MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 1 (1963)

ZAGADNIENIA POWŁOK NIESPRĘŻYSTYCH[1]

ANTONI SAWCZUK, WACŁAW OLSZAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Wobec rozszerzającego się zakresu zastosowań konstrukcji łupinowych we współczesnej technice klasyczna teoria powłok, postulująca fizykalną liniowość i niezależność mechanicznych własności materiałów od czasu, przestaje być wystarczająca dla celów racjonalnego projektowania tych konstrukcji. Z tego powodu obserwuje się obecnie intensywny rozwój badań teoretycznych i doświadczalnych, dotyczących problemów niesprężystego zachowywania się powłok.

Aby matematycznie przewidzieć niesprężyste zachowanie się konstrukcji, wymagana jest znajomość *równania stanu* (związku fizycznego) materiału, z którego konstrukcja jest wykonana. To równanie stanu powinno być przedstawione w takiej postaci, która będąc *fizykalnie poprawna* jest równocześnie *matematycznie łatwa do operowania.* Fizykalna poprawność związków podstawowych dla materiału polega na takim uogólnieniu doświadczalnych zjawisk niesprężystych (jak np. pełzanie, relaksacja czy plastyczne płynięcie), które łączy rzeczywiście wielkości dynamiczne z niezmienniczymi wielkościami kinematycznymi w sposób odzwierciedlający zjawiska rzeczywiste.

Procesom odkształceń niesprężystych towarzyszy rozpraszanie energii. Przyczyna tej dysypacji energii mechanicznej może stanowić podstawę do pewnej użytecznej klasyfikacji ośrodków niesprężystych na ośrodki *sprężysto-lepkie* i *sprężysto-plastyczne.* W przypadku lepko-sprężystości rozpraszanie energii następuje wskutek lepkiego płynięcia, podczas gdy dysypacja w ośrodkach plastycznych może być wymodelowana przez suche tarcie. Każda z tych grup materiałów wymaga więc odmiennych metod analizy.

Teoria powłok dla scharakteryzowania stanu naprężenia i odkształcenia posługuje się siłami wewnętrznymi i odkształceniami powierzchni środkowej. Wskutek tego również związki fizyczne dla powłok niesprężystych wymagają przedstawienia ich w postaci zależności między siłami wewnętrznymi i odkształceniami powierzchni środkowej. Spełnienie tego żądania związane jest z odpowiednią transformacją równań fizycznych materiału do własnej przestrzeni powłoki. W niniejszej pracy przedstawione zostaną takie transformacje.

[1] Tekst referatu generalnego «Inelastic shell problems» na Światowej Konferencji Konstrukcji Powłokowych, San Francisco, 1-5 października 1962 r., opublikowanego w skróconej wersji w «Proceedings» tej konferencji.

Celem pracy jest dokonanie przeglądu aktualnego stanu badań z zakresu *powłok niesprężystych.* Z uwagi na wielorakość problemów ukrytych pod nazwą *powłoki niesprężyste*, przedstawienie przeglądu wyczerpującego zagadnienie nie było uważane za właściwy cel. Zdecydowano się skoncentrować uwagę na zagadnieniach *formułowania podstawowych związków fizycznych* oraz na scharakteryzowaniu *metod analizy* głównych typów powłok niesprężystych z podaniem informacji o ważniejszych rozwiązaniach problemów szczegółowych. Takie podejście pozwala zwrócić uwagę na analogie i różnice w stosunku do klasycznej (liniowo-sprężystej) teorii powłok.

Obecny przegląd nie obejmuje takich zagadnień, jak nieliniowość geometryczna, wyboczenie sprężysto-plastyczne i procesy technologiczne kształtowania powłok. Nie są również uwzględnione zagadnienia drgań i rozprzestrzeniania się fal w powłokach niesprężystych. Rozważania prowadzone są w założeniu, że odkształcenia są małe, a więc wszystkie związki mogą być zapisane w układzie odniesienia dotyczącego nieodkształcanej powłoki. Jeśli chodzi o równania fizyczne, to praca ogranicza się do czysto fenomenologicznego opisu bez wchodzenia w przyczyny zjawisk niesprężystych i termodynamikę procesów nieodwracalnych odkształceń.

2. Związki fizyczne

1.2. Zachowywanie się materiału w procesie jego obciążania zależy od mechanicznych własności tego ośrodka. Dla opisania jakiegokolwiek procesu odkształcenia niezbędna jest znajomość aktualnego *prawa fizycznego* (równania stanu) materiału, a więc równania tensorowego

$$f(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \ldots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \ldots, T, t) = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

wiążącego naprężenia σ_{ij}, odkształcenia ε_{ij}, ich pochodne czasowe, temperaturę T oraz czas t, jeśli wymagane jest uwzględnienie historii procesu *explicite* (por. A. M. Freudenthal i H. Geiringer [36a], I. I. Goldenblat [42a].

