MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 1 (1963)

PRZEGLĄD NOWSZYCH PRAC Z DZIEDZINY STATECZNOŚCI POWŁOK CIENKOŚCIENNYCH

ZBIGNIEW NOWAK i MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Powłoki cienkościenne, zarówno otwarte jak i zamknięte, znajdują szerokie i ważne zastosowania w rozmaitych gałęziach przemysłu, a przede wszystkim w budownictwie, lotnictwie, przemyśle maszynowym itp.

W literaturze światowej ukazało się bardzo dużo prac teoretycznych i doświadczalnych, zajmujących się analizą stateczności powłok o różnych kształtach geometrycznych, poddanych działaniu rozmaitych obciążeń. Do roku 1934 wszystkie prace teoretyczne opierały się na tzw. teorii klasycznej (liniowej), przedstawionej przez LOVE'A [1.1], u której podstaw leży założenie, że wszystkie składowe u, v i w wektora przemieszczenia dowolnego punktu powierzchni środkowej powłoki są małe w porównaniu z jej grubością. Podstawowe równania i zależności teorii klasycznej stanowią jedynie modyfikacje odpowiednich równań i zależności liniowej teorii sprężystości.

Wyliczone na bazie teorii liniowej wartości obciążeń krytycznych, których minima noszą nazwę górnych obciążeń krytycznych, były z reguły znacznie wyższe niż wartości otrzymane na drodze eksperymentalnej. Fakt ten był dowodem, że teoria klasyczna stateczności powłok jest niedoskonała i wymaga daleko idących korekt i uzupełnień.

W r. 1934 ukazała się fundamentalna praca L. H. DONNELLA [1.2], w której przedstawiono podstawy nowej teorii tzw. odkształceń skończonych (t.j. rzędu grubości powłoki) małowyniosłych powłok cienkościennych. Od tego czasu datuje się żywiołowy rozwój teorii stateczności powłok, którego owocem jest szereg prac bazujących na niej, nazywanej również teorią geometrycznie nieliniową lub krótko *nieliniową*, ponieważ podstawowe równania tej teorii są nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Obliczone w tych pracach wartości obciążeń krytycznych, których minima noszą nazwę dolnych obciążeń krytycznych, okazały się w większości przypadków niemal zgodne z wartościami otrzymanymi na drodze eksperymentalnej. W ostatnich latach odbyło się kilka sympozjów, poświęconych teorii powłok (Delft 1959, Lwów 1961, Amsterdam 1962), na których główną uwagę koncentrowano na problemach stateczności powłok.

Przedstawione na tych sympozjach prace wykazują, że w chwili obecnej duże zainteresowanie wzbudzają takie stosunkowo młode dziedziny teorii stateczności powłok, jak stateczność powłok bimetalicznych, wyboczenie sprężysto-plastyczne i pełzające oraz stateczność dynamiczna powłok, aczkolwiek w dalszym ciągu wiele jeszcze uwagi poświęca się tradycyjnym problemom stateczności sprężystej powłok izotropowych i ortotropowych o różnych kształtach geometrycznych, poddanych działaniu obciążeń złożonych.

Celem niniejszej pracy jest zwięzły ale wyczerpujący przegląd nowszych prac, przede wszystkim z zakresu nieliniowej teorii stateczności małowyniosłych powłok cienkościennych z uwzględnieniem prac eksperymentalnych, weryfikujących obliczenia teoretyczne, oraz zestawienie najważniejszych pozycji bogatej, a mało u nas znanej literatury tego zagadnienia.

Warto nadmienić, że w ostatnich latach opublikowane zostały 4 prace przeglądowe z dziedziny stateczności powłok, mianowicie A. S. WOLMIRA [1.3], W. A. NASHA [1.4], M. O. ALUMIAEGO [1.5] i Ł. M. KURSZINA [1.6].

W pracy [1.3] zamieszczono 174 pozycje literatury i omówiono obszernie publikacje traktujące o stateczności płyt i powłok, które ukazały się w latach 1941-1956. Właściwy przegląd poprzedzony jest wstępem teoretycznym. Praca wysuwa na pierwszy plan publikacje badaczy radzieckich, aczkolwiek wiele miejsca poświęca również omówieniu ważniejszych prac uczonych zachodnich.

Publikacja przeglądowa [1.4] omawia najważniejsze prace teoretyczne i eksperymentalne, traktujące tylko o stateczności powłok cienkościennych, które ukazały się do roku 1957. Autor podaje 59 pozycji literatury i omawia głównie prace badaczy zachodnich cytując zaledwie kilka prac uczonych radzieckich. Prace [1.5 i 1.6] mają charakter specjalny. Pierwsza z nich omawia jedynie liniowe problemy stateczności sprężystej i drgań własnych powłok cienkościennych (156 pozycji literatury), druga zaś zajmuje się bardzo obszernie zagadnieniami stateczności trójwarstwowych płyt i powłok (277 pozycji literatury).

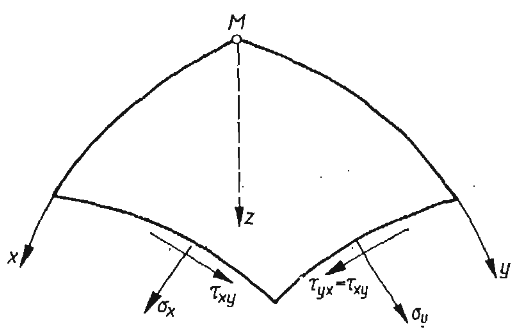
Szczegółowy przegląd wielu prac teoretycznych i doświadczalnych z bogatej dziedziny stateczności powłok o różnych kształtach geometrycznych, przy rozmaitych rodzajach obciążeń prostych i złożonych, można znaleźć w doskonałych, ale trudno dostępnych monografiach G. GERARDA i H. BECKERA [1.7] oraz G. GERARDA [1.8]. Również stosunkowo niedawno wydane monografie K. GIRKMANNA [1.9], A. S. WOLMIRA [1.10], H. M. MUSZTARIEGO i K. Z. GALIMOWA [1.11], O. D. ONIASZWILIEGO [1.12] i W. FLÜGGEGO [1.13] prezentują bogaty materiał teoretyczny i doświadczalny z wielu dziedzin stateczności powłok.

Liczba ukazujących się prac poświęconych stateczności powłok jest ostatnio tak duża, że niniejszy przegląd nie może być pełny. Wystarczy wspomnieć, że w pięciu rocznikach czasopisma «Riefieratiwnyj Żurnał», 1957-1961, omówiono łącznie 298 prac z tego zakresu. Dlatego też postaramy się omówić jedynie pozycje ważniejsze, co do których można przypuszczać, że będą miały znaczenie dla dalszego rozwoju teorii stateczności powłok. Prace polskie będą przy tym wyodrębnione w osobnym rozdziale.

2. Podstawy geometrycznie liniowej teorii małowyniosłych powłok cienkościennych

Rysunek 1 przedstawia element powierzchni środkowej małowyniosłej powłoki cienkościennej. Niech x i y będą osiami współrzędnych krzywoliniowych, pokrywającymi się z liniami głównych krzywizn powierzchni w punkcie M, a z — osią normalną do powierzchni środkowej w tym punkcie.

Oznaczymy przez ε_x, ε_y wydłużenia względne w kierunkach stycznych do osi x i y; γ_x — odkształcenie postaciowe powierzchni środkowej wywołane naprężeniami błonowymi σ_x, σ_y i τ_{xy}; u, v, w są składowymi wektora przemieszczenia punktu M odpowiednio w kierunkach osi x, y, z.



Rys. 1

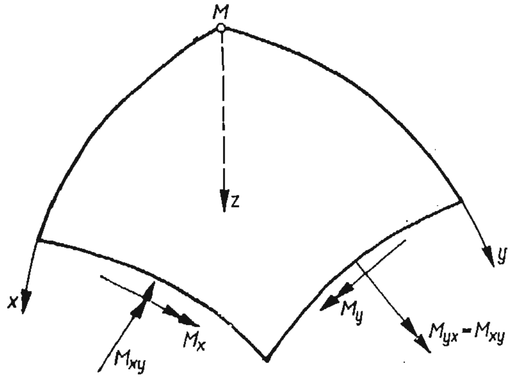
U podstaw nieliniowej teorii małowyniosłych powłok cienkościennych leżą następujące relacje [1.10]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \qquad (2.1) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},
\end{aligned}
$$

gdzie k_x, k_y są głównymi krzywiznami powierzchni środkowej powłoki w punkcie M.

Zmiany krzywizn $\varkappa_x$, $\varkappa_y$ i $\varkappa_{xy}$ powierzchni środkowej, wywołane momentami zginającymi M_x, M_y i momentem skręcającym M_{xy} (momenty te odniesione są do jednostek długości linii x, y powierzchni środkowej, rys. 2), określa się w nieliniowej teorii powłok małowyniosłych analogicznymi zależnościami jak dla płyt:

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varkappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.2}$$



Rys. 2

Związki między naprężeniami błonowymi i odkształceniami liniowymi powierzchni środkowej ustala uogólnione prawo Hooke'a, które dla powłok izotropowych można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie E jest modułem Younga, ν współczynnikiem Poissona. Podobne zależności wiążą momenty zginające i skręcające ze zmianami krzywizn powierzchni środkowej:

$$\begin{aligned} M_x &= D(\varkappa_x+\nu\varkappa_y), \\ M_y &= D(\varkappa_y+\nu\varkappa_x), \\ M_{xy} &= D(1-\nu)\varkappa_{xy}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ jest sztywnością walcową powłoki, a h jej grubością.

Z równań (2.1) otrzymuje się podstawowe równanie zwartości wewnętrznej:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} - k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2.5}$$

Wprowadzając funkcję naprężeń $\Phi(x, y)$ związaną z naprężeniami błonowymi relacjami

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \tag{2.6}$$

otrzymujemy z (2.5), przy uwzględnieniu (2.3) i (2.6), pierwsze podstawowe równanie nieliniowej teorii małowyniosłych, izotropowych powłok cienkościennych:

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.7}$$

gdzie

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2.$$

Drugie równanie podstawowe, wiążące funkcje Φ i w, otrzymuje się z równań równowagi wewnętrznej elementu powłoki. Ma ono postać:

$$\frac{D}{h}\nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + k_x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h}, \tag{2.8}$$

gdzie q oznacza obciążenie przypadające na jednostkę pola powierzchni środkowej.

Dla walcowej powłoki kolistej o promieniu R równania (2.7) i (2.8) przyjmują formę uproszczoną, $k_x = 0$; $k_y = 1/R$:

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.9}$$

$$\frac{D}{h}\nabla^4 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h}. \tag{2.10}$$

Równania (2.7) i (2.8) są słuszne dla małowyniosłych powłok izotropowych o idealnym początkowym kształcie geometrycznym. W przypadku gdy powłoka posiada tzw. «ugięcia wstępne», opisane funkcją $w_0(x, y)$, to przy założeniu $w_0/w = \text{const}$, a więc gdy pierwotna powierzchnia ugięcia odpowiada ugięciom po wyboczeniu, zamiast (2.1) otrzymujemy uogólnione związki:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{K}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{y} - k_y w + \frac{K}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + K\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

a równania (2.7) i (2.8) przybierają postać:

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = K\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] - k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.12}$$

$$\frac{D}{h}\nabla^4 w = \frac{K+1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)+ \tag{2.13}$$

$$+k_x\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+k_y\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{q}{h},$$

gdzie

$$K = 1+\frac{2w_0}{w} = \text{const}. \tag{2.14}$$

Ścisłe rozwiązanie układu równań (2.7) i (2.8) lub (2.12) i (2.13) względem funkcji w i Φ nie jest możliwe. Pozostają więc jedynie metody przybliżone (kolejnych przybliżeń, różnic skończonych, małego parametru, energetyczne, ortogonalizacyjne itp.).

Ponieważ przy analizie stateczności powłok walcowych kolistych (a często i stożkowych) w oparciu o teorię nieliniową przyjmuje się przybliżoną postać funkcji ugięcia $w(x, y)$ przy utracie stateczności, spełniającą najczęściej jedynie geometryczne warunki brzegowe, zatem dla określenia dolnych obciążeń krytycznych stosuje się metodę Ritza (minimum całkowitej energii układu). Idea przewodnia tej metody jest następująca.

a) Przyjmujemy przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności z reguły w formie wielomianu trygonometrycznego

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i \varphi_i(x,y), \tag{2.15}$$

gdzie $\varphi_i(x, y)$ są funkcjami trygonometrycznymi, spełniającymi geometryczne warunki brzegowe, a f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ są na razie nieokreślonymi parametrami.

b) Obliczamy całkowitą energię odkształcenia sprężystego powłoki

$$Э = U_b + U_g - W, \tag{2.16}$$

gdzie U_b jest energią odkształcenia związaną z naprężeniami błonowymi σ_x, σ_y, τ_{xy}, U_g energią odkształcenia związaną z momentami zginającymi M_x, M_y i skręcającym M_{xy}, W pracą wszystkich obciążeń działających na powłokę.

W przypadku izotropowych powłok walcowych, kolistych, o idealnym kształcie wyprowadza się następujące wzory:

$$U_b = \frac{h}{2E}\iint_S \left\{(\nabla^2\Phi)^2+2(1+\nu)\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy,$$

$$U_g = \frac{D}{2}\iint_S \left\{(\nabla^2 w)^2+2(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\}dx\,dy,$$

gdzie

$$S\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant L, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi R; \end{cases}$$

L oznacza długość powłoki.

c) Z warunków koniecznych istnienia minimum całkowitej energii powłoki

$$\frac{\partial Э}{\partial f_i}=0, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2.19}$$

otrzymuje się układ n nieliniowych, algebraicznych równań, zawierających n niewiadomych f_i oraz poszukiwane obciążenie krytyczne p. Z równań tych określa się minimalną wartość ciśnienia p, czyli tak zwane dolne ciśnienie krytyczne.

Uwaga 1. W przypadkach gdy przyjęta przybliżona postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności spełnia zarówno geometryczne jak i statyczne warunki brzegowe, najczęściej stosowaną przy analizie stateczności jest metoda Bubnowa-Galerkina.

Uwaga 2. Bogaty materiał teoretyczny dotyczący teorii nieliniowej powłok cienkościennych oraz przybliżonych metod rozwiązywania nieliniowych problemów stateczności powłok można znaleźć w monografiach [1.10 i 1.11] oraz w pracach specjalnych, podanych w spisie literatury do p. 2.

