 3a\bar{\Theta}(\mathbf{x}, \eta)]. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Wzory te są ważne dla każdego ustalonego η o dostatecznie dużej części rzeczywistej i dla wszystkich $\mathbf{x}$ w R, jeżeli

$$\mu(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{2}\eta\overline{H}_1(\mathbf{x}, \eta), \quad K(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{3}\eta\overline{H}_2(\mathbf{x}, \eta). \tag{6.19}$$

Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w postaci (6.18) odpowiadają *niejednorodnemu* liniowemu ciału sprężystemu. W takim razie *jeżeli temperatura zależy tylko od miejsca, to pierwotne zagadnienie brzegowe w teorii termo-lepkosprężystości można sprowadzić do ustalonego zagadnienia termosprężystego dla ośrodka niejednorodnego.* To uogólnienie zasady odpowiedniości posiada niestety bardzo ograniczone znaczenie praktyczne z powodu złożoności zagadnienia sprowadzonego, którego trudność jest porównywalna z trudnością problemu pierwotnego.

Analogiczne rozszerzenie zasady odpowiedniości na przypadek materiałów zależnych od temperatury dla operatorowych praw różniczkowych zostało rozpatrzone wcześniej przez H. H. HILTONA i H. G. RUSSELA w pracy [44] opartej na poprzednim komunikacie z H. A. HASSANEM [20]. Analiza przeprowadzona w pracy [44] ogranicza się do operatorowych praw różniczkowych dla materiałów o parametrach zależnych od temperatry i zakłada ośrodek o skończonym widmie czasów relaksacji i opóźnienia.

Analogia wyprowadzona w [44] dla rozkładów temperatury zależnych tylko od czasu jest ograniczona do ciał mechanicznie nieściśliwych (aczkolwiek uwzględnia rozszerzalność cieplną) i jest uogólnieniem[24] zasady T. Alfreya [15].

[23] Zauważmy, że Θ spełnia (6.7), ponieważ T nie zależy obecnie od miejsca.

[24] W związku z tym rozszerzeniem analogii Alfreya autorzy uważają, że można wyznaczyć oddzielnie wpływ sił masowych i sił powierzchniowych, a następnie nałożyć je na otrzymane naprężenia i odkształcenia termiczne. Tego rodzaju superpozycja dla materiałów zależnych od temperatury nie jest w rzeczywistości dopuszczalna. Jak już wykazano, pole temperatuty zależne tylko od czasu przy braku obciążeń zawsze wywołuje zanikające naprężenia cieplne.

Z drugiej strony, w pracy [44] nie nakłada się żadnych ograniczeń na liniowo lepkosprężyste prawo zmiany objętości w przypadku, gdy pole temperatury zależy wyłącznie od miejsca; zasada odpowiedniości otrzymana dla tego przypadku jest elementarnym uogólnieniem pracy W. T. READA [17] dla teorii izotermicznej. Wreszcie w pracy [44] podano szkic przybliżonego podejścia do przypadku ogólnego, gdy historia pola temperatury zależy od czasu i miejsca, oparty na założeniu, że materiał jest odcinkami niezależny od temperatury (w czasie). Zakres, w którym taki przybliżony schemat jest rachunkowo wykonalny, pozostaje do oszacowania.

Obecnie rozpatrzymy dostępne zastosowania quasi-statycznej liniowej teorii termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Jak wspomnieliśmy poprzednio, wszystkie (z wyjątkiem jednego) przykłady wymienione na początku p. 5 dotyczą modeli lepkosprężystych zależnych od temperatury i należą do omawianej tu kategorii, mimo że nie zostały one specjalnie dobrane dla ilustracji rozpatrywanej teorii ogólnej.

Postulat równoważności temperaturowo-czasowej został zastosowany przez L. W. MORLANDA i E. H. LEE [35] do analizy płaskiego stanu odkształcenia w nieściśliwym, wydrążonym walcu kołowym, poddanym działaniu promieniowego rozkładu temperatury oraz nagle przyłożonego, równomiernego ciśnienia wewnętrznego.