Podstawowe modele matematyczne opisujące odkształcenie ośrodków niesprężystych można podzielić na dwie grupy dotyczące odpowiednio *lepkiego* bądź *plastycznego* zachowywania się materiału. W przypadku materiału *lepko-sprężystego* współczynniki występujące w (2.1) przy składowych tensorów dynamicznych i kinematycznych są *stałymi materiałowymi*, tzn. są niezmiennicze względem zmian intensywności wielkości dynamicznych i kinematycznych. Oznacza to, że dowolnie małemu naprężeniu ośrodka towarzyszą zawsze zjawiska lepko-sprężyste.

Zachowanie się materiału *sprężysto-plastycznego* jest odmienne. Może on przenieść naprężenie o pewnej intensywności bez wystąpienia odkształceń nieodwracalnych (plastycznych). Warunkiem koniecznym do pojawienia się nieodwracalnych odkształceń jest spełnienie *warunku plastyczności*

$$\Phi(\sigma_{ij}) = k, \tag{2.2}$$

będącego dla materiałów izotropowych funkcją skalarną tensora naprężenia. Występująca w (2.2) stała k jest *modułem plastyczności* ośrodka i definiuje jego (skalarną) cechę plastyczności. Dla materiałów idealnie plastycznych zachodzi ponadto $\dot{\Phi} = 0$, podczas gdy materiały charakteryzujące się wzmocnieniem plastycznym mają $\dot{\Phi} > 0$. Skoro dla materiału plastycznego spełniony być musi warunek (2.2), to staje się oczywiste, że współczynniki pojawiające się przy składowych tensorów wchodzących do prawa fizykalnego (2.1) nie mogą już być stałymi materiałowymi.

2.2. W zagadnieniach *lepko-sprężystości* wyróżnia się *teorie liniowe i nieliniowe* w zależności od tego, czy składowe odpowiednich tensorów występujących w (2.1) pojawiają się tam w liniowej czy też nieliniowej postaci. Za ogólnie obowiązującą zasadę przyjmuje się «lepką» nieściśliwość ośrodka, a więc brak zjawiska lepkości objętościowej, tzn. $\varepsilon_{ii}^{V} = 0$.

Ogólna postać prawa fizykalnego dla *liniowej lepko-sprężystości* zapisywana jest w następującej postaci [36a]

$$\mathbf{P}\sigma_{ij} = 2G\,\mathbf{Q}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}(3K\mathbf{P} - 2G\mathbf{Q})\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - 3\alpha K\mathbf{P}\,T\delta_{ij}, \tag{2.3}$$

gdzie $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Q}$ są liniowymi operatorami różniczkowymi:

$$\mathbf{P} = a_0 + a_1\frac{\partial}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad \mathbf{Q} = b_0 + b_1\frac{\partial}{\partial t} + \ldots + b_m\frac{\partial^m}{\partial t^n}. \tag{2.4}$$

Współczynniki a_i, b_i występujące w (2.4) są określonymi kombinacjami rzeczywistych stałych materiałowych, G oraz K z równania (2.3) przedstawiają moduły ścinania i odkształcenia objętościowego, T oznacza przyrost temperatury względem temperatury odniesienia, α natomiast jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej.

Ograniczając się do szczególnych form operatorów (2.4) uzyskuje się odpowiednie prostsze modele ciał liniowo-lepko-sprężystych. Najprostszymi modelami są te, które zawierają jedynie tensory naprężenia i odkształcenia oraz ich pierwsze pochodne względem czasu. Tak np. gdy

$$\mathbf{P} = 1, \quad \mathbf{Q} = [1 + (\eta/G)\partial/\partial t], \tag{2.5}$$

otrzymuje się najprostszy model ciała charakteryzującego się *opóźnieniem sprężystym* (model Kelvina). Występująca w (2.5) wielkość η jest cechą materiałową, mianowicie modułem lepkości postaciowej (ścinania). Analogicznie najprostszy model ciała wykazującego *pełzanie liniowe* i *relaksację* (model Maxwella) otrzymuje się przy następującej postaci operatorów (2.4)

$$\mathbf{P} = (G/\eta + \partial/\partial t), \quad \mathbf{Q} = \partial/\partial t. \tag{2.6}$$

2.3. Związki liniowej lepko-sprężystości pozwalają na uwzględnienie w aktualnie rozpatrywanym procesie odkształcenia tych zjawisk, których konstrukcja była poddana w przeszłości. Jeśli np. w chwili τ obciążenie wywołało określone odkształcenie, to w chwili $t > \tau$ konstrukcja wchodzi do nowego procesu odkształcenia «pamiętając» proces poprzedni. Tak więc dla opisania aktualnego procesu odkształcenia należy znać funkcję określającą pamięć materiału, która może być odmienna dla ścinania i ciśnienia hydrostatycznego. Stan odkształcenia lub naprężenia w czasie t, wywołany nagłymi, niezależnymi oddziaływaniami w chwilach τ, może być przedstawiony w postaci całki obejmującej wszystkie chwilowe przyrosty. Otrzymuje się wówczas tzw. *związki Boltzmanna*, które dla odkształceń (pełzania) mają postać

$$2G\varepsilon_{ij} = \int_{-\infty}^{t} \varphi_1(t-\tau)\sigma_{ij}d\tau + \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t} \varphi_2(t-\tau)\sigma_{kk}d\tau, \tag{2.7}$$

gdzie φ_1, φ_2 oznaczają *funkcje pamięci* (dziedziczenia). Analogiczne związki otrzymuje się dla naprężeń (relaksacji) (por. JU. N. RABOTNOW [99a], A. M. FREUDENTHAL [36a], R. BLAND [12a]). Zależności typu (2.7) są równoważne przedstawieniu ciała lepko-sprężystego w postaci (2.3). Funkcje pamięci są w tym przypadku odpowiednio zależne od współczynników w operatorach (2.4).