3. Stateczność statyczna walcowych powłok kolistych w zakresie sprężystym

3.1. Powłoki ściskane osiowo. W ostatnim dwudziestoleciu bardzo szeroki krąg badaczy stosował podstawy nieliniowej teorii do obliczenia obciążeń krytycznych w izotropowych, sprężystych, jednowarstwowych powłokach walcowych, poddanych działaniu różnych obciążeń przy rozmaitych warunkach brzegowych. W przypadku ściskania osiowego równomiernie rozłożonego na brzegach powłoki pionierską była klasyczna już dzisiaj praca T. KÁRMÁNA i H. S. TSIENA [3.1]. Rozpatrzyli oni powłokę długą i przyjęli następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności:

$$w(x,y)=f_0+f_1\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+f_2\cos\frac{2mx}{R}+f_3\cos\frac{2my}{R}, \tag{3.1.1}$$

gdzie m, n oznaczają liczby półfal odpowiednio w kierunku tworzących i obwodowym [funkcja (3.1.1) odpowiada rombowej postaci fal]. Zakładając $f_2=f_3$ i $m=n$ (fale kwadratowe) oraz stosując metodę Ritza (wariacja Э względem dwóch parametrów f_1 i f_2) otrzymali oni wartość dolnego ciśnienia krytycznego

$$p_d=0{,}195\frac{Eh}{R},$$

wtedy gdy według teorii klasycznej górne ciśnienie krytyczne wynosi

$$p_g=0{,}606\frac{Eh}{R}\ (\text{przy } \nu=0{,}3).$$

Dla $m=n$ obliczenie p_d nie było możliwe.

Następnie ukazała się praca H. F. MICHIELSENA [3.2], w której przyjęto przybliżoną postać funkcji $w(x,y)$, analogiczną do zastosowanej w pracy [3.1], ale warunki (2.19) ułożono względem czterech parametrów f_1, f_2, m i n. MICHIELSEN otrzymał $p_d = 0{,}194\ Eh/R$ przy $m/n = 0{,}4$ (t.j dla przypadku, gdy fale są silnie wydłużone wzdłuż obwodu). J. KEMPNER [3.3] odrzucił założenie $f_2 = f_3$ i ułożył warunek (2.19) w odniesieniu do pięciu parametrów f_1, f_2, f_3, n i m/n. Otrzymał on $p_d = 0{,}182\ Eg/R$ przy $m/n = 0{,}362$. Bardzo oryginalnie podszedł do omawianego problemu L. KIRSTE [3.4]. Przyjął on mianowcie, że przy utracie stateczności powłoka przechodzi w wielościan, który można porównać z powierzchnią rozwijalną. Elementarne obliczenia doprowadziły do wartości $p_d = 0{,}187\ Eh/R$.

Problem utraty stateczności ściskanej osiowo, zamkniętej powłoki walcowej kolistej z uwzględnieniem odkształceń wstępnych został zanalizowany szczegółowo (również w oparciu o teorię nieliniową) przez L. H. DONNELLA i C. C. WANA [3.5]. Wykazali oni, że ściskane osiowo walcowe powłoki koliste wykazują dużą wrażliwość na ugięcia wstępne. Stateczność osiowo ściskanej powłoki walcowej w ujęciu nieliniowym badał również szczegółowo S.W. ALEKSANDROWSKI [3.6]. Wreszcie w stosunkowo niedawno opublikowanej pracy E. D. GOLICYNSKIEJ [3.7] obliczono wartość dolnego ciśnienia krytycznego dla omawianej powłoki stosując metodę wariacyjną W. Z. Własowa. Otrzymana wartość $p_d = 0{,}202\ Eh/R$ niewiele różni się od uzyskanych w wyżej cytowanych pracach. Warto również wspomnieć, że W. THIELEMANN i H. J. DREYER [3.8] stwierdzili istnienie w obszarze pozakrytycznym (ściskanej osiowo walcowej powłoki kolistej) drugiej postaci równowagi, różniącej się znacznie od postaci analizowanej w pracy [3.3].

Przypadek osiowo ściskanej powłoki walcowej o zmiennej grubości ścianki rozwiązał metodą małego parametru W. WAGNER [3.9].

3.2. Powłoki pod ciśnieniem zewnętrznym. Problem stateczności zamkniętych walcowych powłok kolistych, poddanych działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego, został rozwiązany na drodze teoretycznej w oparciu o teorię nieliniową prawie równocześnie przez F. S. ISANBAJEWĄ [3.10] i W. A. NASHA [3.11]. Przyjęli oni następującą postać przybliżoną funkcji ugięcia przy utracie stateczności:

$$w(x,y) = f_0 + f_1 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + f_2 \sin^2\frac{\pi x}{L} \tag{3.2.1}$$

i stosowali metodę Ritza z tym, że w pracy [3.11] uwzględniono ponadto wpływ ugięć wstępnych. NASCH wykazał, że parametr f_0, charakteryzujący równomierne odkształcenie promieniowe powłoki, wywiera bardzo nieznaczny wpływ na wielkość dolnego ciśnienia krytycznego. Stwierdził on ponadto, że wrażliwość powłoki na odkształcenia wstępne jest w przypadku wszechstronnego ciśnienia znacznie mniejsza niż przy ściskaniu osiowym, co zostało następnie potwierdzone w pracy L. H. DONNELLA [3.12].

Omawiany problem był później podjęty przez J. KEMPNERA, K. A. V. PANDALAI'EGO, S. A. PASTELA i J. CROUZET-PASCALA (por. [3.13]). Przyjęli oni następującą przybliżoną funkcję ugięcia przy utracie stateczności:

$$w = f_1 \cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{\lambda_y} + f_2 \cos\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{\lambda_y} + f_3 \cos\frac{\pi x}{L} + f_4 \cos\frac{3\pi x}{L} + f_0,$$

gdzie λ_y oznacza długość półfali w kierunku obwodowym.

W odróżnieniu od (3.2.1) tutaj początek osi x został przyjęty w środku powłoki. Warunek minimum całkowitej energii układu ułożono w odniesieniu do czterech parametrów (f_1, f_2, f_3, f_4).

Warto nadmienić, że w przypadku wszechstronnego ciśnienia wartości dolnych obciążeń krytycznych różnią się stosunkowo niewiele od wartości górnych ciśnień krytycznych ($p_d = 0{,}75\, p_g$). Jedynie w pracy [3.13] stwierdzono, że w niektórych przypadkach $p_d = 0{,}97\, p_g$. E. WENK, R. C. SLANKARD i W. A. NASH [3.14] oraz W. A. NAGAJEW [3.15] przeprowadzili serie doświadczeń nad statecznością walcowych powłok kolistych, poddanych działaniu wszechstronnego ciśnienia. Rezultaty ich badań pokrywają się niemal dokładnie z wynikami otrzymanymi w pracach [3.10 - 3.12]. We wszystkich cytowanych w tym punkcie pracach teoretycznych zakładano przegubowo-przesuwne podparcie brzegów powłoki. Nie rozpatrzono dotychczas przypadku brzegów utwierdzonych. Tylko W. A. NASH [3.16] obliczył wartość górnego ciśnienia krytycznego walcowej powłoki kolistej o brzegach utwierdzonych, poddanej działaniu wszechstronnego ciśnienia zewnętrznego. Przyjmując

$$w = f \sin^2\frac{\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R}$$

i stosując metodę Ritza w odniesieniu do parametru f otrzymał on wzór:

$$p_R = \frac{\frac{D}{2}\left[8\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + 4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{n}{R}\right)^4\right] + \frac{4E\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 h}{\left[4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2 R^2}}{\frac{3}{4}R\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}R\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \frac{3}{4R}}.$$

Godne uwagi są stosunkowo niedawno przeprowadzone przez W. E. MINIEJEWA [3.17] bardzo szczegółowe badania eksperymentalne nad wpływem odkształceń wstępnych na stateczność walcowych powłok kolistych, poddanych działaniu wszechstronnego ściskania. Rezultaty jego badań pokrywają się z wnioskami zamieszczonymi w pracach [3.11, 3.12].

3.3. Inne typy obciążeń i przypadki złożone. Utrata stateczności izotropowych walcowych powłok kolistych przy czystym skręcaniu została po raz pierwszy zanalizowana w oparciu o teorię nieliniową i przy zastosowaniu metody Ritza przez T. LOO [3.18] i N. J. KRIWOSZEJEWA [3.19], a następnie przez W. A. NASHA [3.20]. Wszyscy cytowani autorzy uwzględnili wpływ ugięć wstępnych na wielkość dolnego naprężenia krytycznego i wykazali, że walcowa powłoka kolista jest przy skręcaniu mniej wrażliwa na odkształcenia wstępne niż w przypadku ściskania osiowego. W pracach [3.18 i 3.19] przyjęto dla brzegów swobodnie podpartych:

$$w(x,y) = f_1 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n(y+\gamma x)}{R} + f_2\sin^2\frac{\pi x}{L}, \tag{3.3.1}$$

gdzie γ jest tangensem kąta nachylenia osi fal śrubowych do tworzącej, i wykorzystano warunek (2.19) w odniesieniu do dwóch parametrów f_1 i f_2, przy czym wartości γ i n przyjęto w oparciu o teorię klasyczną. W pracy [3.20] natomiast rozpatrzono zarówno przypadek brzegów utwierdzonych jak i swobodnie podpartych przyjmując w pierwszym przypadku

$$w(x, y) = f_0 + f_1\sin^2\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n(y+\gamma x)}{R} + f_2\sin^2\frac{\pi x}{L}\,\cdot$$

w drugim zaś

$$w(x, y) = f_0' + f_1'\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n(y+\gamma x)}{R} + f_2'\sin^2\frac{\pi x}{L}\,\cdot$$

Stosując metodę Ritza Nash ułożył warunek (2.19) w odniesieniu do wszystkich parametrów f_1, f_2, γ, n, a otrzymany układ nieliniowych równań algebraicznych rozwiązał za pomocą maszyny cyfrowej IBM-602A. Ten sam badacz przeprowadził serię doświadczeń [3.21] nad statecznością skręcanych walcowych powłok kolistych. Badania te wykazały zadowalającą zgodność między teorią a doświadczeniem. Nieliniowe ujęcie stateczności powłok walcowych przy czystym skręcaniu zawiera również praca Y. YOSHIMURY i J. NIISAWY [3.22]. Przyjęli oni funkcję ugięcia $w(x, y)$ w postaci zbliżonej do (3.3.1). Dolne naprężenie krytyczne wyznaczone w tej pracy wynosiło przy pewnych parametrach geometrycznych powłoki i określonym sposobie przyłożenia obciążenia 80% wartości naprężenia górnego.

W przypadku stateczności walcowych powłok kolistych przy skręcaniu istnieje jeszcze jedna dotychczas nieuwzględniona sprzeczność między teorią a doświadczeniem. W pracach teoretycznych zakłada się mianowicie, że powstające przy utracie stateczności fale śrubowe rozciągają się na całą długość powłoki, podczas gdy badania [3.21] wykazują, iż ma to miejsce jedynie dla powłok bardzo krótkich.

Badania teoretyczne przeprowadzone przez H. LOO, H. CRATE'A i E. B. SCHWARTZA [3.23] wykazują, że wpływ równomiernie rozłożonego ciśnienia wewnętrznego na stateczność ściskanych osiowo cienkościennych walcowych powłok kolistych zależy przede wszystkim od bezwymiarowego parametru:

$$\bar{q} = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2,$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają: q natężenie ciśnienia wewnętrznego, E moduł Younga, R średni promień powłoki, h grubość powłoki.

Cytowani wyżej autorzy stosując teorię nieliniową wykazali, że osiowe ciśnienie krytyczne powinno wzrastać od wartości $\bar{p}_k = 0{,}376$ przy $\bar{q} = 0$, do wartości $\bar{p}_k = 0{,}606$ przy $\bar{q} = 0{,}169$, a po przekroczeniu jej osiowe ciśnienie krytyczne pozostaje stałe i równe $\bar{p}_k = 0{,}606$, tj. wartości górnego ciśnienia krytycznego. Tymczasem badania doświadczalne przeprowadzone przez Y. C. FUNGA i E.E. SECHLERA [3.24] na powłokach ze stopów aluminium wykazały, że ciśnienia krytyczne $\bar{p}_k$ są znacznie niższe niż obliczone na drodze teoretycznej, aczkolwiek ogólny charakter zmienności p_k jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. Jeżeli jednak sporządzimy wykres zależności

$$\Delta\bar{p}_k = f(q),$$

gdzie $\Delta\bar{p}_k = \bar{p}_k - \bar{p}_{k0}$ ($\bar{p}_{k0}$ wielkość $\bar{p}_k$ przy $\bar{q} = 0$), to jak się okazuje, rezultaty badań doświadczalnych zgadzają się zadowalająco z wynikami teoretycznymi.

Równoczesne działanie ściskania osiowego i poprzecznego ciśnienia zewnętrznego rozpatrzone zostało w pracach O. N. LEŃKI [3.26] i Ł. R. ISPRAWNIKOWA [3.25]. Leńko wybrał następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności:

$$w(x,y) = f_1 \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + f_2 \sin^2\frac{m\pi x}{L}\sin^2\frac{ny}{R}$$

i minimalizował całkowitą energię odkształcenia sprężystego względem trzech parametrów. Ponadto cytowani autorzy badali wpływ sprężystych wręgów na wielkość dolnego ciśnienia krytycznego, umieszczonych w kilku równo oddalonych przekrojach.

Przypadek utraty stateczności walcowych powłok kolistych przy równoczesnym działaniu skręcania i ściskania osiowego analizowany był w cytowanej już pracy T. T. LOO [3.18], a także przez O. I. TIERIEBUSZKĘ [3.27], przy czym ten ostatni przeprowadził serię doświadczeń weryfikujących jego rezultaty teoretyczne.