W pracy [40] rozpatrzono rozkład temperatury zależny zarówno od miejsca jak i czasu; podano tam ścisłe rozwiązania dwóch zagadnień przestrzennych tego rodzaju. Pierwsze z nich dotyczy swobodnych drgań poprzecznych nieskończonej płyty przy założeniu, że historia pola temperatury wywołującego naprężenia w płycie zmienia się dowolnie ze współrzędną grubości i z czasem. Drugie zagadnienie dotyczy naprężeń i odkształceń termicznych wywołanych w kuli dowolnym, chwilowym, promieniowym rozkładem temperatury. Oba rozwiązania zakładają dowolną (termo-reologicznie prostą) zależność materiału od temperatury i stosują się do ciał o ciągłych widmach relaksacji z tym wyjątkiem, że w przypadku drugiego zagadnienia przyjęto sprężyste prawo zmiany objętości [25].

Powrócimy tu krótko do przykładu płyty rozpatrzonej w [40], ponieważ pewne aspekty tego zagadnienia posiadają szersze znaczenie. Rozpatrzmy więc nieskończoną płytę o stałej grubości $2a$ i dobierzmy w ten sposób układ współrzędnych, aby płaszczyzna $x_3 = 0$ pokrywała się z płaszczyzną środkową płyty. Wtedy R będzie obszarem określonym nierównością $-a \leqslant x_3 \leqslant a$, a B stanowić będą dwie ograniczające płaszczyzny $x_3 = \pm a$.

Poszukujemy obecnie termo-reologicznie prostego stanu lepkosprężystego [26] $[u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}]$ na $R \times (-\infty, \infty)$ odpowiadającego danym G_1, G_2, α, T_0, φ, F_i, T

[25] Chociaż założenie to bardzo rozpowszechnione w analizie naprężeń ciał lepkosprężystych w ogólności zgadza się z doświadczeniami, to jednak wstępne jakościowe dane dotyczące efektów lepkości objętościowej wydają się niewystarczające.

[26] Zauważmy, że w przeciwieństwie do poprzedniego założenia R w tym przykładzie nie jest ograniczone.

i spełniającego warunki brzegowe

(6.20) $$\sigma_{3i} = 0 \quad \text{na} \quad B\times(-\infty, \infty).$$

Przyjmiemy dalej, że T i u_3 są funkcjami tylko (x_3, t) oraz że

(6.21) $$F_i = u_1 = u_2 = 0 \quad \text{na} \quad R\times(-\infty, \infty).$$

Wprowadzone wyżej założenia ograniczające są zgodne z równaniami pola i warunkami brzegowymi, co — jak można obecnie łatwo stwierdzić [27] — powoduje zależność historii pola tylko od (x_3, t), natomiast

(6.22) $$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad \text{na} \quad R\times(-\infty, \infty)$$

(6.23) $$\sigma_{11} = \sigma_{22}, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j \quad \text{na} \quad R\times(-\infty, \infty).$$

oraz

(6.24) $$\hat{\sigma} = -\hat{\varepsilon} * dG_1, \quad 2\hat{\sigma} = (\hat{\varepsilon} - 3a\hat{\Theta}) * dG_2 \quad \text{na} \quad R\times(-\infty, \infty),$$

gdzie dla ułatwienia napisaliśmy odpowiednio σ i ε zamiast σ_{11} i ε_{33}.

Po eliminacji $\hat{\varepsilon}$ z pary równań całkowych (6.24) i wykorzystaniu własności splotów Stieltjesa (p. 1 w [1]) otrzymamy

(6.25) $$\bar{\sigma} = -3aA * d\hat{\Theta} \quad \text{na} \quad \mathcal{R}\times(-\infty, \infty),$$

gdzie A jest funkcją pomocniczą zdefiniowaną następująco:

(6.26) [28] $$A = G_1 * dG_2 * d(2G_1 + G_2)^{-1} \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty).$$

Biorąc pod uwagę (2.7), (5.6), (5.7), (5.8) i podstawiając $x_3 = x$ dochodzimy na podstawie (6.25) do wniosku, że poszukiwane naprężenia $\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{22}$ przedstawić można za pomocą całki

(6.27) $$\sigma(x, t) = -3a \int\limits_{t'=-\infty}^{t} A(\xi - \xi')d\Theta(x, t') \quad \text{dla} \quad (x, t) \quad \text{w} \quad R\times(-\infty, \infty),$$

gdzie

(6.28) $$\xi = \varrho(x, t) = \int\limits_0^t \varphi(T(x, t'))dt', \qquad \xi' = \varrho(x, t').$$

Oprócz tego stosując twierdzenia 1.2, 1.3 [1] dla t z przedziału $[0, \infty)$ stwierdzamy, że wzór (6.26) jest równoważny następującemu wzorowi:

(6.29) [29] $$\mathring{G}A(t) + \int\limits_0^t \dot{G}(t - t')A(t')dt' = L(t),$$

gdzie

(6.30) $$G(t) = 2G_1(t) + G_2(t),$$
$$L(t) = \mathring{G}_2 G_1(t) + \int\limits_0^t G_1(t - t')\dot{G}_2(t')dt'.$$

[27] Szczegóły można znaleźć w pracy [40].