Zależności typu (2.7) mogą być traktowane jako związki definiujące pełzanie i relaksację również dla zjawisk nieliniowych.

Istnieje kilka uproszczonych teorii pełzania wykorzystujących koncepcję funkcji pamięci. Uproszczenia dotyczą głównie matematycznej postaci funkcji φ_1, φ_2 i ich liczby. W teorii, której prawo fizykalne ma postać

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu_1}{E(t)}\sigma_{ij} - \frac{\mu_1}{E(t)}\sigma_{kk}\delta_{ij} - \int_{t_0}^{t} \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial\tau}(K_1+K_2)\,\partial\tau + \delta_{ij}\int_{t_0} \frac{\partial K_1}{\partial\tau}\sigma_{kk}d\tau, \tag{2.8}$$

gdzie

$$K_1(\tau, t) = \frac{1}{E} + \varphi(\tau, t), \quad K_2(\tau, t) = \frac{\nu_1}{E} + \nu_2\varphi(\tau, t),$$

ν_1, ν_2 są zaś współczynnikami Poissona odpowiednio dla odkształceń sprężystych i odkształceń pełzania, E jest modułem Younga; tylko jedna funkcja pamięci φ określa odkształcenie ośrodka (N. CH. ARUTUNIAN [6a].) Funkcję tę dla betonu przyjmuje się zwykle w następującej postaci:

$$\varphi(\tau, t) = (C_0 + A/\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

gdzie C_0, A oraz γ są stałymi materiałowymi, określonymi na podstawie odpowiednich doświadczeń (por. N. CH. ARUTUNIAN [6a], A. R. RŻANICYN [106a], I. I. GOLDENBLAT [42a]),

Rozwiązywanie konkretnych problemów brzegowych w teorii liniowej lepko-sprężystości jest ułatwione przez możliwość wyeliminowania zależności związków (2.3) od czasu na drodze *transformacji Laplace'a*. Rozwiązanie problemu lepko-sprężystego otrzymuje się wówczas w zależności od rozwiązania analogicznego problemu brzegowego liniowej sprężystości (por. T. ALFREY [4a], E. H. LEE

[70a]). *Analogia sprężysto-lepko-sprężysta* prowadzi ponadto do praktycznie ważnego wniosku, że naprężenia lepko-sprężyste są równe zeru tam, gdzie są one równe zeru w zadaniu liniowo-sprężystym. Analogiczny wniosek odnosi się również do pól przemieszczeń. Oznacza to, że *w konstrukcji liniowo-lepko-sprężystej* (przy ustalonym obciążeniu) *nie zachodzi redystrybucja naprężeń*. Ten oczywisty wniosek wynikający zresztą bezpośrednio z (2.3) jest szczególnie ważny dla zastosowań.

2.4. Ponieważ większość materiałów konstrukcyjnych nie spełnia postulatów liniowej teorii lepko-sprężystości, zostały sformułowane *teorie nieliniowej lepko-sprężystości*. Najprostsze z tych teorii zachowują w równaniu (2.1) tylko naprężenia i szybkości odkształceń, tzn. przedstawiają pełzanie materiału w postaci

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{V} = f(\sigma_{ij}), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{E} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{V} \tag{2.9}$$

i są teoriami płynięcia, ponieważ zawierają *explicite* tylko naprężenia i prędkość odkształcenia. W większości zagadnień praktycznych odkształcenia sprężyste mogą być uważane za małe w porównaniu z całkowitymi odkształceniami pełzania.

W zależności od szybkości narastania odkształceń pełzania w czasie wyróżnia się procesy *pełzania nieustalonego*, *ustalonego* (*stacjonarnego*) i *pełzania przyśpieszonego*, zakończonego zniszczeniem elementu. Jeśli niezmienniczą wielkość $\Phi = \varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}$ przyjąć jako charakterystyczną wielkość dla pełzania w założonym procesie naprężenia, to wymienione trzy typy pełzania zdefiniowane są kolejno zależnościami

$$\frac{d^2}{dt^2}(\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}) \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}^{V} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{E} \approx 0. \tag{2.10}$$

Skalarna funkcja $\Phi = \varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij}$ określana jest doświadczalnie (por. R. W. BAILEY [9a], F. K. G. ODQVIST [81a, b], I. FINNIE [33a], F. K. G. ODQVIST i J. HULT [82a]).