W 1959 r. ukazała się praca O. I. TIERIEBUSZKI [3.27], w której autor w oparciu o teorię nieliniową rozwiązał problem stateczności izotropowej walcowej powłoki kolistej, poddanej równoczesnemu działaniu ściskania osiowego, skręcania i zewnętrznego ciśnienia radialnego. W pracy przyjęto przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności w postaci:

$$w = f_0 + f_1 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{m(y+\gamma x)}{R} + f_2 \sin\frac{i\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R} + f_3 \sin^2\frac{\pi x}{L},$$

gdzie m oznacza liczbę fal spiralnych w kierunku obwodowym przy utracie stateczności przy skręcaniu, n liczbę półfal w kierunku obwodowym przy utracie stateczności wywołanej ściskaniem osiowym lub ciśnieniem poprzecznym, i liczbę półfal wzdłuż tworzącej.

Autor zastosował do określenia dolnego ciśnienia krytycznego metodę Ritza minimalizując całkowitą energię sprężystą układu względem 3 parametrów (f_1, f_2, f_3). Otrzymane nieliniowe równania algebraiczne pozwalają obliczyć którekolwiek z trzech naprężeń krytycznych przy danych wartościach dwóch pozostałych.

W. M. DARIEWSKI [3.28], R. I. KSZNIAKIN [3.29] i W. A. MARIN [3.30] zbadali stateczność powłok walcowych kolistych przy równoczesnym działaniu skręcania i ciśnienia wewnętrznego. MARIN stwierdził, że realne wartości krytycznego momentu skręcającego stanowią przy niezbyt dużej wartości ciśnienia wewnętrznego 70-80% wartości momentu wyznaczonego na podstawie teorii klasycznej.

W. M. DARIEWSKI [3.31] i P. G. BURDIN [3.32] rozpatrzyli stateczność walcowej powłoki kolistej poddanej zginaniu siłą lub parą sił. Stwierdzili oni, że dla powłok krótkich, zginanych siłą, utrata stateczności wywołana jest działaniem naprężeń stycznych i ma miejsce w pobliżu włókna neutralnego. Drugi z cytowanych autorów przeprowadził ponadto serię doświadczeń nad powłokami różnej długości, poddanymi działaniu zginania z równoczesnym ciśnieniem zewnętrznym o różnym natężeniu. Przypadek łącznego działania zginania, skręcania i ciśnienia wewnętrznego rozpatrzył W. M. DARIEWSKI [3.33].

Bardzo ciekawe doświadczenia modelowe nad statecznością walcowych powłok kolistych wykonanych z papieru i błony fotograficznej przy różnych obciążeniach przeprowadzili W. M. CZEBANOW [3.34] i P. G. BURDIN [3.32]. Wreszcie Ł. R. ISPRAWNIKOW [3.35] przeprowadził eksperymentalne badanie stateczności powłok walcowych przy równoczesnym ściskaniu osiowym, skręcaniu i ciśnieniu poprzecznym. Pokrewny problem stateczności membrany walcowej, osiowo rozciąganej a radialnie ściskanej, badali w zakresie ugięć skończonych A. H. CORNELIÜSSEN i R. T. SHIELD [3.36].

4. Stateczność statyczna powłok kulistych w zakresie sprężystym

Nieliniowa teoria powłok cienkościennych została również z powodzeniem zastosowana do analizy stateczności sprężystej małowyniosłych powłok kulistych otwartych (łupin kulistych), poddanych działaniu ciśnienia zewnętrznego równomiernie rozłożonego na powierzchni. Pionierska na tym polu była praca K. FRIEDRICHSA [4.1] opublikowana w r. 1942. Przyjął on, że w momencie utraty stateczności tworzy się niewielkie osiowo-symetryczne wybrzuszenie i założył w jego obrębie następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia:

$$w = Ra(1-\varrho^4), \tag{4.1}$$

gdzie ϱ wyraża stosunek bieżącego kąta środkowego do połowy kąta środkowego, obejmującego wybrzuszenie, $\varrho = \alpha/\beta$. Stosując metodę Ritza FRIEDRICHS otrzymał w jednym z wariantów rozwiązania:

$$p_d = 0{,}136\frac{Eh}{R} \quad \text{i} \quad p_э = 0{,}157\frac{Eh}{R}$$

($p_э$ — tzw. naprężenie «równoważnych energii», por. [4.1]) wobec rezultatu teorii klasycznej

$$p_g = 0{,}606 \frac{Eh}{R}.$$

Przybliżone wyniki dla p_d w omawianym przypadku stateczności otrzymali również M. I. BABICZEWA [4.2] i W. I. FIEODOSJEW [4.3 i 4.4].

Ten sam problem podjęli następnie H. M. MUSZTARI i S. G. SURKIN [4.5, 4.6] rozwiązując go w dwóch wariantach, mianowicie

a) przyjmowali przybliżone postacie funkcji przemieszczenia południkowego u i ugięcia w w obrębie wybrzuszenia, po czym stosowali metodę Ritza minimalizując $\ni$ względem trzech parametrów (amplitudy, u i w oraz β);

b) przyjmowali pewną «gasnącą» funkcję ugięcia w rozłożonego na całej powierzchni powłoki. Cytowani autorzy otrzymali:

$$p_d = 0{,}17 \frac{Eh}{R}, \qquad p_{\ni} = 0{,}20 \frac{Eh}{R}.$$

W późniejszej pracy W. I. FIEODOSJEWA [4.7] przyjęto w obszarze wybrzuszenia ($\varrho \leqslant 1$) funkcję ugięcia

$$w = Ra(1-\varrho^2)^2,$$

dla $\varrho > 1$ zaś wykorzystano równania zaburzenia brzegowego przy użyciu funkcji hiperboliczno-trygonometrycznych. Stosując metodę Bubnowa-Galerkina znaleziono $p_d < 0$. H. M. MUSZTARI [4.8] wykazał, że przy tym wyborze funkcji w można również otrzymać $p_d > 0$ pod warunkiem zastosowania równania Bubnowa-Galerkina tak, aby odpowiadało ono zasadzie możliwych przesunięć. Ten sam problem rozwiązany został następnie w pracy U. MASUJI i Y. YOSHIMURY [4.9] (otrzymali oni $p_{\ni} = 0{,}184\, Eh/R$). W 1955 r. problem stateczności powłoki kulistej pod działaniem ciśnienia zewnętrznego podjęli A. KAPLAN i Y. C. FUNG [4.10], którzy zastosowali metodę małego parametru do rozwiązania nieliniowych równań stateczności. Za pomocą tej metody otrzymali oni wartość dolnego ciśnienia krytycznego, zgodną z ich własnymi doświadczeniami dla bardzo małowyniosłych powłok kulistych o brzegach utwierdzonych. Następnie R. R. ARCHER [4.11] rozszerzył te badania na powłoki kuliste o większej wyniosłości. Ten sam problem został również rozwiązany przy użyciu szeregów potęgowych z następnym wykorzystaniem maszyn cyfrowych przez E. L. REISSA, H. J. GREENBERGA i H. B. KELLERA [4.12]. Otrzymali oni wartości ciśnień krytycznych zgodne z danymi doświadczalnymi dla szerokiego zakresu wartości parametrów geometrycznych powłoki.

Wreszcie E. L. REISS [4.13] przedstawił przybliżone rozwiązanie omawianego zagadnienia w oparciu o dwie zlinearyzowane odmiany pierwotnych nieliniowych równań stateczności.

Wszystkie wymienione wyżej prace dotyczyły stateczności łupin kulistych (powłok kulistych otwartych) i zakładały osiowo-symetryczny stan odkształcenia przy utracie stateczności. Przypadek asymetrycznego wyboczenia takiej powłoki został zbadany przez E. I. GRIGOLUKA [4.14], który wykazał możliwość takiego wyboczenia dla pewnych wartości parametrów geometrycznych powłoki. Obliczył on wartość dolnego ciśnienia krytycznego rozwiązując nieliniowe równania stateczności metodą Bubnowa-Galerkina. Zagadnienie stateczności sprężystej zamkniętej powłoki kulistej z uwzględnieniem «ugięć wstępnych», poddanej działaniu równomiernego ciśnienia zewnętrznego, rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową L. H. DONNELL [4.15]. Przeprowadzona przez niego analiza otrzymanych rezultatów wykazuje, że powłoka kulista jest stosunkowo bardzo malo wrażliwa na odkształcenia wstępne. W. Z. CHIEN i H. C. HU [4.16] przedstawili półempiryczną analizę statycznej stateczności małowyniosłej powłoki kulistej pod działaniem koncentrycznie przyłożonego obciążenia pierścieniowego, normalnego do powierzchni środkowej powłoki. D. G. ASHWELL [4.17] rozwiązał problem wyboczenia takiej samej powłoki, ale obciążonej siłą skupioną skierowaną do środka. Wreszcie F. J. MURRAY i F. W. WRIGHT [4.18] podali analizę stateczności powłoki kulistej rozwiązując na drodze numerycznej podstawowe równania nieliniowej teorii powłok kulistych Kármána-Tsiena.

Systematyczne badania eksperymentalne nad statecznością łupin kulistych poddanych działaniu normalnego ciśnienia zewnętrznego zostały przeprowadzone przez P. G. SURKINA [4.19]. Opracował on oryginalne metody przygotowania modeli i badania ich utraty stateczności. Inna seria doświadczeń została przeprowadzona przez G. A. GIENJEWA i N. S. CZAUSOWA [4.20]. Wreszcie K. KLÖPPEL i O. JUNGBLUTH [4.21] zbadali doświadczalnie utratę stateczności gładkich i wzmocnionych żebrami powłok kulistych metodą przyśpieszonych zdjęć filmowych.

Pokrewny problem stateczności membrany kulistej w zakresie ugięć skończonych i przy uwzględnieniu fizykalnej nieliniowości materiału badał GUO ZHONGHENG [4.22]. Stwierdzono stateczność przy ciśnieniu wewnętrznym i niestateczność przy zewnętrznym.

5. Stateczność statyczna powłok stożkowych w zakresie sprężystym

Z krótkiego przeglądu prac p. 3 i p. 4 widać, że teoria nieliniowa może być z powodzeniem stosowana do analizy stateczności sprężystej cienkościennych powłok zarówno walcowych, jak i kulistych, poddanych działaniu różnego rodzaju obciążeń prostych i złożonych przy rozmaitych warunkach brzegowych. We wszystkich przypadkach wyniki zastosowania tej teorii pozostają w lepszej zgodności z danymi doświadczalnymi aniżeli wyniki analiz opartych na teorii klasycznej. Znacznie gorzej przedstawia się sprawa, jeżeli chodzi o stateczność powłok stożkowych w zakresie sprężystym. Olbrzymia większość opublikowanych dotychchzas na ten temat prac opiera się na teorii klasycznej. Pierwszą z tej serii wydaje się być praca A. PFLÜGERA [5.1]. W późniejszej pracy H. M. MUSZTARIEGO i A. W. SACZENKOWA [5.2] określono metodą Bubnowa–Galerkina wartość górnego ciśnienia krytycznego dla powłoki stożkowej kolistej, poddanej działaniu ciśnienia osiowego, równomiernie rozłożonego na brzegach powłoki oraz poprzecznego ciśnienia zewnętrznego. Problem stateczności powłoki stożkowej kolistej, poddanej działaniu jedynie poprzecznego ciśnienia hydrostatycznego, został rozwiązany w oparciu o teorię klasyczną przez C. E. TAYLORA [5.3] oraz N. J. HOFFA i J. SINGERA [5.4], dla przypadku zaś ściskania osiowego przez P. SEIDE'A [5.5]. Pierwszą pracą o stateczności powłok stożkowych w ujęciu geometrycznie nieliniowym jest praca A. W. SACZENKOWA [5.6]. Wykazał on, że rozwiązanie MICHIELSENA [3.2] dotyczące osiowego ściskania walcowej powłoki kolistej może być przeniesione na stożkową powłokę kolistą. Wyprowadził on następujący wzór dla dolnej wartości krytycznej całkowitej osiowej siły ściskającej:

$$P_d = 0{,}195 \cdot 2\pi E h^2 \cos^2 \gamma\,,$$

gdzie γ jest równe połowie wierzchołkowego kąta stożka.

W pracy [5.7] rozwiązano również w oparciu o teorię nieliniową zagadnienie stateczności powłoki stożkowej o brzegach utwierdzonych pod działaniem ciśnienia zewnętrznego, równomiernie rozłożonego na pobocznicy. Autor zastosował metodę małego parametru do rozwiązania nieliniowych równań stateczności. Podobny przypadek stateczności w ujęciu geometrycznie nieliniowym został rozpatrzony przez R. K. RIAJAMETA [5.8]. Doszedł on do wniosku, że w przypadku ciśnienia zewnętrznego różnica między górnym a dolnym ciśnieniem krytycznym jest znacznie mniejsza niż w przypadku ściskania osiowego. Ten sam autor rozpatrzył również ogólny przypadek zachowania się stożkowych powłok kolistych w stanie pozakrytycznym [5.9]. Stateczność powłoki stożkowej pełnej pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego równomiernie rozłożonego na pobocznicy rozpatrzył w ujęciu liniowym I. I. TRAPIEZIN [5.10]. Ten sam autor określił na drodze doświadczalnej wielkości ciśnień krytycznych dla powłok stożkowych pełnych przy różnych wartościach ich parametrów geometrycznych [5.11].

L. M. BUNICZ, O. M. PALIJ i I. A. PISKOWITINA [5.12] rozwiązali w oparciu o teorię klasyczną za pomocą metody Ritza zagadnienie stateczności gładkiej i wzmocnionej żebrami powłoki w kształcie stożka ściętego pod działaniem równomiernego ciśnienia zewnętrznego. Ten sam problem został również rozwiązany w pracach [5.13-5.16]. Oryginalną metodę asymptotycznego całkowania ogólnych równań równowagi powłoki stożkowej przedstawiono w pracy [5.17]. Niestety do chwili obecnej nie rozwiązano w oparciu o teorię nieliniową problemu stateczności stożkowej powłoki kolistej przy obciążeniu złożonym.

Dużą serię badań nad statecznością powłok stożkowych ze stopów aluminium przeprowadził W. D. JORDAN [5.18]. W oparciu o wyniki swych doświadczeń ustalił on pewną formułę empiryczną na wartości obciążeń krytycznych, która wykorzystywana jest z powodzeniem przy projektowaniu i konstruowaniu powłok stożkowych.