[28] Ta sama funkcja gra decydującą rolę w zagadnieniu kuli [40].

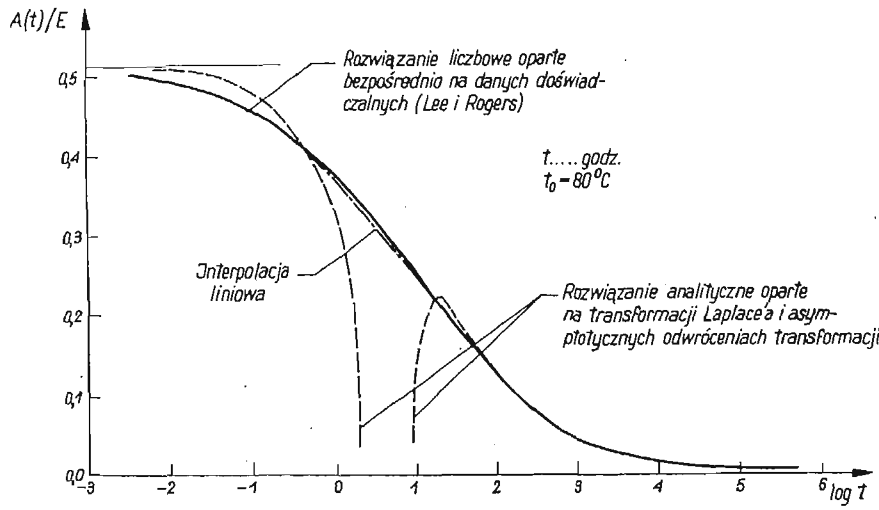
[29] Przypominamy wzór (2.13).

Widać stąd, że A spełnia liniowe równanie całkowe typu Volterry. Wreszcie, jeżeli odpowiednia transformacja Laplace'a istnieje, to otrzymujemy z (6.29) i (6.30) zależność

$$\overline{A}(\eta) = \frac{\overline{G}_1(\eta)\overline{G}_2(\eta)}{2\overline{G}_1(\eta)+\overline{G}_2(\eta)}. \tag{6.31}$$

Wzór (6.27) otrzymano w pracy [40] przez zastosowanie transformacji Laplace'a do pary równań całkowych (6.24), a następnie odwrócenie otrzymanej w wyniku pary równań algebraicznych. Jak później zauważyli LEE i ROGERS [41] i co jest jasne z poprzednich rozważań, nie ma tu potrzeby wprowadzania transformacji całkowych.

Podobna uwaga odnosi się do obliczeń numerycznych w rozpatrywanym rozwiązaniu, które wykonano w pracy [40] dla handlowego polimetakrylanu metylowego opierając się na dostępnych danych dotyczących relaksacji i na pomiarach funkcji przesunięcia φ. W związku z tym funkcja pomocnicza A została wyznaczona z (6.31).



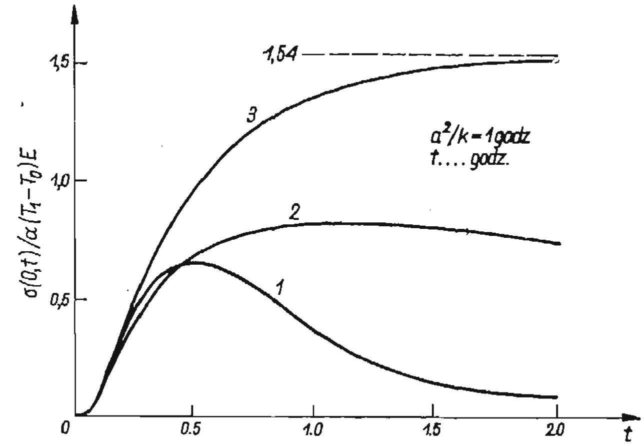
Rys. 1 $A(t)$ dla polimetakrylanu

Wymagający dużej pracy tok postępowania zastosowany w pracy [40] polega, po pierwsze, na dobraniu odpowiedniego przybliżenia analitycznego dla funkcji relaksacji umożliwiających analityczne obliczenie $\overline{A}$, a następnie na znalezieniu poszukiwanych wartości A za pomocą dwóch wzorów asymptotycznych na transformacje odwrotne: jednego dla dużych, drugiego dla małych wartości czasu.