2.5. Większość studiów analitycznych odnoszących się do nieliniowej lepko-sprężystości dotyczy zagadnień *pełzania ustalonego*. Wobec założenia o lepkiej nieściśliwości prawo fizyczne stacjonarnego pełzania (por. F. K. G. ODQVIST [81a]) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = f(\sigma_{ij})\, s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}, \tag{2.11}$$

gdzie $f(\sigma_{ij})$ jest skalarną funkcją składowych stanu naprężenia. Wśród teorii stacjonarnego pełzania dużą popularność zdobyła wykładnicza zależność $\dot{\varepsilon} = k\sigma^n$ (w jednowymiarowym stanie naprężenia). Najprostszą niezmienniczą postacią tej zależności uogólnionej na złożone stany naprężenia jest związek

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2} = B(s_{ij}\,s_{ij})^{n/2}, \quad \dot{\varepsilon}_{ii} = 0. \tag{2.12}$$

Przy takiej zależności niezmienniczej między dewiatorami prawo fizyczne (2.11) przybiera następującą postać:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = B(s_{kl}\,s_{kl})^{\frac{(n-1)}{2}}\, s_{ij}, \tag{2.13}$$

gdzie B oraz n są stałymi materiałowymi, przy czym n jest dodatnią liczbą całkowitą, a B może zależeć od czasu. Między związkami teorii ustalonego pełzania a zależnościami nieliniowej sprężystości występuje oczywista analogia. Ta *analogia «pełzanie — nieliniowa sprężystość»* (N. J. HOFF [54a]) jest przydatna przy poszukiwaniu przybliżonych rozwiązań, ponieważ udostępnia do stosowania odpowiednio zmodyfikowane twierdzenia wariacyjne nieliniowej sprężystości.

Nieliniowość związków fizykalnych (2.13) stanowi poważną przeszkodę w uzyskiwaniu zamkniętych rozwiązań zagadnień pełzania. Aby częściowo te trudności obejść, zaproponowano prawa fizyczne w postaci związków między największymi naprężeniami stycznymi a przyrostami odkształceń postaciowych. Otrzymuje się wówczas zależności typu $\dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_j = f(\sigma_i - \sigma_j)(\sigma_i - \sigma_j)^n$, $(i, j = 1, 2, 3)$, co pozwala na korzystanie z metod odcinkowo-liniowej plastyczności do zagadnień stacjonarnego pełzania (por. A. M. W. WAHL [124a], W. I. ROZENBLUM [102b]).

2.6. Z problemami nieliniowego pełzania związane jest zjawisko *wyboczenia «pełzającego»*. Charakteryzuje się ono tym, że w skończonym czasie prędkości odkształceń wzrastają nieograniczenie (przy ustalonym obciążeniu). Odpowiednia wartość czasu określana jest jako *czas krytyczny*. Omawiane zjawisko wyboczenia jest odmienne od klasycznych zjawisk utraty stateczności. Nie może ono wystąpić w przypadku lepko-sprężystości liniowej, gdyż spełnienie warunku $\dot{\varepsilon}_{ij} \to \infty$ nie jest możliwe w skończonym okresie czasu.

2.7. Wśród nieliniowych teorii lepko-sprężystości wyróżnić można również takie, które postulują bezpośrednią zależność między naprężeniami i odkształceniami a czasem *explicite*, tzn. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + f_{ij}(\sigma_{ij}, t)$, przy czym zwykle przyjmuje się $f(\sigma_{ij}, t) = F(t)(S_{ij}S_{ij})^n$. Poważnym zastrzeżeniem teoretycznym w stosunku do tych proporcji jest właśnie ich jawna zależność od czasu, względem którego związki fizykalne powinny być niezmiennicze.

N. CH. ARUTUNIAN [6a] rozwinął *nieliniową teorię dziedziczenia*, analogiczną do przedstawionej równaniem (2.8), lecz uwzględniającą dodatkowo określone niezmiennicze związki między dewiatorami naprężenia i odkształcenia.

2.8. W grupie teorii dotyczących *plastycznego* zachowywania się materiałów rozróżnić należy dwie główne tendencje. W jednej z nich prawo fizyczne sformułowane jest jako bezpośrednia zależność między naprężeniami a odkształceniami. Teorie posługujące się zależnościami tego typu znane są jako teorie (małych) *odkształceń sprężysto-plastycznych* («teorie odkształceniowe»). Druga tendencja zapisywania prawa fizykalnego ośrodka plastycznego w postaci zależności między naprężeniami a przyrostami odkształceń uwidacznia się w *teoriach plastycznego płynięcia* («teorie przyrostowe»). W obydwu przypadkach musi być spełniony dodatkowo warunek (2.2), jeśli ma się pojawić nieodwracalne odkształcenie ε_{ij}^P (por. R. HILL, [47a], W. PRAGER i P. G. HODGE [97a]).