6. Stateczność powłok wzmocnionych i anizotropowych

Jednym z zagadnień o bardzo dużym znaczeniu praktycznym jest przypadek tzw. «ogólnej utraty stateczności» powłok wzmocnionych żebrami, czyli przypadek gdy powłoka i żebra usztywniające tracą stateczność jednocześnie. Problem ten dla walcowych powłok kolistych wzmocnionych żebrami pierścieniowymi i poddanych działaniu zewnętrznego ciśnienia hydrostatycznego został po raz pierwszy rozwiązany w serii trzech prac V. L. SALERNO i B. LEVINE'A [6.1-6.3]. W oparciu o teorię klasyczną obliczyli oni wartość górnego ciśnienia krytycznego przy ograniczającym jednakże założeniu, że pierścienie usztywniające muszą mieć przekroje otwarte (szczegółowo zanalizowano przekrój dwuteowy). To samo zagadnienie podjęli następnie H. A. AŁFUTOW [6.4] i S. KENDRICK [6.5] ograniczając się do przypadku obciążenia powłoki równomiernym ciśnieniem poprzecznym oraz opierając się przy określaniu ciśnienia krytycznego również na teorii liniowej. Wartości ciśnień krytycznych wyznaczone w tej ostatniej pracy odchylają się mniej niż o 20% od wyników starannie przeprowadzonych badań eksperymentalnych w David Taylor Model Basin. Należy jednakże zauważyć, że warunki brzegowe przyjęte w pracy [6.5] nie odpowiadają sposobowi podparcia powłok w tych badaniach doświadczalnych. Jeżeli teorię klasyczną zastosować do warunków brzegowych zrealizowanych we wspomnianych doświadczeniach, to okazuje się, że otrzymane teoretycznie wartości ciśnień krytycznych przekraczają o 70% wartości doświadczalne. Pewnym uogólnieniem prac [6.1-6.5] jest praca W. A. NASHA [6.6], w której autor w przeciwieństwie do swych poprzedników: 1) przyjmuje funkcje przemieszczeń $u(x, y)$, $v(x, y)$ i $w(x, y)$ w oparciu o rzeczywisty kształt powierzchni środkowej przy utracie stateczności; 2) wyprowadza nowy, bardziej ogólny wzór na pracę sił zewnętrznych; 3) rozpatruje ogólniejszy przypadek działania ciśnienia hydrostatycznego w kierunku radialnym i osiowym oraz 4) zakłada dowolny przekrój i ograniczoną sztywność pierścieni wzmacniających.

Teoria liniowa została ponadto zastosowana przez K. D. TURKINA [6.7] do analizy stateczności długiej wzmocnionej walcowej powłoki kolistej poddanej działaniu ściskania osiowego i czystego zginania przez S. R. BODNERA [6.8] do badania ogólnej niestateczności walcowych powłok kolistych, usztywnionych żebrami pierścieniowymi, wywołanej ciśnieniem hydrostatycznym, wreszcie przez I. JA. AMIRO [6.9] do analizy podłużnie i poprzecznie żebrowanej powłoki walcowej przy ściskaniu osiowym. Ogólna utrata stateczności walcowych powłok kolistych wzmocnionych pierścieniami i poddanych działaniu ciśnienia osiowego została zbadana eksperymentalnie na modelach z mas plastycznych przez J. C. Mc COYA [6.10]. Badania te wykazują, że decydującym parametrem usztywnienia powłoki jest sztywność skręcania pierścieni usztywniających. P. SEIDE [6.11] zastosował teorię klasyczną do analizy stateczności sprężystej walcowych powłok kolistych wzmocnionych równo oddalonymi żebrami podłużnymi i ściskanych osiowo. Rezultaty tej analizy są w zadowalającej zgodności z wynikami serii doświadczeń, przeprowadzonych przez H. T.

PONSFORDA [6.12] przy założeniu, że $R/h < 335$. Wykazują one ponadto, że przy określonych parametrach geometrycznych powłoki obecność żeber podłużnych nie zwiększa wartości ciśnienia krytycznego w porównaniu z powłokami nieusztywnionymi. Cenne badania modelowe nad wzmocnionymi powłokami walcowymi opisane są w pracy [6.13].

Duża seria badań doświadczalnych nad powłokami kulistymi o dużej krzywiźnie, wzmocnionych żebrami promieniowymi i pierścieniowymi i obciążonych równomiernie rozłożonym ciśnieniem zewnętrznym, została przeprowadzona przez K. KLÖPPELA i O. JUNGBLUTHA [6.14]. Wreszcie H. EBNER [6.15] w oparciu o teorię klasyczną wyjaśnił zachowanie się tych modeli, które wybaczają się osiowo-symetrycznie. Jednakże pewna liczba modeli odkształciła się asymetrycznie, przy czym utrata stateczności nastąpiła tylko w pobliżu brzegów.

Wszystkie cytowane wyżej prace teoretyczne były oparte na teorii klasycznej. Dopiero w ostatnich latach uczonym radzieckim udało się z powodzeniem zastosować teorię nieliniową również i do analizy stateczności powłok wzmocnionych.

O. I. TIERIEBUSZKO [6.16] rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową zagadnienie utraty ogólnej stateczności ściskanej osiowo zamkniętej powłoki walcowej wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi. Przeprowadził on ponadto ciekawą analizę współpracy powłoki z żebrami. Ten sam autor rozwiązał również na podstawie teorii nieliniowej problem stateczności zamkniętej walcowej powłoki kolistej, ściskanej osiowo i usztywnionej żebrami podłużnymi i pierścieniowymi podając w zakończeniu pracy cenne wytyczne dla projektowania takich powłok [6.17].

A. B. KORDASZENKO [6.18] rozwiązał w oparciu o teorię nieliniową problem stateczności powłoki o podwójnej krzywiźnie, wzmocnionej żebrami.

Jeżeli żebra podłużne i poprzeczne wzmacniające powłokę rozłożone są bardzo «gęsto», to powłokę można uważać w przybliżeniu za ortotropową. W konsekwencji tego wyniki prac, traktujących o stateczności powłok ortotropowych, można przenieść na powłoki wzmocnione. A oto zestawienie najważniejszych prac z tej dziedziny w ujęciu geometrycznie liniowym.

1. S. N. KUKUDŻANOW [6.19] rozwiązał zagadnienie stateczności ortotropowej walcowej powłoki kolistej poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego poprzecznego i rozciągania osiowego oraz skręcania wraz z osiowym rozciąganiem.

2. W. M. DARIEWSKIJ i S. N. KUKUDŻANOW [6.20] rozwiązali problem stateczności ortotropowej walcowej powłoki kolistej przy skręcaniu i ciśnieniu zewnętrznym poprzecznym.

Podobne zagadnienie rozpatrzył również W. W. SERDIUKOW [6.21].

3. E. I. GRIGOLUK [6.22] zbadał stateczność ortotropowych i wielowarstwowych powłok walcowych i stożkowych poddanych działaniu ściskania osiowego i zewnętrznego ciśnienia normalnego.

Pierwszym uczonym i jedynym do chwili obecnej, który rozwiązał zagadnienie stateczności powłok ortotropowych w ujęciu geometrycznie nieliniowym, jest O. N. LEŃKO. W pracy [6.23] określił on metodą Ritza wartość dolnego ciśnienia krytycznego dla ortotropowej walcowej łupiny kolistej ściskanej osiowo, w pracy zaś [6.24] rozwiązał zagadnienie ortotropowej walcowej powłoki kolistej, poddanej działaniu ściskania osiowego i zewnętrznego ciśnienia normalnego do powierzchni środkowej.

7. Stateczność statyczna powłok dwu- i trójwarstwowych

Z uwagi na bardzo obszerną, cytowaną w p. 1 pracę przeglądową Ł. M. Kurszina o stateczności powłok trójwarstwowych, ograniczymy się poniżej do zwięzłego omówienia jedynie najważniejszych publikacji traktujących o tym zagadnieniu.

Podobnie jak stateczność dynamiczna zagadnienie stateczności statycznej powłok wielowarstwowych przyciągnęło uwagę badaczy stosunkowo niedawno. W dotychczas opublikowanych pracach autorzy ograniczają się do analizy stateczności jedynie powłok dwu- lub trójwarstwowych zakładając, że grubość każdej warstwy jest stała oraz że warstwy nie mogą się ślizgać po sobie wzdłuż powierzchni ich styku.

Pierwszym, który przeprowadził badania stateczności dwuwarstwowych powłok walcowych i stożkowych, obciążonych równomiernie rozłożonym ciśnieniem zewnętrznym, był E. I. GRIGOLUK [7.1-7.2]. W oparciu o teorię nieliniową obliczył on wartości ciśnień krytycznych przyjmując jako powierzchnię odniesienia powierzchnię styku obu warstw. Rewizja tych analiz, w której powierzchnię odniesienia określono przez przyrównanie do zera momentu pierwszego stopnia modułów Younga materiałów obu warstw, została przedstawiona przez P. P RADKOWSKIEGO [7.3-7.4]. Dla obliczenia ciśnień krytycznych zastosował on metodę Ritza opierając się jednak na teorii klasycznej. Niestety, do chwili obecnej nie przeprowadzono poważniejszych badań doświadczalnych nad statecznością powłok dwuwarstwowych. We wstępie do niniejszej pracy nadmieniono, że w przypadku jednowarstwowych, jednorodnych i izotropowych powłok teoria klasyczna daje wartości obciążeń krytycznych na ogół wyższe niż otrzymane z doświadczeń. Tymczasem w przypadku trójwarstwowych powłok walcowych kolistych z rdzeniami o małym module Kirchhoffa teoria klasyczna przewiduje wartości ciśnień krytycznych niemal zupełnie dokładnie. Badania teoretyczne nad statecznością powłok trójwarstwowych zapoczątkowała seria prac opublikowanych przez C. T. WANGA i współpracowników [7.5-7.9], w których rozwiązano problemy stateczności takich powłok przy ściskaniu osiowym, skręcaniu, zginaniu i równoczesnym zginaniu i ściskaniu osiowym. W pracy [7.10] C. T. WANG i D. F. SANTO rozwiązali problem sprężystej stateczności trójwarstwowej walcowej powłoki kolistej przy równoczesnym działaniu ściskania osiowego, skręcania i zginania. Zastosowali oni metodę Bubnowa–Galerkina, wychodząc z uogólnionego równania różniczkowego ósmego rzędu, wyprowadzonego przez L. H. DONNELLA [7.11]. Stwierdzili oni, że np. dla przypadku ściskania osiowego ciśnienie krytyczne nie zależy od długości fali i wyraża się wzorem

$$\sigma_k = \frac{(h+t)\,G_c}{2t},$$

gdzie h oznacza grubość rdzenia, t grubość okładzin, G_c moduł Kirchhoffa dla rdzenia.

Wyniki badań doświadczalnych tych autorów nad statecznością powłok trójwarstwowych o okładzinach ze stopów a'uminium i rdzeniach z porowatej acetylocelulozy potwierdzają słuszność podanego wyżej wzoru. W przypadku obciążeń złożonych autorzy sporządzili szereg krzywych we współrzędnych bezwymiarowych, z których można odczytać wartości obciążeń krytycznych. W Forest Products Laboratory przeprowadzono doświadczalne badania stateczności powłok trójwarstwowych o okładzinach ortotropowych. Potwierdziły one analizy teoretyczne wykonane w oparciu o teorię nieliniową dla ściskania osiowego [7.12], a w oparciu o teorię klasyczną dla przypadku skręcania [7.13] i równomiernie rozłożonego poprzecznego ciśnienia zewnętrznego [7.14]. W pracy [7.15] S. Y. LU i W. A. NASH rozwiązali na bazie teorii nieliniowej zagadnienie stateczności cienkiej powłoki walcowej wzmocnionej miękkim sprężystym rdzeniem, poddanej działaniu ściskania osiowego i zginania. Problemy stateczności powłok trójwarstwowych w ujęciu liniowym i nieliniowym rozwiązane zostały również w pracach [7.16-7.24].

8. Stateczność statyczna powłok w zakresie sprężysto–plastycznym

Jakkolwiek dziedzinę niesprężystego wyboczenia powłok można by uznać za stosunkowo młodą, to jednak już w chwili obecnej obejmuje ona kilkadziesiąt prac. Szczegółowe omówienie prac opublikowanych do roku 1957 można znaleźć w rozprawie E. I. GRIGOLUKA [8.1], w związku z czym o badaniach z tego okresu podamy jedynie krótkie wzmianki.

Autorem pierwszej pracy dotyczącej niesprężystego wyboczenia powłok (1928 r.) był J. GECKELER [8.2]. Badał on ściskane powłoki walcowe. Podobne problemy rozważał nieco później W. KAUFMANN [8.3, 8.4]. Fundamentalnymi dla rozwoju teorii stateczności powłok w zakresie sprężysto–plastycznym były prace A. A. ILIUSZINA [8.5] i P. P. BIJLAARDA [8.6]. Opierają się one na teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych Hencky'ego-Iliuszina. Jakkolwiek na ogół uważa się, że teoria płynięcia plastycznego Prandtla–Reussa w ogólnym przypadku lepiej odpowiada zachowaniu się materiałów konstrukcyjnych, to jednak przy analizie stateczności płyt i powłok wielu badaczy stwierdziło lepszą zgodność z doświadczeniami teorii odkształceniowej niż teorii płynięcia plastycznego. Niektórzy autorzy (zwłaszcza E. I. GRIGOLUK) rozwiązywali badane zagadnienia równolegle w oparciu o obie teorie nie tylko dla uzyskania szerszego poglądu na dane zagadnienie, lecz również w celu dostarczenia danych porównawczych eksperymentatorom.

Autorem największej liczby prac z dziedziny niesprężystego wyboczenia powłok jest E. I. GRIGOLUK. Z jego badań o charakterze ogólnym wymienimy — oprócz wspomnianej już pracy [8.1] — pracę [8.7], która w oparciu o teorię Prandtla–Reussa analizuje stateczność powłoki kolistej i walcowej w kilku najważniejszych przypadkach, dalej pracę [8.8] poświęconą wyprowadzeniu ogólnych równań dla powłok obrotowych w oparciu o obie teorie oraz [8.9] poruszającą problem wpływu ściśliwości materiału na obciążenie krytyczne powłok. Ta ostatnia praca poddaje krytyce metodę uwzględniania ściśliwości materiału, zaproponowaną przez G. GERARDA [8.10, 8.11]. Problem skończonych ugięć sprężysto-plastycznych po sprężystym wyboczeniu powłok sformułował M. F. JERSZOW [8.12].