Inaczej postąpili E. H. LEE i T. G. ROGERS [41] obliczając A przez rozwiązanie równania całkowego (6.29) wprost na matematycznej maszynie elektronowej. Ich sposób postępowania jest bardziej bezpośredni i okazał się dokładniejszy.

Wartości A otrzymane za pomocą przedstawionych wyżej dwóch sposobów porównano na rys. 1, na którym przez E oznaczono moduł Younga odpowiadający sprężystej reakcji ciała w chwili początkowej. Rysunek 2 zaczerpnięto z pracy [40] i przedstawiono na nim zależność naprężenia normalnego σ w płaszczyźnie środkowej od czasu dla płyty wykonanej z polimetakrylanu metylowego. W obliczeniach przyjęto, że $a^2/k = 1$ godz., k jest termiczną dyfuzyjnością materiału; takie założenie odpowiada płycie o grubości $2a$ równej w przybliżeniu 5,7 cm. W zadaniu tym historia pola temperatury jest rozwiązaniem elementarnego zagadnienia przewodnictwa cieplnego: cała płyta znajdowała się w stanie początkowym w równomiernej temperaturze $T_0 = 80\ ^\circ$C; w chwili $t = 0$ powierzchnie płyty zostały nagle poddane działaniu temperatury, $T_1 = 110\ ^\circ$C, i następnie utrzymane w tej temperaturze.

Krzywa 1 na rys. 2 podaje wartości naprężeń otrzymane ze wzoru (6.27). Krzywa 2 przedstawia zachowanie się materiału w przypadku pominięcia za-



Rys. 2. Zagadnienie płyty. Zależność σ od czasu w płaszczyźnie środkowej dla polimetakrynu.
1. Własności materiałowe zależne od temperatury $T_0 = 80$°C, $T_1 = 110$°C. 2. Własności materiałowe niezależne od temperatury oparte na zachowaniu się w temperaturze 95°C. 3. Własności sprężyste oparte na zachowaniu się początkowym.

leżności parametrów fizycznych ciała od temperatury, a cała analiza oparta jest na danych dotyczących relaksacji dla średniej temperatury powierzchni wynoszącej 95 °C. Wreszcie krzywa 3 podaje wyniki w przypadku, gdy pominie się wpływ lepkości i wyznaczy naprężenia σ zakładając czysto sprężyste zachowanie się materiału i przyjmując stałe sprężystości odpowiadające stanowi początkowemu ciała lepkosprężystego. Widać z rysunków, że te trzy krzywe prawie pokrywają się w okresie początkowym wynoszącym około 10 minut, to znaczy wtedy, gdy «rzeczywiste» własności materiału są bliskie sprężystym i dzięki temu są niezależne od temperatury. W przybliżeniu przez pierwszych 20 minut krzywa 2 daje wartości naprężeń nieco niższe od przewidzianych krzywą 1, ponieważ w tym okresie temperatura płaszczyzny środkowej jest niższa od średniej temperatury 95°, a co za tym idzie — rzeczywisty proces relaksacji jest wolniejszy od nakreślonego krzywą 2. Natomiast później krzywa 2 daje wartości naprężeń stopniowo większe od podanych krzywą 1, aż po upływie 2 godzin naprężenia rzeczywiste stają się o 15 procent mniejsze od odpowiednich wartości danych krzywą 2. Wyniki te wykazują raz jeszcze nierealny charakter takich teorii naprężeń cieplnych ciała lepkosprężystego, które nie uwzględniają zależności własności materiału od temperatury.

Względne zalety bezpośredniego numerycznego całkowania równań całkowych w stosunku do techniki transformacji całkowych w analizie naprężeń lepkosprężystych zostały dalej przedyskutowane i zilustrowane w pracy E. H. LEE i T. G. ROGERSA [45]. Poza tym, że podejście takie lepiej wykorzystuje dane doświadczalne, nie wymaga ono dużych ekstrapolacji czasowych poza przedziałem czasu, obejmującym poszukiwane rozwiązanie zagadnienia. Tego rodzaju podejście rozszerza ponadto zakres analizy na zagadnienia, do których transformacja Laplace'a nie daje się zastosować. Do takich problemów należą zagadnienia mieszane, w których siły powierzchniowe i przemieszczenia są dane na podzbiorach brzegu zależnych od czasu, oraz zagadnienia, w których sam brzeg jest funkcją czasu (powierzchniowe topnienie).