2.9. Równanie fizyczne *teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych* wiąże bezpośrednio dewiatory naprężenia i odkształcenia. Dla procesu obciążania odpowiednie zależności mają postać (por. A. A. ILIUSZIN [58d]

$$s_{ij} = 2G(1-\varphi/2G)e_{ij}, \qquad \sigma_{ii} = 3K(\varepsilon_{ii} - 3aT), \tag{2.14}$$

a odciążanie odbywa się czysto liniowo-sprężyście. Występujące w (2.14) φ oznacza skalarną funkcję współrzędnych fizycznych, przy czym $\varphi > 0$ w procesie obciążania oraz $\varphi = 0$ przy odciążaniu. Postać tej funkcji zależy od aktualnie obowiązującego warunku plastyczności (2.2). Poprzez φ warunek plastyczności wchodzi do prawa odkształcenia. Tak więc, gdy $\Phi(s_{ij}) = s_{ij}$, $s_{ij} = 2k^2$ (gdzie k oznacza granicę plastyczności przy czystym ścinaniu), to $\varphi = 2G - -2k/e_{ij}\,e_{ij})^{1/2}$. Ponieważ φ jest funkcją skalarną, równanie tensorowe (2.14) narzuca współosiowość dewiatorów naprężenia i odkształcenia w ciągu całego procesu odkształceń plastycznych. Stąd wniosek, że posługując się prawem fizycznym (2.14) (równania Hencky'ego–Iliuszina), otrzymać można rozwiązanie problemu brzegowego, jeśli proces obciążenia zapewnia niezmienność kierunków głównych. W zagadnieniach powłok warunek ten może być spełniony tylko w wyjątkowych przypadkach, gdyż dopuszcza on tylko taką redystrybucję sił wewnętrznych, która nie zmienia kierunków głównych naprężeń i odkształceń.

2.10. Równanie fizyczne *teorii plastycznego płynięcia* wiąże bezpośrednio składowe tensora naprężenia i tensora przyrostów (prędkości) odkształceń, a mianowicie

$$\dot{e}_{ij} = \lambda s_{ij} + \dot{s}_{ij}/2G, \quad \dot{\varepsilon}^p_{ii} = 0, \quad \sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}. \tag{2.15}$$

Występująca w (2.15) λ jest funkcją skalarną podlegającą wyznaczeniu z warunku plastyczności (2.2). Jeśli rozpatrywać materiał *sztywno-plastyczny*, tzn. gdy odkształcenia sprężyste mogą być uważane za małe w porównaniu z plastycznymi, to zachodzi $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$, a odpowiednie prawo fizyczne nazywane *prawem płynięcia* przyjmuje postać

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda s_{ij}, \tag{2.16}$$

określaną jako związki Levy'ego–Misesa. Formalnie przypominają one równania nieliniowego pełzania, przedstawione związkami (2.13). Reprezentują one jednak zupełnie odmienne zjawiska, ponieważ dla materiału plastycznego dodatkowo zachodzi warunek plastyczności (2.2). Jeśli np. $\Phi = s_{ij}s_{ij} = 2k^2$, to $\lambda = (\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}/2k^2)^{1/2}$, a tym samym różnica pomiędzy zależnościami (2.13) i (2.16) jest widoczna.

2.11. Związki teorii plastycznego płynięcia stanowią podstawę *teorii nośności granicznej* konstrukcji (por. W. PRAGER [96 a, b], P. G. HODGE [49 f] oraz [111 a]) i teorii optymalnego kształtowania konstrukcji plastycznych.

Przez odpowiednie kombinacje związków fizycznych dla ośrodków sprężystych, lepkich i plastycznych otrzymuje się bardziej złożone modele ciał niesprężystych. Takie złożone modele nie były jednak jeszcze stosowane do analizy zagadnień naprężenia i odkształcenia powłok.

3. Założenia teorii powłok

3.1. Dla kompletności przedstawienia omawianych zagadnień wydaje się niezbędne przytoczenie podstawowych założeń teorii cienkich powłok (por. [34a]). Przypuśćmy, że początek prostokątnego układu współrzędnych x_i

($i = 1, 2, 3$) umieszczony jest na środkowej powierzchni powłoki w ten sposób, że x_3 jest skierowana wzdłuż zewnętrznej normalnej do tej powierzchni. Przy założeniu $\sigma_{33} = 0$, stan naprężenia w powłoce zostaje jednoznacznie określony przez pięć składowych tensora naprężenia, mianowicie $\sigma_{\alpha\beta}$ i $\sigma_{\alpha 3}$ ($\alpha\beta = 1, 2$). Jeśli grubość $2H$ powłoki jest mała w porównaniu do jej głównych promieni krzywizny (tzn. $2H/\varrho_\alpha \ll 1$), to stan naprężenia może być określony w zależności od *naprężeń wypadkowych*, zdefiniowanych następująco:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-H}^{H} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-H}^{H} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3, \quad Q_\alpha = \int_{-H}^{H} \sigma_{\alpha 3} dx_3. \tag{3.1}$$

Przedstawiają one odpowiedni tensor sił błonowych $N_{\alpha\beta}$, tensor momentów $M_{\alpha\beta}$ oraz wektor sił poprzecznych Q_α. W ten sposób stan naprężenia w powłoce o określonej grubości został sprowadzony do stanu wypadkowego, odniesionego do środkowej powierzchni powłoki nieodkształconej.