Dużą ilość prac poświęcono powłokom walcowym przy różnych przypadkach obciążenia. Wspomniane już prace W. KAUFMANNA [8.3, 8.4] rozwinęli H. NEUBER i G. LANDGRAF [8.13]. Przypadek osiowego ściskania badali metodą energetyczną A. PUGSLEY i M. MACAULAY [8.14] oraz W. G. ZUBCZANINOW [8.15], a w ujęciu nieliniowym L. H. N. LEE [8.16], który rozwiązał problem w oparciu o obie teorie plastyczności oraz uzyskał potwierdzenie doświadczalne teorii płynięcia plastycznego. Przypadek ciśnienia radialnego lub wszechstronnego badali N. S. GANIJEW [8.17, 8.18], E. I. GRIGOLUK [8.19] przy uwzględnieniu ściśliwości materiału oraz M. E. LUNCHICK [8.20] przy uwzględnieniu użebrowania. Przypadek skręcania badali w ujęciu nieliniowym L. H. LEE i C. S. ADES [8.21]. Prace G. GERARDA [8.22], S. RADHAKRISHNANA [8.23, 8.24] i E. I. GRIGOLUKA [8.25] obejmują przypadki ściskania osiowego, radialnego i skręcania oraz przypadki obciążeń złożonych.

Stateczność powłok stożkowych o zmiennej grubości w zakresie sprężysto-plastycznym badał A. W. SACZENKOW [8.26] stosując metodę Bubnowa–Galerkina.

Sporo uwagi poświęcono również sprężysto-plastycznej stateczności powłok wielowarstwowych. Ogólne równania dla powłok trójwarstwowych (sandwiczowych) o dowolnym kształcie sformułował E. I. GRIGOLUK w pracach [8.27 i 8.28], a dla powłok bimetalicznych w pracy [8.29] w oparciu o obie teorie plastyczności. Stateczności wielowarstwowych powłok walcowych poświęcone są prace N. S. GANIJEWA [8.30] (równomierne ciśnienie zewnętrzne), L. M. KURSZINA [8.31] oraz W. I. KOROLEWA, I. G. SMIRNOWA i R. P. STOMMY [8.32] (ściskanie osiowe).

Ogólnie biorąc należy podkreślić, że jakkolwiek przy analizie stateczności powłok obciążenie elementu odbiega zazwyczaj znacznie od obciążenia prostego i należałoby spodziewać się lepszej zgodności z doświadczeniami wyników otrzymanych na podstawie teorii Prandtla–Reussa niż Hencky'ego–Iliuszina, to jednak większość dotychczasowych wyników doświadczalnych potwierdza raczej tę ostatnią. Problem ten niewątpliwie wymaga jeszcze ostatecznego wyjaśnienia.

9. Stateczność termiczna i wyboczenie pełzające powłok

Stosunkowo niedawno opublikowane prace umożliwiły obliczenie maksymalnej temperatury, do której można podgrzać walcową powłokę kolistą, zanim nastąpi utrata stateczności termicznej przy założeniu, że temperatura zmienia się tylko w kierunku obwodowym. S. Y. LU wykazał [9.1], że decydującym czynnikiem w tym przypadku jest obwodowy gradient temperatury. Stwierdził on jednocześnie, że maksymalna temperatura nie jest jedynym kryterium stateczności termicznej. Cytowana praca oparta jest na uogólnieniu liniowego równania różniczkowego 8 rzędu wyprowadzonego przez L. H. DONNELLA, przy czym LU do rozwiązania postawionego problemu stosuje metodę Bubnowa–Galerkina. Jednocześnie LU przeprowadził serię doświadczeń z powłokami mosiężnymi, poddanymi działaniu zmiennej wzdłuż obwodu temperatury i stwierdził, że wyniki pokrywają się niemal dokładnie z rezultatami jego analizy teoretycznej dla powłok, w których $R/h > 500$. Pewną modyfikację pracy LU, prowadzącą w przybliżeniu do tych samych wyników, przedstawili D. ABIR i S. V. NARDO [9.2]. Następnie ABIR i inni [9.3] rozpatrywali stateczność termiczną powłok stożkowych gładkich i usztywnionych żebrami. Te ostatnie były podgrzewane równomiernie, przy czym stwierdzono, że czas, po upływie którego następuje utrata stateczności, jest dłuższy niż to przewiduje teoria klasyczna.

Cytowani autorzy wykazali następnie, że istnieje bardzo małe prawdopodobieństwo utraty stateczności termicznej przez nieusztywnioną powłokę stożkową, podgrzewaną osiowo-symetrycznie przy założeniu, że temperatura zmienia się tylko w kierunku osiowym.

Zagadnienie stateczności termicznej płyt i małowyniosłych powłok w ponaddźwiękowym strumieniu gazu zostało rozwiązane (w ujęciu liniowym i nieliniowym) przez W. W. BOŁOTINA [9.4]. Stateczność termiczną trójwarstwowej walcowej powłoki kolistej rozpatrzono w ujęciu liniowym w pracy [9.5]. Wreszcie J. SINGER [9.6] rozwiązał problem termicznej stateczności dla stożkowej powłoki kolistej przy założeniu osiowo-symetrycznego pola temperatur.

Jednym z bardzo ważnych zagadnień związanych z wpływem temperatury na zachowanie się różnych elementów konstrukcyjnych jest wyboczenie pełzające. Problem ten można również traktować odrębnie, ponieważ np. przy równomiernym nagrzaniu wpływ temperatury uwidacznia się tylko poprzez zmianę stałych materiałowych (zmniejszenie modułów pełzania). Z uwagi na duże trudności matematyczne związane z analizą izotropowej walcowej powłoki kolistej, narażonej na zginanie, udało się rozwiązać jedynie problem wyboczenia pełzającego dla trójwarstwowej powłoki walcowej w przypadku, gdy warstwy zewnętrzne poddane są działaniu obciążenia normalnego, warstwa wewnętrzna zaś pracuje na ścinanie. Jeżeli zastosować kubiczne prawo pełzania, to można wyprowadzić równanie, opisujące zmianę kształtu przekroju poprzecznego w czasie długiej walcowej powłoki kolistej, poddanej działaniu równomiernego zewnętrznego ciśnienia poprzecznego. W pracy [9.7] N. J. HOFF, W. E. JAHSMAN i W. NACHBAR przedstawili pełne rozwiązanie podobnego problemu otrzymując ponadto zależność między czasem krytycznym a amplitudą początkowych ugięć. Praca E. SUNDSTRÖMA [9.8] uwzględnia obok ciśnienia poprzecznego również i ściskanie osiowe, jednakże rozwiązanie otrzymano w formie uwikłanej. Model powłoki trójwarstwowej łącznie z prawem dwuosiowego pełzania został niedawno wykorzystany przez F. W. FRENCHA i S. A. PATELA [9.9] dla analizy osiowo-symetrycznego wyboczenia pełzającego walcowej powłoki kolistej, ściskanej osiowo. W wyniku badań doświadczalnych przeprowadzonych przez E. E. MATHAUSERA i A. BERKOWITSA [9.10] autorzy ci podali półempiryczną metodę analizy wyboczenia pełzającego walcowych powłok kolistych, narażonych na czyste zginanie. W pracy [9.11] przedstawiono rozwiązania pewnych problemów wyboczenia pełzającego powłok (oraz płyt) ściskanych osiowo. G. LIANIS [9.12] w oparciu o twierdzenie wariacyjne Sandersa rozwiązał zagadnienie wyboczenia pełzającego otwartych rur cienkościennych przy skręcaniu zakładając nieograniczony wzrost kąta skręcania. Analiza wyboczenia pełzającego długich walcowych powłok kolistych pod działaniem wysokiej temperatury i ciśnienia zewnętrznego była przedmiotem pracy [9.13]. Ogólne równanie wariacyjne dla stateczności przy pełzaniu powłok (i płyt) w oparciu o teorię nieliniową wyprowadził I. G. TIERIEGUŁOW [9.14]. W pracy [9.15] rozwiązano zagadnienie utraty stateczności małowyniosłej powłoki kulistej z materiału lepkosprężystego (ujęcie nieliniowe).

10. Stateczność dynamiczna powłok

Zagadnienie utraty stateczności powłok, poddanych działaniu obciążeń dynamicznych, wzbudziło zainteresowanie dopiero w ostatnich latach. Należy do niego sprawa stateczności powłok, poddanych działaniu obciążenia udarowego oraz problem stateczności drgań, wywołanych obciążeniem okresowo zmiennym.

W serii badań doświadczalnych opisanych w pracy [10.1] nieusztywnione powłoki aluminiowe poddano obciążeniom dynamicznym w procesie uderzenia w kierunku osiowym masą o dużej prędkości początkowej. Badania te wykazały, że charakter utraty stateczności jest tutaj nieco odmienny niż w przypadku obciążeń statycznych, mianowicie że powierzchnia środkowa powłoki po utracie stateczności posiada wprawdzie wybrzuszenia w kształcie rombowym (jak w przypadku stateczności statycznej), jednakże rozciągają się one równomiernie na całą powierzchnię powłoki, przy czym długości wybrzuszeń maleją wraz ze wzrostem prędkości uderzenia. Ponadto energia pochłonięta w przypadku wyboczenia dynamicznego jest większa niż w przypadku wyboczenia statycznego.

Pierwsze badania teoretyczne nad statecznością dynamiczną powłok zarówno walcowych jak i kulistych przeprowadził W. W. BOŁOTIN [10.2 i 10.9]. Zastosował on teorię klasyczną do określenia dynamicznych obciążeń krytycznych dla ściskanej osiowo powłoki walcowej i dla powłoki kulistej, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego okresowo zmiennego ciśnienia radialnego. Dopiero stosunkowo niedawno W. Ł. AGAMIROW i A. S. WOLMIR [10.3] rozszerzyli i uzupełnili te badania stosując teorię nieliniową. WOLMIR [10.4] rozwiązał ponadto, również w oparciu o teorię nieliniową, problem stateczności dynamicznej małowyniosłej łupiny walcowej poddanej działaniu ciśnienia osiowego.

Nowoczesne ujęcie niektórych zagadnień stateczności powłok sprężystych, poddanych działaniu obciążeń dynamicznych, w oparciu o teorię nieliniową przy zastosowaniu metody Bubnowa–Galerkina i maszyn matematycznych przedstawione zostało w pracy [10.5].

J. C. YAO [10.5] rozwiązał problem stateczności dynamicznej dla walcowej powłoki kolistej poddanej ciśnieniu poprzecznemu. Zagadnieniu stateczności dynamicznej walcowej powłoki kolistej znajdującej się pod działaniem obciążenia ruchomego (rozwiązanie oparte jest na teorii klasycznej) poświęcona jest praca [10.7]. Wreszcie W. W. BOŁOTIN [10.8] rozwiązał zagadnienie nieustalonego flatteru małowyniosłych powłok (i płyt) w strumieniu gazu. Monografia [10.10] omawia również literaturę zagadnienia. Niestety, do chwili obecnej brak jest dostatecznej liczby badań doświadczalnych, aby potwierdzić słuszność tej czy innej teorii przyjętej w wyżej cytowanych pracach.

11. Statystyczne ujęcie teorii stateczności powłok

Przed kilku laty w Związku Radzieckim powstał nowy kierunek w teorii stateczności powłok, związany z zastosowaniem metod statystycznych. Pionierem na tym polu był W. M. BOŁOTIN [11.1], który badał wpływ «wstępnych niedoskonałości» kształtu na stateczność powłok rzeczywistych. Idea przewodnia jego pracy jest następująca. Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej powłok określa się za pomocą niewielkiej liczby niezależnych parametrów, przy czym początkowe wartości tych parametrów przyjmuje się jako wielkości losowe. Zakładając, że znana jest postać funkcji rozkładu dla tych wielkości oraz zależność od nich górnego obciążenia krytycznego, można określić prawo rozkładu prawdopodobieństwa dla samego obciążenia krytycznego. BOŁOTIN rozpatrzył konkretny przykład stateczności łupiny walcowej ściskanej wzdłuż tworzących. Scharakteryzował on «wstępne ugięcie» łupiny jednym parametrem (ugięciem środka łupiny), po czym przyjąwszy dla tego parametru normalne prawo rozkładu znalazł funkcję rozkładu dla górnego ciśnienia krytycznego. Można również, w ogólniejszym przypadku, określić prawdopodobieństwo wystąpienia tzw. «stanu niebezpiecznego» łupiny, przy czym przez to ostatnie rozumiemy albo utratę stateczności łupin, albo wystąpienie maksymalnych ugięć bez utraty stateczności. Tym sposobem możliwe jest uwzględnienie nie tylko wstępnych niedoskonałości kształtu, lecz również i innych czynników, np. warunków brzegowych. I. I. WOROWICZ [11.2, 11.3], rozpatrzył inną stronę tego problemu przyjąwszy w charakterze wielkości przypadkowej obciążenie, któremu powłoka jako element konstrukcyjny poddana jest w okresie eksploatacji. I w tym przypadku można rozwiązać zagadnienie prawdopodobieństwa utraty stateczności powłoki. Cytowany badacz jest również autorem dwóch następnych prac, [11.4, 11.5], analizujących niektóre inne problemy nieliniowej teorii statystycznej wyboczenia powłok sprężystych. Wreszcie w 1962 r. ukazały się trzy prace W. M. GONCZARENKI, [11.6-11.8], które stanowią również poważny przyczynek do teorii statystycznego ujęcia problemów stateczności powłok sprężystych.

12. Prace polskie

Literatura polska z dziedziny stateczności powłok jest stosunkowo uboga. Przeważająca większość opublikowanych dotychczas prac oparta jest na teorii klasycznej. Oto najważniejsze pozycje, oparte na teorii liniowej. A. LISOWSKI [12.1] zbadał metodą różnic skończonych wyboczenie kopuł obrotowych pod działaniem ciężaru własnego i parcia poziomego. S. WIŚNIEWSKI [12.2] rozwiązał zagadnienie długiej, izotropowej walcowej powłoki kolistej poddanej działaniu ściskania osiowego i skręcania. W. NOWACKI [12.3] rozpatrzył problem stateczności walcowej łupiny kolistej o brzegach swobodnie podpartych i utwierdzonych, poddanej działaniu ściskania i ścinania. Ten sam autor wraz z Z. OLESIAKIEM [12.4] zbadał stateczność walcowej powłoki kolistej wzmocnionej żebrami.