Przykład liczbowy zagadnienia tego ostatniego rodzaju podaje praca [45], gdzie rozwiązanie zagadnienia kuli otrzymane w [40] uogólniono na przypadek topniejącego ciała kulistego. Oprócz tego w [45] podano formalne rozwiązanie zagadnienia topniejącej powłoki kulistej; dla brzegów utwierdzonych zagadnienie to rozpatrzono uprzednio [6].

Chociaż dopiero co opisane rozważania są obiecujące, to warto zauważyć, że zagadnienia brzegowe rozpatrywanej teorii sprowadzają się do rozwiązywania niezależnych równań całkowych tylko w wyjątkowych okolicznościach. Co więcej, wszystkie dostępne dzisiaj zastosowania zależą od możliwości rozdzielenia całkowania względem czasu i przestrzeni. Mimo faktu, że pewne bardziej ogólne zagadnienia rozwiązać można obecnie tylko na drodze czysto liczbowej, nie powinno to pomniejszać potrzeby systematycznego rozwijania teorii całkowania.

7. Uwagi końcowe

W naszych poprzednich rozważaniach przyjmowaliśmy, że materiał jest izotropowy, zarówno jeśli chodzi o własności mechaniczne, jak i termiczne. W przypadku anizotropowego liniowego materiału lepkosprężystego równania stanu (2.6) przyjmują postać:

$$\sigma_{ij} = (\varepsilon_{ij} - a_{ij}) * dG_{ijkl}, \tag{7.1}$$

gdzie G_{ijkl} i a_{ij} są odpowiednio składowymi tensora funkcji relaksacji i tensora rozszerzenia termicznego. Poza tym zachodzą związki $a_{ij} = a_{ji}$ oraz

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}. \tag{7.2}$$

Pierwsze równanie (7.2) wynika z symetrii tensora naprężenia, a drugie nie pociąga za sobą zmniejszenia ogólności, gdyż również tensor odkształceń jest symetryczny. Poza tym zwykle przyjmuje się, że

$$G_{ijkl} = G_{klij}. \tag{7.3}$$

Te ostatnie związki symetrii wynikają z (7.2) w przypadku szczególnym izotropii i wyrażają warunek niezależny. Dostępny teoretyczny dowód równości (7.3) opiera się na rozważaniach termodynamicznych i na zastosowaniu zasady wzajemności Onsagera [30].

Jeżeli przyjmiemy, że warunki (7.3) są spełnione, to uogólnienie większości wyników teoretycznych rozpatrywanych w naszej pracy na przypadek jednorodnych ciał anizotropowych nie przedstawia trudności. Odnosi się to w szczególności do zasady odpowiedniości rozpatrzonej w pp. 4 i 6, która w takim przypadku prowadzi zgodnie z rozważaniami M. A. Biota [49] do związków pomiędzy liniowymi teoriami ciał lepkosprężystych i sprężystych. Rozszerzenie tej zasady na przypadek niejednorodnych (izotropowych lub anizotropowych) ciał lepkosprężystych jest zupełnie elementarne [31], choć ma niewielkie znaczenie praktyczne.

Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko quasi-statyczne naprężenia termiczne w ciałach lepkosprężystych. Wpływ bezwładności w termo-lepkosprężystości był w ostatnich czasach przedmiotem wielu badań specjalnych. Spośród nich zacytujemy publikacje A. M. Katasonowa [51], W. Nowackiego [23, 52, 53, 54] i M. Żórawskiego [55, 56, 57, 58]. Trudno tu ocenić fizykalne znaczenie tych prac, gdyż niezmiennie zakłada się w nich, że własności materiału są niezależne od temperatury, nie podaje się ilościowej analizy wyników oraz zwykle dotyczą one tylko nagłych zmian temperatury [32].

Dotychczas nie rozpatrywano jeszcze efektów sprzężenia termo-mechanicznego, które jak dotąd są konsekwentnie pomijane. Interesujące studium tych efektów podał S. C. HUNTER [60], którego analiza dotyczy termo-reologicznie prostych ciał lepkosprężystych. Jak sugeruje bezpretensjonalny tytuł pracy [60], temat ten wymaga dalszych badań.