3.2. Jeśli wydłużenia i krzywizny powierzchni środkowej oznaczyć odpowiednio przez $\lambda_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$, to stosowane w teorii powłok *założenie o prostych normalnych* pozwala określić stan odkształcenia dowolnej warstwy w zależności od $\lambda_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$. Odpowiednie związki mają postać

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + x_3 \varkappa_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = 0. \tag{3.2}$$

Wielkości $\lambda_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$ wyrażają się z kolei przez przemieszczenia stosownie do znanych związków między przemieszczeniami a odkształceniami. Warunek $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$ oznacza, że nie są dopuszczone odkształcenia wywołane siłami poprzecznymi. Ponieważ układ odniesienia jest związany z nieodkształconą powierzchnią środkową, a więc niezmienny w czasie, to przez odpowiednie różniczkowanie względem czasu z równania (3.2) otrzymuje się analogiczne związki również między prędkościami. Stosownie do przytoczonych założeń teorii cienkich powłok wyrażenie na energię odkształcenia redukuje się do następującej postaci:

$$V = \frac{1}{2} \int_{-H}^{H} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_3 = \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \varkappa_{\alpha\beta}). \tag{3.3}$$

Podobnie jednostkowe rozpraszanie energii wyraża się w zależności od sił wewnętrznych i prędkości odkształcenia powierzchni środkowej powłoki.

3.3. Wobec posługiwania się wielkościami (3.1) również związek fizykalny dla powłok powinien wyrażać się w zależności od $M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$, Q_α oraz $\varkappa_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha 3}$ i ich pochodnych względem czasu. Odpowiednia dla powłok postać związku (2.1) jest więc następująca:

$$f(N_{\alpha\beta}, \dot{N}_{\alpha\beta}, \ldots, M_{\alpha\beta}, \ldots, \lambda_{\alpha\beta}, \ldots, \varkappa_{\alpha\beta}, \ldots, T, t) = 0. \tag{3.4}$$

Dla materiałów wykazujących cechę plastyczności należy również odpowiednio przekształcić *równania plastyczności* (2.2) do postaci

$$F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = \text{const}, \tag{3.5}$$

jeśli pominąć wpływ sił poprzecznych na uplastycznienie elementu powłoki. Jak widać z porównania zależności (2.2) i (3.1), sprowadzenie warunku plastyczności do postaci (3.5) następuje na drodze pewnej transformacji całkowej, związanej ze zmianą wymiarów przestrzeni.

4. Liniowa lepko-sprężystość

4.1. W związku z założeniem o płaskim stanie naprężenia warstw powłoki i wobec $\sigma_{33} = 0$ równanie fizykalne (2.3) przy pominięciu członu termicznego sprowadza się do następującej postaci

$$\mathbf{P}\sigma_{\alpha\beta} = 2G\mathbf{Q}\left[\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{3K\mathbf{P}-2G\mathbf{Q}}{3K\mathbf{P}+4G\mathbf{Q}}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right], \quad \alpha, \beta = 1, 2, \tag{4.1.}$$

gdzie operatory **P** i **Q** są określone zależnościami (2.4). Wykorzystując w (4.1) założenie o prostych normalnych otrzymuje się

$$\mathbf{P}\sigma_{\alpha\beta} = 2G\mathbf{Q}\,[\lambda_{\alpha\beta} + x_3\varkappa_{\alpha\beta} + \mathbf{A}(\lambda_{\gamma\gamma} + x_3\varkappa_{\alpha\beta})\delta_{\alpha\beta}], \tag{4.2}$$

gdzie $\mathbf{A} = (3\varkappa\mathbf{P} - 2G\mathbf{Q})/(3\varkappa\mathbf{P} + 4G\mathbf{Q})$. Jeśli ponadto wprowadzić definicję sił wewnętrznych (3.1) oraz wziąć pod uwagę niezależność operatorów **P** i **Q** od współrzędnych przestrzeni fizycznej, to otrzymuje się następującą postać związków między siłami wewnętrznymi a odkształceniami powierzchni środkowej powłoki:

$$\mathbf{P}N_{\alpha\beta} = 4HG\mathbf{Q}(\lambda_{\alpha\beta} + \mathbf{A}\lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{P}M_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}H^3G\mathbf{Q}(\varkappa_{\alpha\beta} + \mathbf{A}\varkappa_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}). \tag{4.4}$$

Z powyższych zależności widać, że siły błonowe powodują *w materiale liniowo lepko-sprężystym* tylko wydłużenia powierzchni środkowej, a momenty wywołują tylko jej zakrzywienia. Tak więc rozkład naprężeń po grubości ulega jedynie zmianie w czasie, *nie następuje* natomiast żadna *redystrybucja sił pomiędzy momentami i siłami błonowymi.*