Z. PARSZEWSKI [12.5, 12.6] rozwiązał ważne technicznie zagadnienie stateczności dla zamkniętej ortotropowej walcowej powłoki kolistej, o dużej i średniej długości, w przypadku skręcania. Z. NOWAK [12.7] określił wielkość górnego ciśnienia krytycznego dla powłoki walcowej o przekroju owalnym, zbliżonym do kołowego, ściskanej osiowo. M. ŻYCZKOWSKI [12.8] zastosował metodę uogólnionych szeregów potęgowych do określenia ilości półfal, odpowiadających minimum obciążenia przy promieniowym ściskaniu, a następnie określił minimalne ciśnienie i podał wzory na konieczną grubość powłoki w tym przypadku. J. LEYKO [12.9] rozwiązał metodą Galerkina problem stateczności ściskanej ortotropowej powłoki stożkowej. K. BORSUK [12.10] badał niesymetryczne postacie wyboczenia powłoki walcowej o zmiennej grubości.

Pierwszą pracą polską, traktującą o stateczności walcowych powłok kolistych w ujęciu geometrycznie nieliniowym, jest praca S. WIŚNIEWSKIEGO [12.11] dotycząca ściskanej powłoki stożkowej. Praca [12.12] podaje wyniki doświadczalnego sprawdzenia teorii. J. LEYKO w pracy [12.13] rozwiązał zagadnienie stateczności walcowej łupiny kolistej o brzegach swobodnie podpartych, poddanej działaniu ścinania i ciśnienia zewnętrznego. Autor przyjął następującą przybliżoną postać funkcji ugięcia przy utracie stateczności

$$w(x, y) = f_1 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + f_2 \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$

gdzie a, b oznaczają wymiary powłoki w kierunku tworzącej i obwodowym. Do rozwiązania nieliniowych równań stateczności zastosował on metodę Bubnowa-Galerkina. To samo zagadnienie, ale przy uwzględnieniu «ugięć wstępnych», rozwiązał, również w ujęciu nieliniowym, A. JARECKI [12.14].

Wyboczenie pełzające łupiny walcowej badał Z. BYCHAWSKI, [12.15]. Rozwiązał on w ujęciu liniowym i nieliniowym problem osiowo ściskanej powłoki walcowej przy założeniu, że przy utracie stateczności tworzy się tylko jedna półfala zarówno w kierunku osiowym, jak i obwodowym.

Podstawy teoretyczne i wyniki dużej serii badań modelowych nad statecznością powłok cienkościennych podał w pracach [12.16-12.18] A. LISOWSKI.

Literatura cytowana w tekście

1

[1.1] A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, New York 1944 (pierwsze wyd. 1892).

[1.2] L. H. DONNELL, *A new theory for the buckling of thin cylinder under axial compression and bending*, Trans. ASME **56** (1934), 795—806.

[1.3] А.С. Вольмир, *Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 по 1957 г.*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», т. IV, Москва 1958, 451—475.

[1.4] W. A. NASH, *Recent advances in the buckling of thin shells*, Appl. Mech. Rev. 3, 13 (1960).

[1.5] М.О. Алумиае, *Линийни задачи теории статичной стийкости и власных колывань тонких пружных оболонок (огляд)*, Прикл. Механика I, **4** (1958), 3—18.

[1.6] Л.М. Курщин, *Обзор по расчету трехслойных пластин и оболочек*, Сборник „Расчет пространственных конструкций", т. VII, Москва 1962, 163—192.

[1.7] G. GERARD, H. BECKER, *Handbook of structural stability*, part III, buckling of curved plates and shells, NASA TN 3783, 1957.

[1.8] G. GERARD, *Handbook of structural stability*, supplement to part III, Buckling of curved plates and shells, NASA TND 163, 1959.

[1.9] K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957 (tłum. z niem.).

[1.10] А.С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат., Москва 1956.

[1.11] Г.М. Муштари, К.З. Галимов, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигиздат, Казань 1957.

[1.12] О.Д. Ониашвили, *Динамические задачи теории оболочек*, Изд. АН СССР, Москва 1957.

[1.13] W. FLÜGGE, *Stresses in shells*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

2

[2.1] И.И. Ворович, *Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом*, Докл. АН СССР, I, **72** (1958).

[2.2] М.А. Колтунов, *Учет конечных перемещений в задаче об изгибе и устойчивости пластинок и пологих оболочек*, Вестн. Моск. Госуд. Унив., 5, 1952.

[2.3] F. I. N. NIORDSON, *On the linear theory of stability of thin elastic shells*, Bygnsstat. Medd. 1, **32** (1961), 46-54.

[2.4] В.В. Петров, *Дослиджсення напружсенного стану пластин и пологих оболонок при скинченных прогынах методом послидовных навантажсень*, Прикл. Механика, 4, **8** (1962), 352-358.

[2.5] В.В. Болотин, *Нелинейная теория упругости и устойчивости «в большом»*, Сборник «Расчеты на прочность», т. 3, Москва 1958, 310-354.

[2.6] И.И. Ворович, *О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек*, Прикл.Мат.Мех. 4, **20**, (1956), 449-474.

[2.7] П.А.Алумиае, *Основные энергетические соотношения при деформации тонкостенных упругих оболочек*, Сборник «Исследования по вопросам устойчивости и прочности», Киев 1956, 70-74.

3.1

[3.1] T. KÁRMÁN, H. S. TSIEN, *The buckling of thin cylindrical shells under axial compression*, J. Aero. Sci., 8, **8** (1941), 303-312.

[3.2] H. F. MICHIELSEN, *The behavior of thin cylindrical shells after buckling under axial compression*, J. Aero. Sci., 12, **15** (1948), 738-744.

[3.3] J. KEMPNER, *Postbuckling behavior of axially compressed circular cylindrical shells*, J. Aero. Sci., 5, **21** (1954), 329-335.

[3.4] L. KIRSTE, *Abwickelbare Verformung dünnwandiger Kreiszylinder*, Öster. Ing.-Archiv, 2-3, **8** (1954).

[3.5] L. H. DONNELL, C. C. WAN, *Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression*, J. Appl. Mech. 1, 1950.

[3.6] С.В. Александровский, *Об устойчивости чилиндрической оболочки при больших прогибах*, Сборник „Расчет пространственных конструкций", т. III, Москва 1955, 453-492 .

[3.7] Е.Д. Голицынская, *Устойчивость тонких замкнутых оболочек*, Труды Белорусск. Акад. **31** (1959), 75-82.

[3.8] W. THIELEMANN, H. J. DREYER, *Beitrag zur Frage der Beulung dünnwandiger axial gedrückter Kreiszylinder*, Deutsche Versuchsanstalt Luftfahrt., Ber. 17, 1956.

[3.9] H. WAGNER, *Die Stabilität der axial gedrückten Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke*, Oster. Ing.-Archiv 4, **13** (1960), 235-257.

3.2

[3.10] Ф.С. Исанбаева, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, 7 (1955), 51-58.

[3.11] W. A. NASH, *Effect of large deflections and initial imperfections on the buckling of cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 4, **22** (1955).

[3.12] L. H. DONNELL, *Effect of imperfections on buckling of thin cylinders under external pressure*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 569-575.

[3.13] J. KEMPNER, K. A. V. PANDALAI, S. A. PATEL, J. CROUZET-PASCAL, *Postbuckling behavior of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 4, **24** (1957), 253-264.

[3.14] E. WENK, R. C. SLANKARD, W. A. NASH, *Experimental analysis of the buckling of cylindrical shells subject to external hydrostatic pressure*, Proc. Soc. Exper. Stress Anal., 1, **12** (1954).

[3.15] В.А. Нагаев, *Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при внешнем поперечном давлении*, Машиностроение, 6, (1958), 46-53.

[3.16] W. A. NASH, *Buckling of thin cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Aero. Sci., 1, **19** (1954).

[3.17] В.Е. Минеев, *Экспериментальное исследование влияния начальных неправильностей на устойчивость цилиндрических оболочек при всестороннем сжатии*, Труды ВВИА им. Жуковского, 1958.

3.3

[3.18] T. Loo, *Effects of large deflections and imperfections on the elastic buckling of cylinders under torsion and axial compression*, Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME 1955, 345-357.

[3.19] Н.И. Кривошеев, *Влияние начальных неправильностей в форме срединной поверхности на устойчивость цилиндрической оболочки при кручении*, Изв. Казан. Фил. АН СССР, С. Физ.-Мат. и Техн. Наук, **10** (1956), 69-80.

[3.20] W. A. Nash, *Buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to torsion*, J. Appl. Mech., 1, **24** (1957).

[3.21] W. A. Nash, *An experimental analysis of the buckling of initially imperfect cylindrical shell subject to torsion*, Proc. Soc. Exper. Stress Anal., 2, **16** (1959), 55-68.

[3.22] Y. Yoshimura, J. Niisawa, *Lower buckling stress of circular cylindrical shells subjected to torsion*, J. Aero. Sci., 3, **24** (1957).

[3.23] H. Loo, H. Crate, E. B. Schwartz, *Buckling of thin-walled cylinders under axial compression and internal pressure*, NACA Rep. 1027.

[3.24] Y. C. Fung, E. E. Sechler, *Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure*, J. Aero. Sci., 24 (1957), 351-356.

[3.25] Л.Р. Исправников, *Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии и поперечном давлении*, Труды Харк.Выс.Авиац.Уч. 66, 1957.

[3.26] О.Н. Ленько, О.И. Теребушко, *Устойчивость гладких и подкрепленных круговых цилиндрических оболочек при совместном действии сжатия, поперечного давления и кручения*, Труды Рижского Выс. Авиац. Уч. 1958.

[3.27] О.И. Теребушко, *Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении, внешнем давлении и сжатии*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», т. V, Москва 1959, 502-522.

[3.28] В.М. Даревский, *Устойчивость цилиндрической оболочки при одновременном действии крутящих моментов и нормального давления*, Известия АН СССР, Отд.Техн.Наук, 1957/11.

[3.29] Р.И. Кшнякин, *Влияние осевой растягивающей силы на устойчивость цилиндрических оболочек при кручении и при внешнем нормальном давлении*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, Оборонгиз., 55-71.

[3.30] В.А. Марин, *Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и внутреннем давлении*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», т. V, Москва 1959, 475-484.

[3.31] В.М. Даревский, *Оценка устойчивости цилиндрических оболочек*, «средней длины», Тезисы докл. на совещании по теории упругости, Изд. АН СССР, 1954.

[3.32] П.Г. Бурдин, *Исследование устойчивости цилиндрических оболочек при совместном действии изгиба и внешнего давления*, Автореф. Канд. Дисс. 1955.

[3.33] В.М. Даревский, *Устойчивость консольной цилиндрической оболочки при изгибе поперечной силой с кручением и внутреннем давлением*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, Оборонгиз, 72-94 и Сборник «Расчет пространственных конструкций» т. V, Москва 1959, 431-449.

[3.34] В.М. Чебанов, *Исследование устойчивости тонкостенных оболочек при помощи моделей из бумаги*, Инжен.Сборник **22** (1955).

[3.35] Л.Р. Исправников, *Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии, кручении и поперечном давлении*, Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского, вып. 535, 1955.

[3.36] A. H. Cornelliussen, R. T. Shield, *Finite deformation of elastic membranes with application to the stability of an inflater and extended tube*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, **7** (1961).

4

[4.1] K. Friedrichs, *On the minimum buckling load for spherical shells*, Th. Kármán Anniv., V. 1, 1942.

[4.2] М.И. Бабичева, *Об устойчивости сферических оболочек*, Канд. дисс., МГУ, 1950.

[4.3] В.И. Феодосьев, *Устойчивость оболочек*, глава книги «*Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении*», под ред. С.В. Пономарева, Машгиз. 1952.

[4.4] В.И. Феодосьев, *Исследование устойчивости упругих систем «в большом»*, Труды конф. по расч. гибких пластин и оболочек, изд. ВВИА, им. Жуковского, 1952.

[4.5] Н.М. Муштари, Р.Г. Суркин, *О нелинейной теории устойчивости упругого равновесия сферической оболочки*, Прикл.Мат.Мех., 6, **14** (1950).

[4.6] Р.Г. Суркин, *К теории устойчивости и прочности сферических и эллипсоидальных днищ и мембран*, Канд. дисс. 1953.

[4.7] В.И. Феодосьев, *Об устойчивости сферической оболочки*, Прикл.Мат.Мех., I, **18** (1954), 35-42.

[4.8] Г.М. Муштари, *К теории устойчивости сферической оболочки под действием внешнего давления*, Прикл.Мат.Мех. 2, **19** (1955), 251-254.

[4.9] V. MASUJA, Y. YOSHIMURA, *The buckling of spherical shells*, Proc. 2-nd Jap. Nat. Congr Appl. Mech., Tokyo 1953.

[4.10] A. KAPLAN, Y. C. FUNG, *A non-linear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells*, NACA TN 3212, 1954.

[4.11] R. E. ARCHER, *Stability limits for a clamped spherical shell segment under uniform pressure*, Doct. diss., AMR, **11** (1958), rev. 2539.

[4.12] E. L. REISS, H. J. GREENBERG, H. B. KELLER, *Non-linear deflections of shallow spherical shells*, J. Aero. Sci., **24** (1957).

[4.13] E. L. REISS, *Axially symmetric buckling of shallow spherical shells under external pressure*, J. Appl. Mech., 25 (1958), 556-560.

[4.14] Е.И. Григолюк, *Об асимметричном прощелкивании оболочек вращения*, Symp. Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft 1959.

[4.15] L. H. DONNELL, *Shell theory*, Proc. 4-th Midwest Conf. on Solid Mech., Univ. of Texas, 1959.

[4.16] W. Z. CHIEN, H. C. HU, *On the snapping of thin spherical cap*, 9-th Congr. Int. Mech. Appl., Bruxelles, vol. 6, 1956, 309-320.

[4.17] D. G. ASHWELL, *The behaviour of a thin shallow spherical cap with a central load*, Techn. Inf., Ministry of Supply, London, 1958/13.

[4.18] F. J. MURRAY, E. W. WRIGHT, *The buckling of thin spherical shells*, J. Aerosp. Sci., 3, **28** (1961), 223-236.

[4.19] Р.Г. Суркин, *Экспериментальное изучение устойчивости сферических оболочек*, Доклад на научной Сессии Казанского Фил. АН. СССР, 1957.