Należy wreszcie jeszcze raz podkreślić, że praca nasza ogranicza się w zasadzie do analizy liniowych naprężeń termicznych w ciałach lepkosprężystych. Nie poświęciliśmy więc w niej uwagi wpływowi nieliniowych efektów lepkości ani odkształceniom skończonym, które należy brać pod uwagę przy realnym podejściu do naprężeń termicznych w metalach w podwyższonej temperaturze.

Podziękowanie. Autor jest zobowiązany Panu M. E. GURTINOWI, który przeczytał rękopis pracy i zgłosił szereg uwag krytycznych oraz pomocnych wskazówek.

[30] Por. np. M. A. BIOT [46 i 47]. Rozważania tego rodzaju można znaleźć w komunikacie T. G. Rogersa i A. C. Pipkina [48] oraz pracy [5]. Zauważymy, że odpowiednik warunku (7.3) w teorii sprężystości wynika z istnienia potencjału sprężystego.

[31] W związku z tym wymienimy [20 i 44] oraz pracę H. W. Hiltona i S. B. Donga [50].

[32] Pokrewne badania w teorii termosprężystości (por. np. [59]) wykazują, że rozmiar takich wpływów inercyjnych niepomiernie maleje, gdy zarzuci się fikcję nagłego przyłożenia temperatury.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. E. GURTIN and ELI STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 11 (1962), 4, 20.

[2] O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, Springer, Berlin 1929.

[3] B. A. BOLEY and J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, Wiley, New York 1960.

[4] V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell' elasticita*, Atti R. Accad. Linc., 2, **18** (1909), 295.

[5] M. E. GURTIN and ELI STERNBERG, *A reciprocal theorem in the linear theory of anisotropic viscoelastic solids*, Report No 17, Contract No.-562(25), Brown University, wrzesień, 1962.

[6] ELI STERNBERG and M. E. GURTIN, *Further study of thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties*, Report No. 2, Contract Nonr-562(30), Brown University, październik 1961; Sympozjum I.U.T.A.M. w Haifie 1962 (Efekty drugiego rzędu w sprężystości, plastyczności i dynamice cieczy).

[7] W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, London 1963.

[8] M. Hieke, Eine indirekte Bestimmung der Airyschen Fläche bei unstetigen Wärmespannungen, Z. angew. Math. Mech., 35 (1955), 285.

[9] H. H. HILTON, *Thermal distributions without thermal stresses in nonhomogeneous media*, J. Appl. Mech., 1, **26** (1959), 137,

[10] M.E. GURTIN, *Variational principles in the linear theory of viscoelasticity*, Report No 18, Contract Nonr-562(25), Brown University, Styczeń 1963.

[11] S. AL KHOZAIE and ELI STERNBERG, *On Green's functions and Saint Venant's principle in linear viscoelasticity theory*, w przygotowaniu.

[12] C. W. BORCHARDT, *Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 9 (1873).

[13] HEINZ PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer, Wien 1959.

[14] A. H. CORNELIUSSEN and E. H. LEE, *Stress distribution analysis for linear viscoelastic materials*, Proc., I.U.T.A.M., Colloquium on creep in structures, Palo Alto 1960; Springer, Berlin 1962.

[15] T. ALFREY, *Non-homogeneous stresses in visco-elastic media*, Quart. Appl. Math., 2, **2** (1944), 113.

[16] H. S. TSIEN, *A generalization of Alfrey's theorem for viscoelastic media*, Quart. Appl. Math., 1, **8** (1950), 104.

[17] W. T. READ, *Stress analysis for compressible viscoelastic materials*, J. Appl. Phys., 7, **21** (1950) 671.

[18] M. A. BRULL, *A structural theory incorporating the effect of time-dependent elasticity*. Proc., First Midwestern Conf. Solid Mech., Urbana 1953.

[19] E. H. LEE, *Stress analysis in visco-elastic bodies*, Quart. Appl. Math., 2, **13** (1955), 183.

[20] H. H. HILTON, H. A. HASSAN, H. G. RUSSELL, — *Analytical studies of thermal stresses in media possessing temperature-dependent viscoelastic properties*, Technical Report 53-322, Wright Air Development Center, wrzesień 1953.

[21] ELI STERNBERG, *On transient thermal stresses in linear viscoelasticity*, Proc., Third, U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1958.