4.2. Zależność związków (4.3) i (4.4) od czasu może być usunięta poprzez zastosowanie transformacji Laplace'a.

$$u^*(x, s) = \int_0^\infty e^{-st}u(x, t)dt, \quad \text{(por. np. [36a], [12a])}.$$

Wówczas otrzymuje się

$$N^*_{\alpha\beta} = 4HG\mathbf{Q}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)[\lambda^*_{\alpha\beta} + \mathbf{A}(s)\lambda^*_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}], \tag{4.5}$$

$$M^*_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}H^3G\mathbf{Q}(s)\mathbf{P}^{-1}(s)[\varkappa^*_{\alpha\beta} + \mathbf{A}(s)\varkappa^*_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}] \tag{4.6}$$

pod warunkiem, że dla $t = 0$ powłoka znajduje się w spoczynku. Związki (4.5) i (4.6) są formalnie identyczne z odpowiednimi zależnościami dla powłok liniowo sprężystych. Różnica sprowadza się do «stałych» materiałowych, które w przypadku lepko-sprężystości zostają sprowadzone do tzw. *«stowarzyszonych modułów»* (por. P. M. Naghdi i W. C. Orthwein [77a]).

Jeśli poddać transformacji również pozostałe równania (tzn. dynamiczne i kinematyczne oraz warunki brzegowe), to zagadnienie analizy rozpatrywanych powłok lepko-sprężystych sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego problemu sprężystości liniowej. Tak więc gdziekolwiek znane jest rozwiązanie stowarzyszonego zadania sprężystego, wynika tylko problem dokonania transformacji odwrotnej, co jednak na ogół nie jest łatwe.

Liczba dotychczas dostępnych rozwiązań konkretnych zagadnień teorii powłok lepko-sprężystych jest niewielka. P. M. Naghdi i W. C. Orthwein [77a] analizowali zachowanie się płaskiej powłoki kulistej poddanej działaniu obrotowo symetrycznego obciążenia dowolnie zmieniającego się w czasie. Dla uzyskania rozwiązań odnoszących się zarówno do powłok wykazujących opóźnienie sprężyste, jak i wykazujących liniowe pełzanie zastosowali oni podwójną transformację (tzn. Laplace'a z następującą po niej transformacją Hankela), co pozwoliło na odwrócenie otrzymanych związków. Podano szczegółowe wyniki odnoszące się do obciążenia impulsem ciśnienia.

4.3. Analiza traktująca o zagadnieniach powłok dla ogólnego modelu ciała nie może być na ogół przedstawiona w takiej postaci, która pozwoliłaby inżynierowi na ilościową ocenę zjawisk. Dla tych celów warto przeprowadzić rozważania odnoszące się do najprostszych modeli ciał liniowo-lepko-sprężystych.

Rozpatrzmy powłokę wykonaną z materiału wykazującego *opóźnienie sprężyste*, a poddaną działaniu ustalonego obciążenia. Dla takiego ośrodka operatory **P**, **Q** mają postać (2.5). Przy ustalonym obciążeniu prowadzi to do związku fizykalnego $s_{ij} = 2Ge_{ij}+2\eta\dot{e}_{ij}$, podczas gdy zmiana objętości jest natychmiastowa i czysto sprężysta, $\varepsilon_{ii} = \sigma_{ii}/3K$. Całkowanie prawa odkształcenia przy zerowych warunkach początkowych dla dewiatorów odkształcenia prowadzi do wyniku $e_{ij} = (1-e^{-\eta t/G})(s_{ij}/2G)$. Jeśli tę zależność przedstawić w postaci właściwej powłokom, otrzymuje się związek

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}(1-e^{-\eta t/G})\left(\sigma_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{3K}\sigma_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}, \tag{4.7}$$

a po wykorzystaniu definicji sił wewnętrznych (3.1) następującą postać zależności fizycznej:

$$2H\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G}(1-e^{-\eta t/G})\left(N_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}N_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)+\frac{1}{3K}N_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{4.8}$$

i analogiczną łączącą tensory momentów i krzywizn.

Jest widoczne, że z wyjątkiem czysto sprężystego odkształcenia objętościowego wszystkie składowe tensora odkształcenia wzrastają dążąc do wartości odpowiadających powłokom sprężystym. Dla materiałów nieściśliwych a wykazujących opóźnienia sprężyste na ścinanie otrzymuje się następujące wyrażenia na składową promieniową i składowe styczne wektora przemieszczeń:

$$\left.\begin{matrix} w \\ u_\alpha \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} w^E \\ u_\alpha^E \end{matrix}\right\}(1-e^{-\eta t/G}). \tag{4.9}$$

Analogicznie dla powłok z nieściśliwego materiału wykazującego *liniowe pełzanie* otrzymuje się odpowiednio

$$\left.\begin{matrix} w \\ u_\alpha \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} w^E \\ u_\alpha^E \end{matrix}\right\}\left(1+\frac{G}{\eta}t\right), \tag{4.10}$$

przy czym w^E, u_α^E oznaczają część sprężystą przemieszczenia. Zależności typu (4.10) posłużyły do sformułowania przybliżonych teorii pełzania konstrukcji betonowych i żelbetowych (W. H. GLANVILLE [41a]). Teorie te zakładają, że czasowo zależna część pól naprężeń i odkształceń ma tę samą konfigurację przestrzenną co i odpowiednie wielkości sprężyste, tzn. w przypadku powłok otrzymuje się zależności $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^E\varphi(t)$, $u_\alpha = u_\alpha^E\varphi(t)$ itd (por. H. MUGURUMA [76a]).