[4.20] Г.А. Геньев, Н.С. Чаусов, *Экспериментальное исследование устойчивости металлических оболочек*, Сборник «Исслед. по вопросам строит. механики», Москва, Госстройиздат, 1956.

[4.21] K. KLÖPPEL, O. JUNGBLUTH, *Beitrag zum Durchschlagproblem dünnwandiger Kugelschalen*, Stahlbau 6, **22** (1953).

[4.22] GUO ZHONG-HENG, *Problem of spherical membrane in the theory of large deformation*, Arch. Mech. Stos., 6, **14** (1962), 921-936.

5

[5.1] A. PFLÜGER, *Stabilität dünner Kegelschalen*, Ing.-Archiv, 3, 8 (1937), 151-172.

[5.2] Г.М. Муштари, А.В. Саченков, *Устойчивость цилиндрических и конических оболочек кругового поперечного сечения при одновременном действии осевого сжатия и внешнего давления*, Прикл.Мат. и Мех., 6, **18** (1954), 667-674.

[5.3] C. E. TAYLOR, *Elastic stability of conical shells loaded by uniform external pressure*, Proc. 3-rd Midw. Conf. Solid Mech., Ann. Arbor 1957, 86-89.

[5.4] N. J. HOFF, J. SINGER, *Buckling of conical shells under hydrostatic pressure*, Symp. on Theory of Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft 1959.

[5.5] P. SEIDE, *Axisymmetrical buckling of circular cones under axial compression*, J. Appl. Mech. 23 (1956), 625-628.

[5.6] А.В. Саченков, *Приближенное определение нижней границы критической нагрузки при продольном сжатии тонкой конической оболочки*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, 7 (1955).

[5.7] WAN DUO, *O utracie stateczności przy skończonych ugięciach powłoki stożkowej pod działaniem równomiernego ciśnienia normalnego* (w jęz. chińskim), Harbin gongye daxue xuebao, 3/1958, 135-143.

[5.8] Р.К. Ряямет, *Критическая нагрузка конической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного внешнего давления*, Труды Таллинского Полит. Института, **65** (1955).

[5.9] Р.К. Ряямет, *Равновесие тонкостенных упругих конических оболочек в послекритической стадии*, Труды Таллинского Полит. Института, **82** (1956).

[5.10] И.И. Трапезин, *Устойчивость тонкостенной конической оболочки, замкнутой в вершине, нагруженной боковым гидростатическим давлением*, Сборник «Расчеты на прочность», 5 (1960), 249-258.

[5.11] И.И. Трапезин, *Экспериментальное определение величин критических давлений для конических оболочек*, Сборник «Расчеты на прочность», 6 (1960), 217-230.

[5.12] Л.М. Бунич, О.М. Палий, И.А. Писковитина, *Устойчивость усеченной конической оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления*, Инжен. Сборник 23 (1956), 89-93.

[5.13] И.И. Трапезин, *Об устойчивости конической оболочки, находящейся под гидростатическим давлением*, Сборник «Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания», Москва 1955, 231-236.

[5.14] А.В. Саченков, *Об устойчивости конических оболочек кругового сечения под действием равномерного внешнего давления*, Изв. Казанского Филиала АН СССР, Сер. Физ.-Мат. и Техн. Наук. 12 (1958), 107-125.

[5.15] J. SINGER, *Buckling of circular conical shells under axisymmetric external pressure*, Tech. Res. Develop Found., Haifa 1960.

[5.16] J. SINGER, *The effect of axial constraint on the instability of thin conical shells under external pressure*, Tech. Res. Develop. Found., Haifa 1961.

[5.17] Н.А. Алумиае, *Асимптотическое интегрирование уравнений статической устойчивости конической оболочки вращения*, Прикл. Мат.-Мех. I, 21 (1957), 83-88.

[5.18] W. D. JORDAN, *Buckling of thin conical shells under uniform external pressure*, Techn. Rep. Univ. Alabama 1955.

6

[6.1] V. L. SALERNO, B. LEVINE, *Buckling of circular cylindrical shells with evenly spaced equal strength circular ring frames*, I and II, PIBAL Rep. 167 and 169, 1950.

[6.2] V. L. SALERNO, B. LEVINE, J. G. PULOS, *Charts for the determination of the upper and lower limit of hydrostatic buckling pressures for reinforced circular cylindrical shells*, PIBAL Rep. 177, 1950.

[6.3] V. L. SALERNO, B. LEVINE, *The determination of the hydrostatic buckling pressures for circular cylindrical shells reinforced with rings*, PIBAL Rep. 182, 1951.

[6.4] Г.А. Алфутов, *Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечными ребрами жесткости и подвергающейся равномерному внешнему давлению*, Инжен. Сборник 23 (1956), 36-46.

[6.5] S. KENDRICK, *The buckling under external pressure of circular cylindrical shells with evenly spaced equal strength circular ring frames*, part III, Naval Constr. Res. Establish., Great Britain, Rep. 244, 1953.

[6.6] W. A. NASH, *Buckling of multiple — bay ring-reinforced cylindrical shells subject to hydrostatic pressure*, J. Appl. Mech. 4, **20** (1953), 469-474.

[6.7] К.Д. Туркин. *Устойчивость подкрепленной круговой цилиндрической оболочки при сжатии и чистом изгибе*, Сборник „Расчет пространственных конструкций" 4 (1958), 477-498.

[6.8] S. R. BODNER, *General instability of a ringstiffened circular cylindrical shell under hydrostatic pressure*, J. Appl. Mech., 2, **24** [1957].

[6.9] И.Я. Амиро, *Дослiдження стiйкостi ребристоï цилiндричноï оболочки при поздовзному стыску*, Прикл. Мех. 3, 6 (1960), 272-281.

[6.10] J. C. MCCOY, *An experimental investigation of the general instability of ring-stiffened, unpressurized, thin-walled cylinders under axial compression*, Doct. Diss., Calif. Inst. Technol., 1958.

[6.11] P. SEIDE, *Compressive buckling of longitudinally stiffened circular cylinders*, Ramo-Walldridge Corp. Rep. No AM 6-11, 1956.

[6.12] H. T. PONSFORD, *The effects of stiffeners on the buckling of cylinders with moderate wall thickness*, Doct. Diss., Calif. Inst. Technol., 1953.

[6.13] L. A. HARRIS, H. S. SUER, W. T. SKENE, *Model investigations of unstiffened and stiffened circular shells*, Exper. Mech., 7, **1** (1961), 1-9.

[6.14] K. KLÖPPEL, O. JUNGBLUTH, *Contribution to the problem of buckling in thin-walled spherical shells*, Stahlbau, 22 (1953), 121-130.

[6.15] H. EBNER, *Näherungsweise Bestimmung der Tragfähigkeit radial Versteifter Kugelschalen unter Druckbelastung*, Symp. Theory of Thin Elastic Shells, IUTAM, Delft 1959.

[6.16] О.И. Теребушко, *Расчет несущей способности круговой цилиндрической панели подкрепленной ребрами*, Сборник «Расчет пространств. конструкций», 4 (1958), 531-554.

[6.17] О.И. Теребушко, *К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических подкрепленных оболочек*, Сборник «Расчет пространств. конструкций», 7 (1962), 119-134.

[6.18] А.В. Кордашенко, *Об устойчивости оболочек усиленных ребрами жесткости*, Изв. АН СССР, Механика и Машин., 1962/1, 115-120.

[6.19] С.Н. Кукуджанов, *Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при внешнем поперечном давлении с осевым растяжением и при кручении с осевым растяжением*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, 109-117.

[6.20] В.М. Даревский, С.Н. Кукуджанов, *Устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки при кручении и нормальном давлении*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, 95-108.

[6.21] В.В. Сердюков, *Устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек при некоторых нагрузках*, Сборник «Прочность цилиндрических оболочек», Москва 1959, 118-130.

[6.22] Е.И. Григолюк, *Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», 3, Москва, 1955, 375-420.

[6.23] О.Н. Ленько, *Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек*, Сборник «Расчет пространственных конструкций», 4, Москва 1958, 499-524.

[6.24] О.Н. Ленько, *Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми силами и внешними давлением*, Сборник «Расчет пространственных конструкций» 5, Москва 1959, 523-536.

7

[7.1] Э.И. Григолюк, *Прочность и устойчивость цилиндрических биметаллических оболочек*, Инжен. Сборник, 16 (1953), 119-148.

[7.2] Э.И. Григолюк, *О потере устойчивости при больших прогибах замкнутой слоистой конической оболочки под действием равномерного нормального давления*, Инжен. Сборник, 22 (1955), 111-119.

[7.3] P. P. RADKOWSKI, *Elastic stability of thin single-and multilayer conical and cylindrical shells subjected to external pressure*, AVCO Rep. 1957.

[7.4] P. P. RADKOWSKI, *Buckling of thin single- and multilayer conical and cylindrical shells with rotationally symmetric stresses*, AVCO Rep. 1957.

[7.5] F. K. Teichman, Chi-Teh Wang, G. Gerard, *Buckling of sandwich cylinder under axial compression*, J. Aero. Sci., 18, [1951] 398-406.

[7.6] G. Gerard, *Torsional instability of a long sandwich cylinder*, Proc. First Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, 1952, 391–394.

[7.7] Chi-teh Wang, D. P. Sullivan, *Buckling of sandwich cylinders under bending and combined bending and axial compression*, J. Aero. Sci., 19, (1952), 468-471.

[7.8] F. K. Teichman, Chi-Teh Wang, *Finite deflections of curved sandwich plates and sandwich cylinders*, Sherman M. Fairchild Fund Paper NEF-4, Institute of Aero. Sci., January 1951.

[7.9] Chi-Teh Wang, G. V. Rao, *A study of an analogous model giving the non–linear characteristics in the buckling of sandwich cylinders*, J. Aero. Sci., 19, (1952), 93-94.

[7.10] Chi-Teh Wang, R. J. Vaccaro, D. F. Santo, *Buckling of sandwich cylinders under combined compression, torsion and bending loads*, J. Appl. Mech., 3, **22** (1955).

[7.11] L. H. Donnell, *Stability of thin-walled tubes under torsion*, NACA Tech. Rep. 479, 1934.

[7.12] H. W. March, E. W. Kuenzi, *Buckling of cylinders of sandwich construction in axial compression*, For. Prod. Lab. Bull. 1830, 1952.

[7.13] H. W. March, E. W. Kuenzi, *Buckling of sandwich cylinders in torsion*, For. Prod. Lab. Bull. 1840, 1953.

[7.14] M. E. Raville, *Buckling of sandwich cylinders of finite length under uniform external lateral pressure*, For. Prod. Lab. Bull. 1844-B, 1955.

[7.15] S. Y. Lu, W. A. Nash, *Buckling of thin cylindrical shells stiffened by a soft elastic core*, Proc. Coll. «Simplified Calc. Meth. Shell Structures», Amsterdam 1962, 475-481.

[7.16] Э. И. Григолюк, *К расчету на устойчивость биметаллических цилиндрических оболочек*, Инжен. Сборник, **23** (1956), 28-35.

[7.17] G. Gerard, *Buckling of a sandwich cylinder under uniform axial compressive load*, J. Appl. Mech., 4, **18** (1951).

[7.18] M. Stein, J. Mayers, *Compressive buckling of simply supported curved plates and cylinders of sandwich construction*, NACA Techn. Note 2601, 1952.

[7.19] A. C. Eringen, *New numerical results of the theory of buckling of sandwich cylinders*, J. Appl. Mech., 3, **23** (1956), 476.

[7.20] P. P. Bijlaard, *Buckling of sandwich cylinders under combined compression, torsion and bending loads*, J. Appl. Mech., 1, **23**, (1956), 157-158.

[7.21] Л.М. Куршин, *Об устойчивости трехслойной пологой цилиндрической оболочки при сжатии*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 1958/6.

[7.22] Т.Н. Васицына, *К вопросу о конечных прогибах трехслойных оболочек*, Изв. АН СССР, Механ. и Машин., 1961/5, 135-141.

[7.23] Т.Н. Васицына, *Устойчивость трехслойной цилиндрической панели с легким заполнителем при продольном сжатии*, Изв. АН СССР, Механ. и Машин., 1962/4, 137-139.

[7.24] C.H. Кан, *Стійкість и вільні коливання кругових тришарових циліндричних оболонок*, Прикл. Мех. 2, **8** (1962), 120-132.

8

[8.1] Э.И. Григолюк, *О выпучивании тонких оболочек за пределом упругости*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 10, 1957, 3-11.

[8.2] J. Geckeler, *Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen in Schalen und Blechen*, ZAMM, 8 (1928), 341-352.

[8.3] W. Kaufmann, *Plastisches Knicken dünnwandiger Hohlzylindern infolge axialer Belastung*, Ing.-Archiv, 5, **6** (1935), 334-337.

[8.4] W. Kaufmann, *Bemerkungen zur Stabilität dünnwandiger kreiszylindrischer Schalen oberhalb der Proportionalitätsgrenze*, Ing.-Archiv, 6, **6** (1935), 419-430.

[8.5] А.А. Ильюшин, *Устойчивость пластин и оболочек за пределами упругости*, Прикл. Мат. Мех., 5, **8** (1944).

[8.6] P.P. BIJLAARD, *On the plastic stability of thin plates and shells*, Proc. Nederl. Akad. Wet., 7, **50** (1947), 765-775.

[8.7] С.И. Григолюк, *Чистопластическая потеря устойчивости тонких оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 6, **21** (1957), 846-849.

[8.8] Э.И. Григолюк, *Пластическое выпучивание оболочек вращения*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук 1958/2, 130-132.

[8.9] Э.И. Григолюк, *Об учете сжимаемости материала при определении нижних критических нагрузок*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук 1958/5, 104-105.

[8.10] G. GERARD, *Plastic stability theory of thin shells*, J. Aero. Sci., 4, **24** (1957), 269-274.

[8.11] G. GERARD, *Plastic stability theory of thin shells under external pressure*, Actes IX Congr. Mec. Appl., v. 6, Bruxelles 1957, 225-234.

[8.12] М.Ф. Ершов, *Рвиновага гнучных пружно-пластычных оболонок и пластын*, Прикл. Мех. 5, **8** (1962,, 489-499.

[8.13] H. NEUBER, G. LANDGRAF, *Plastische Knickung der Kreiszylinderschale*, Bauingenieur, 2, **34** (1959), 44-48.