[22] W. NOWACKI, *Thermal stresses due to the action of heat sources in a viscoelastic space*, Arch. Mech. Stos., 1, **11** (1959), 111.

[23] W. NOWACKI, *Transient thermal stresses in viscoelastic bodies (I)*, Arch. Mech. Stos., 5, **11** (1959), 649.

[24] M. SOKOŁOWSKI, *Naprężenia cieplne w kuli wykonanej z materiału o własnościach lepkosprężystych*, *Księga Jubileuszowa Prof. W. Wierzbickiego*, Warszawa 1959.

[25] B. W. SHAFFER and M. LEVITSKY, *Thermal bond stresses in casebonded viscoelastic propellant discs*, J. Aerospace Sci., 7, 29 (1962), 827.

[26] A. M. FREUDENTHAL, *Effect of rheological behavior on thermal stresses*, J. Appl. Phys., 9, **25** (1954), 1110.

[27] A. M. FREUDENTHAL, *On inelastic thermal stresses*, Von Mises Anniversary Volume, Academic Press, New York 1954.

[28] A. M. FREUDENTHAL, *On inelastic thermal stresses in flight structures*, J. Aero. Sci., 11, **21** (1954), 772.

[29] A. M. FREUDENTHAL, *Problems of structural design for elevated temperatures*, Trans. New York Acad. Sci., Ser. II, **4**, **19** (1957), 328.

[30] H. H. HILTON, *Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin type*, Proc. Second U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1954.

[31] L. RONGVED, *Residual stress in glass spheres*, Report No 16, Contract Nonr-266(09), Columbia University, lipiec 1954.

[32] J. H. WEINER and H. MECHANIC, *Thermal stresses in free plates under heat pulse inputs*, Technical Report 54-428, Wright Air Development Center, Marzec 1957.

[33] H. G. LANDAU, J. H. WEINER, and E. E. ZWICKY Jr., *Thermal stress in a viscoelastic-plastic plate with temperature-dependent yield stress*, J. Appl. Mech., 2, **27** (1960), 297.

[34] B.D. AGGARWALA, *Thermal stresses in spherical shells of viscoelastic materials*, Z. angew. Math. Mech., **40** (1960), 482.

[35] L. W. MORLAND and E. H. LEE, *Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation*, Trans. Soc. Rheology, **4** (1960), 233.

[36] H. LEADERMAN, *Elastic and creep properties of filamentous materials*, Textile Foundation, Washington, D. C., 1943.

[37] J. D. FERRY, *Mechanical properties of high molecular weight*, J. Amer. Chem. Soc., **72** (1950), 3746.

[38] F. SCHWARZL and A. J. STAVERMAN, *Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior*, J. Appl. Phys., **23** (1952), 838.

[39] A. J. STAVERMAN and F. SCHWARZL, *Linear deformation behavior of highpolymers*, Chapter 1 w: *Die Physik der Hochpolymeren*, Springer, Berlin 1956.

[40] R. MUKI and ELI STERNBERG, *On transient thermal stresses in viscoelastic materials with emperature-dependent properties*, J. Appl. Mech., 2, **28** (1961), 193.

[41] E. H. LEE and T. G. ROGERS, *Solution of viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation data*, Interim Technical Report No 1, Grant DA-ARO(D)-31-124-G54, Brown University, sierpień 1961. Ukaże się w J. Appl. Mech.

[42] ELI STERNBERG and M. E. GURTIN, *Uniqueness in the theory of thermo-rheologically simple ablating viscoelastic solids*, Report No. 16, Contract Nonr-562(25), Brown University, wrzesień 1962.

[43] R. D. MINDLIN and M. G. SALVADORI, *Analogies*, w: *Handbook of experimental stress analysis*, Wiley, New York 1950.

[44] H. H. HILTON and H. G. RUSSEL, *An extension of Alfrey's analogy to thermal stress problems in temperature dependent linear viscoelastic media*, J. Mech. Phys. Solids, 9 (1961), 152.

[45] E. H. LEE and T. G. ROGERS, *Nonlinear effects of temperature variation in stress analysis of isothermally linear viscoelastic materials*, Report No 3, Contract Nonr-562(30), Brown University, Maj 1962. Ukaże się w sprawozdaniach z Sympozjum I.U.T.A.M. w Haifie 1962 (Efekty drugiego rzędu w sprężystości, plastyczności i dynamice cieczy).

[46] M. A. BIOT, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. Appl. Phys., 11, **25** (1954), 1385.