[8.14] A. PUGSLEY, M. MACAULEY, *The large-scale crumpling of thin cylindrical columns*, Q. J. Mech. Appl. Math., 1, **13** (1960), 1-9.

[8.15] В.Г. Зубчанинов, *Осесимметричная форма потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Изв. АН СССР, Мех. и Машин., 1961/5, 131-132

[8.16] L. H. N. LEE, *Inelastic buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to axial compression*, J. Aerosp. Sci., 1, 29 (1962), 87-95.

[8.17] Н.С. Ганиев, *Определение критической нагрузки цилиндрической оболочки за пределом упругости при осевом сжатии и внешнем нормальном давлении*, Изв. Казанского Фил. АН СССР, Серия Физ.-Мат. и Техн. Н. 1955/7, 59-75.

[8.18] Н.С. Ганиев, *Определение верхней границы критического всестороннего давления короткой цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Труды Казанского Хим.-Техн. Инст. 1955, вып. 19-20, 317-324.

[8.19] Э.И. Григолюк, *О смятии цилиндрической трубы за пределом упругости*, Изв. Сибирского Отд. АН СССР, 1960/8, 24-28.

[8.20] M. E. LUNCHICK, *Plastic axisymmetric buckling of ringstiffened cylindrical shells fabricated from strain-hardening materials and subjected to external hydrostatic pressure*, David W. Taylor Mod. Basin Rep. 1393, 1961.

[8.21] L. H. LEE, C. S. ADES, *Plastic torsional buckling strength of cylinders including the effects of imperfections*, J. Aero. Sc., 4, **24** (1957), 241-248.

[8.22] G. GERARD, *Compressive and torsional buckling of thin-walled cylinders in yield region*, NACA TN 3726, 1956.

[8.23] S. RADHAKRISHNAN, *Plastic buckling of circular cylinders*, Aero. Sci., 9, **23** (1956), 892-894.

[8.24] S. RADHAKRISHNAN, *Plastic buckling of cylindrical shells*, Aircraft Engineering, 31 (1959), 365-372.

[8.25] Э.И. Григолюк, *Касательно-модульная нагрузка круговых цилиндрических оболочек при комбинированной нагрузке*, Вест. Моск. Унив., Серия Мат.-Мех. I, (1958), 53-54.

[8.26] А.В. Саченков, *Об устойчивости оболочек за пределом упругости*, Изв. Казанск. Филиала АН СССР, Серия, Физ.-Мат. и Техн., 10 (1956), 81-100.

[8.27] E. I. GRIGOLUK, *Buckling of sandwich constructions beyond the elastic limit*, J. Mech. Phys. Solids, 4, **6** (1958), 253-266.

[8.28] Э.И. Григолюк, *Об устойчивости трехслойных оболочек и пластин за пределом упругости*, Изв. АН СССР, ОТН, 6, 1958, 68-72.

[8.29] Э.И. Григолюк, *Устойчивость упруго-пластических неоднородных оболочек*, Докл. АН СССР, 4, **119** (1958), 663-666.

[8.30] Н.С. Ганиев, *Устойчивость биметаллической цилиндрической оболочки под дейсвием равномерного внешнего давления за пределом упругости*, Труды Казанск. Хим.-Техн. Инст., вып. 22, 1957.

[8.31] Л.М. Куршин, *Устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Сборник «Вопросы расчета элементов авиационных конструкций», 2, Оборонгиз, 1959.

[8.32] В.И. Королев, И.Г. Смирнов, Р.П. Стомма, *Исследование устойчивости биметаллических цилиндрических оболочек при осевом сжатии за пределами упругости*, Инжен. Журнал 1, **2** (1962), 98-110.

9

[9.1] S. Y. LU, *Thermal stresses and thermal buckling of cylindrical shells*, Doct. Diss., Carnegie Inst. Techn., 1959.

[9.2] D. ABIR, S. V. NARDO, *Thermal buckling of circular cylindrical shells under circumferential gradients*, J. Aerosp. Sci., **26** (1959), 803-808.

[9.3] D. ABIR i inni. *Thermal buckling of circular cylindrical and conical thin-walled shells*, WADC Tech. Rep., 1958, 58-104.

[9.4] В.В. Болотин, *Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа*, Сборник «Расчеты на прочность» 6 (1960), 190-216.

[9.5] С.Н. Кан, *Термоупругость и устойчивость трехслойной круговой цилиндрической оболочки*, Сборник «Расчет простр. констр.» 7 (1962), 73-100.

[9.6] J. SINGER, *Buckling of thin circular conical shells subjected to axisymmetrical temperature distributions*, Bull. Res. Council Israel 9C, 1/2, 1961, 49-50.

[9.7] N. J. HOFF, W. E. JAHSMAN, W. NACHBAR, *A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell under uniform external pressure*, J. Aerosp. Sci., **26**, 1959, 663-669.

[9.8] E. SUNDSTRÖM, *Creep buckling of cylindrical shells*, Trans. Roy. Inst. Technol. 115, Stockholm 1957.

[9.9 F. W. FRENCH, S. A. PATEL, *Creep buckling of cylindrical shells subjected to uniform axial compression*, PIBAL Rep. 489, Brooklyn 1959.

[9.10] E. E. MATHAUSER, A. BERKOVITS, *Determination of static strength and creep buckling of unstiffened circular cylinders subjected to bending and elevated temperatures*, NASA Memo. 6-14-59L, 1959.

[9.11] А.П. Кузнецов, Л.М. Куршин, *Решение некоторых задач устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести по теории упрочнения*, Журн. Прикл. Мех. и Техн. Физики 1960/4, 84-89.

[9.12] G. LIANIS, *Torsional creep buckling of thin-walled open tubes with a cross-section having an axis of symmetry*, J. Appl. Mech., **1**, **29** (1962), 99-107.

[9.13] T. WAH, R. K. GREGORY, *Creep collapse of long cylindrical shells under high temperatures and external pressure*, J. Aerosp. Sci., 3, **28** (1961), 177-188.

[9.14] И.Г. Терегулов, *К вариационным методам решения задач установившейся ползучести пластин и оболочек в случае конечных перемещений*, Прикл. Мат. Мех. 3, **26** (1962), 735-739.

[9.15] E. TUNGL, *Durchschlagen einer flachen Kugelschale aus viskoelastischem Material*, Öster Ing.-Archiv 3, **16** (1962), 286-298.

10

[10.1] A. F. SCHMITT, *Dynamic buckling testes of aluminium shells*, Aero. Engng. Rev., 9, **15** (1956), 54-58.

[10.2] В.В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Гостехиздат, Москва 1956.

[10.3] В.Л. Агамиров, А.С. Вольмир, *Поведение цилиндрических оболочек при динамическом приложении всестороннего давления или осевого сжатия*, Известия АН СССР, Мех. и Машин., 3, 1959, 78-83.

[10.4] А.С. Вольмир, *Об устойчивости цилиндрических оболочек при динамическом нагружении*, Докл, АН СССР, 5, **123** (1958), 806.

[10.5] J. C. YAO, *Stability of a cylinder under dynamic radial pressure*, ARS J., 12, **31** (1961), 1705-1708.

[10.6] В.В. Болотин, Г.А. Бойченко, *Исследование прощелкивания тонких упругих оболочек под действием динамических нагрузок*, Сборник «Расчеты на прочность» **5** (1960), 259-272.

[10.7] В.Л. Присекин, *Устойчивость цилиндрической оболочки под действием движущейся нагрузки*, Изв. АН СССР, Мех. и Машин. 1961/5, 133-134.

[10.8] В.В. Болотин, *Нестационарный флаттер пластин и пологих оболочек в потоке газа*, Изв. АН СССР, Механика и Маш. 1962/3, 106-113.

[10.9] В.В. Болотин, *Устойчивость тонкостенной сферической оболочки при действии периодического давления*, Сборник «Расчеты на прочность» **2** (1958), 284-289.

[10.10] В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Г.И.Ф. М.Л., Москва 1961.

11

[11.1] В.В. Болотин, *Статистические методы в нелинейной теории оболочек*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 1958/3.

[11.2] И.И. Ворович, *О статическом методе в задачах устойчивости оболочек; оценка точности приближенных решений нелинейной теории оболочек прямыми методами*, Доклады на конф. по теории оболочек, Тарту 1957.

[11.3] И.И. Ворович, *О существовании решений в нелинейной теории оболочек*, Докл. АН СССР, 2, **117** (1957).

[11.4] И.И. Ворович, *Статистический метод в теории устойчивости оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 5, **23** (1959), 885-892.

[11.5] И.И. Ворович, *Некоторые асимптотические соотношения в статистической теории устойчивости оболочек*, Прикл. Мат. Мех. 4, **26** (1962), 735-739.

[11.6] В.М. Гончаренко, *К определению вероятности потери устойчивости оболочкой*, Изв. АН СССР, Мех. и Маш. 1962/1, 159-160.

[11.7] В.М. Гончаренко, *Исследование вероятности хлопка удлинненной цилиндрической панели под действием случайного давления*, Прикл. Мат. Мех. 4, 26 (1962), 740-744.

[11.8] В.М. Гончаренко, *Применение марковских процессов в статисческой теории устойчивости оболочек*, Украин. Мат. Журнал, 2, **14** (1962).

12

[12.1] A. LISOWSKI, *Wyboczenie kopul obrotowych*, Arch. Mech. Stos., **4** (1952), 1-22

[12.2] S. WIŚNIEWSKI, *Utrata stateczności powloki cylindtycznej, poddanej jednocześnie skręcaniu i ściskaniu*, Arch. Bud. Maszyn, 4, **3** (1956), 437-469.

[12.3] W. NOWACKI, *Z zagadnień stateczności powloki walcowej*, Arch Mech. Stos., 4, **8** (1956), 705-724.

[12.4] W. NOWACKI, Z. OLESIAK, *Stateczność powloki walcowej wzmocnionej żebrami*, Rozpr. Inżyn., 1, **4** (1956), 5-22.

[12.5] Z. PARSZEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powloki ortotropowej o dużej dlugości*, Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej, Mechanika 2 (1954), 3-28.

[12.6] Z. PARSZEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powloki ortotropowej o skończonej dlugości*, Arch. Mech. Stos., 3, **7** (1955), 375-402.

[12.7] Z. NOWAK, *Wplyw owalizacji przekroju poprzecznego powloki walcowej na wielkość górnego ciśnienia krytycznego*, Zesz. Nauk. Pol. Krakowskiej, Mechanika, Kraków 1962.

[12.8] M. ŻYCZKOWSKI, *Obliczanie stateczności powłok walcowych metodą uogólnionych szeregów potęgowych* (w druku).

[12.9] J. LEYKO, *Stateczność ortotropowej powłoki o postaci wycinka stożkowego, ściskanej wzdłuż tworzących*, Arch. Bud. Maszyn, 4, **8** (1961), 447-460.

[12.10] K. BORSUK, *Non-symmetric buckling of circular cylindrical shells with variable thickness*, Proc. Coll. «Simplified Calc. Methods of Shell Structures», North-Holland, Amsterdam 1962, 469-474.

[12.11] S. WIŚNIEWSKI, *Nieliniowe zagadnienie dotyczące ugięć powłoki o postaci stożka ściętego, ściskanej siłami równomiernie rozłożonymi na brzegach*, Arch. Bud. Maszyn, 4, **6** (1959).

[12.12] S. WIŚNIEWSKI, *Badania dużych ugięć powłoki o postaci stożka ściętego, ściskanej siłami równomiernie rozłożonymi na brzegach*, Arch. Bud. Maszyn, 1, **8** (1961), 73-79.

[12.13] J. LEYKO, *Nieliniowe zagadnienie równowagi powłoki o postaci wycinka walcowego, poddanej ścinaniu i obciążeniu normalnemu do jej powierzchni*, Arch. Bud. Maszyn, 2, **7** (1960), 199-211.

[12.14] A. JARECKI, *Powłoka walcowa, wykazująca odstępstwa od idealnego kształtu, poddana ścinaniu i obciążeniu normalnemu*, Arch. Bud. Maszyn, 1, **9** (1962), 113-122.

[12.15] Z. BYCHAWSKI, *Investigation of creep buckling of a cylindrical sheet panel in the range of small and large deflections*, Proc. World Conf. Shell Structures, S. Francisco 1962.

[12.16] A. LISOWSKI, *Określenie postaci wyboczenia powłok cienkościennych*, Inżyn. Budown., 1, **13** (1956), 22-29.

[12.17] A. LISOWSKI, *Wyboczenie kopuł kulistych w świetle badań modelowych*, Rozpr. Inżyn., 1, **5** (1957), 97-116.

Резюме

ОБЗОР НОВЕЙШИХ РАБОТ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

В работе проведена систематика и дано обсуждение более 200 публикаций из различных областей устойчивости оболочек. Особое внимание уделено анализу устойчивости оболочек в нелинейной постановке и в п. 2 приведены соответствующие основные уравнения.

В остальных пунктах работы рассмотрены следующие вопросы: (3) — статическая устойчивость цилиндрических оболочек в упругой области, (4) — устойчивость сферических оболочек, (5) — устойчивость конических оболочек, (6) — устойчивость усиленных и анизотропных оболочек, (7) — устойчивость двух- и трехслойных оболочек, (8) — устойчивость оболочек в упругопластической области, (9) — потеря устойчивости от изменения температуры и устойчивость с учетом ползучести, (10) — динамическая устойчивость оболочек, (11) — статистический метод в теории устойчивости оболочек.

В последнем пункте (12) дается краткий обзор польских работ по устойчивости оболочек.

Summary

RECENT ACHIEVEMENTS IN THE FIELD OF STABILITY OF THIN-WALLED SHELLS

More than 200 publications on various problems of shell stability are discussed an systematized, Particular attention is paid to the non-linear approach to the shell stability, and the corresponding fundamental equations are given in Sec. 2.

The following problems are discussed in the subsequent sections of the paper: (3) — statical stability of cylindrical shells; (4) — stability of spherical shells; (5) — stability of conical shells;

(6) — stability of reinforced and anisotropic shells; (7) — stability of layered shells; (8) — stability of shells in plastic domain; (9) — thermal stability and creep buckling; (10) — dynamical stability of shells; (11) — statistical approach to the theory of stability of shells.

Sec. (12) contains a short review of Polish papers dealing with the problems of stability of shells.

KATEDRA MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1963 r.