[47] M. A. BIOT, *Linear thermodynamics and the mechanics of solids*, Proc., Third U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1958.

[48] T. G. ROGERS and A. C. PIPKIN, *Asymmetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity*, Report No 83, Contract Nonr-562(10), Brown University, Lipiec 1962. Ukaże się w: Z. angew. Math. Phys.

[49] M. A. BIOT, *Dynamics of viscoelastic anisotropic media*, Proc., Fourth Midwestern Conf. Solid Mech., Lafayette 1955.

[50] H. H. HILTON and S. B. DONG, *An analogy for anisotropic, non-homogeneous, linear viscoelasticity including thermal stresses*. Ukaże się jako Aerojet-General Corp. Technical Report TP120SRP.

[51] A.M. Катасонов, *Распространение сферических термо-вязко-упругих возмущений*, Вестник Моск. Университета, Сер. Мат. Мех. Астр. Физ. Хим., 3, 1957.

[52] W. NOWACKI, *Thermal stress propagation in visco-elastic bodies (I)*, Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Tech., 4, **7** (1959), 257.

[53] W. NOWACKI, *Thermal stress propagation in visco-elastic bodies (II)*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 7-8, **7** (1959), 459.

[54] W. NOWACKI, *Ausbreitung der Wärmespannungen in viskoelastischen Körpern*, Österr. Ing. Arch., 1-4, **15** (1961), 115.

[55] M. ŻÓRAWSKI, *States of stress generated in a viscoelastic semi-space by a flat heat source*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 4, **8** (1960), 161.

[56] M. ŻÓRAWSKI, *Determination of stresses generated in a layer and a viscoelastic closed spherical shell*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 10, **8** (1960), 557.

[57] M. ŻÓRAWSKI, *Moving dynamic heat sources in a visco-elastic space and corresponding basic solutions for moving sources*, Arch. Mech. Stos., 13, **2** (1961), 257.

[58] M. ŻÓRAWSKI, *Dynamic nucleus of thermoelastic strain in viscoelastic space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 2, **9** (1961), 77.

[59] ELI STERNBERG and J. G. CHAKRAVORTY, *On inertia effects in a transient thermoelastic problem*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 503.

[60] S. C. HUNTER, *Tentative equations for the propagation of stress, strain and temperature fields in viscoelastic solids*, J. Mech. Phys. Solids, **9** (1961), 39.

Резюме

ТЕРМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ВЯЗКО-УПРУГИХ ТЕЛАХ

Настоящая работа, занимающаяся исключительно телами, которые в изометрических условиях и для инфинитезимальных деформаций обладают свойствами линейной вязко-упругостью, преследует две цели. Во первых дается систематичесский эскиз развития достигнутово в последнее время, в теории, а во вторых ознакомляет читателя с подробными вопросами и с соответствующей литературой.

Эта работа ограничивается анализом квази-статистических термоупругих напряжений в однородных изотропных телах, обладающих линейной вязко-упругостью.

В первой части работы (§ 2, 3, 4) излагается теория термо — вязко-упругости тел при предположении независимости их механических свойств от температуры. Параграфы 5 и 6 касаются вязко-упругих тел, свойства которых зависят от температуры, обращая главное внимание на теорию термо-реологически простых материалов.

Результаты, полученные в работе опираются, в значительной степени на одну из предыдущих работ, касающихся изометрической теории [1]. Широкое использование свойств свертки Стельтиеса, облегчает манипуляцию с прерывными функциями времени. Некоторые теоретические результаты приведенные в тексте работы, не смотря на их элементарный характер, вероятно еще не известны.

Summary

ON THE ANALYSIS OF THERMAL STRESSES IN VISCOELASTIC SOLIDS

The present paper, which is devoted exclusively to solids that under isothermal conditions and for infinitesimal strains exhibit linear viscoelastic behaviour, is intended to serve a dual purpose.

First, an attempt is made to sketch a systematic account of relevant recent theoretical developments, second, it supplies a guide to available specific results and to the literature cn the subject at hand.

The present treatment is mainly confined to the quasi — static analysis of thermal stresses in homogeneous and isotropic linear viscoelastic bodies. Sections 5, 6 of the paper deal with temperatuie — dependent viscoelastic solids, particular emphasis being placed on the theory of termo-rheologically simple materials.

BROWN UNIVERSITY, PROVIDENCE, USA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 maja 1963 r.