Ogólne zależności między wielkościami dynamicznymi a kinematycznymi dla powłok lepko-sprężystych analizowali I. I. GOLDENBŁAT i N. A. NIKOŁAJENKO [43a, b], W. NOWACKI [80a], a dla ortotropii I. E. PROKOPOWICZ [98a]. E. TUNGL [122a] rozpatrzyła problem «przeskoku» dla płaskiej powłoki lepko-sprężystej wykazującej pełzanie i opóźnienie sprężyste (model «standardowy»). Uwzględnienie *geometrycznej nieliniowości* związków pomiędzy odkształceniami a przemieszczeniami prowadzi do efektu przeskoku, który dla materiału o cechach lepkich pojawia się przy mniejszych intensywnościach nagle przyłożonego ciśnienia niż dla powłoki idealnie sprężystej. Problem przeskoku dla elementu powłoki walcowej rozpatrywał Z. BYCHAWSKI [14a].

4.4. Wśród teorii postulujących prawo fizyczne w postaci (2.7) najszersze zastosowanie znalazła teoria posługująca się funkcją pamięci $\varphi = (C_0+A/\tau)\times\times[1-e^{-\gamma(t-\tau)}]$, postulująca ponadto liniową proporcjonalność pomiędzy odkształceniami podłużnymi i poprzecznymi w całym procesie pełzania (N. Ch. ARUTUNIAN [6a]).

W przypadku *teorii dziedziczenia* związek między naprężeniami a odkształceniami w każdej warstwie powłoki przyjmuje następującą postać:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2G} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{2G} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)d\tau, \tag{4.11}$$

gdzie $K = -\partial K_1/\partial t$, co w konsekwencji założeń teorii powłok prowadzi do równania

$$\frac{2}{3}H^3\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{2G} - \nu\frac{M_{\gamma\gamma}}{E}\delta_{\alpha\beta} - \int_{-\infty}^{t} K(t,\tau)\left(\frac{M_{\alpha\beta}}{2G} - \nu\frac{M_{\gamma\gamma}}{E}\delta_{\alpha\beta}\right)d\tau. \tag{4.12}$$

Analogiczną zależność do wiążącej momenty z krzywiznami otrzymuje się dla sił błonowych i wydłużeń. W przypadku niezmiennych obciążeń, jeśli ponadto $E = \mathrm{const}$, $\nu = \mathrm{const}$, pełzanie określone jest przez proste zależności

$$\left.\begin{matrix} w \\ u_\alpha \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} w^E \\ u_\alpha^E \end{matrix}\right\} [1+E\varphi(t,\tau)], \tag{4.13}$$

przy czym $\varphi(t,\tau)$ jest funkcją pamięci danego materiału.

Jeśli posługiwać się związkami (2.8) bez upraszczającego założenia, że $K_2 = \nu K_1$, to zawarta w (4.13) analogia pomiędzy pełzaniem a odkształceniami sprężystymi nie obowiązuje. Dla takiego ogólnego przypadku odpowiedni układ równań różniczkowo-całkowych problemu pełzania przytoczony jest w pracy [43a]. Dotychczas jednak nie są znane żadne rozwiązania problemów spełniających takie związki fizykalne.

Zależność (4.13) *może służyć do przybliżonego określania odkształceń* pełzania, jeśli znana jest funkcja pamięci dla jednoosiowego stanu naprężenia oraz znane jest rozwiązanie problemu sprężystego. Tego typu wyniki odnoszące się do powłok walcowych znaleźć można w pracach I. I. Goldenblata i N. A. Nikołajenki [43b] oraz E. A. Davisa [20a].

Zachowanie się mało wyniosłej powłoki kulistej analizował M. R. Feldman [31a]. Przypadek nieliniowości związków kinematycznych dla tego typu konstrukcji studiowany jest w pracy M. I. Estrina [29a]; G. S. Grigorian [44a] rozpatrywał pełzanie powłoki żelbetowej w dążeniu do uzyskania związków określających redystrybucję sił między betonem i stalą w procesie pełzania. Mimo rozpowszechnienia teorii dziedziczenia liczba opracowań dotyczących powłok jest niewielka.

4.5. Ponieważ temperatura wpływa zarówno na stałe materiałowe, jak i na związki pomiędzy naprężeniami a odkształceniami, współcześnie obserwuje się tendencję do analizy konstrukcji powierzchniowych z uwzględnieniem *zjawisk termo-lepko-sprężystych* dla procesów statycznych i dynamicznych. M. Żórawski [128a] rozpatrywał zamkniętą powłokę kulistą poddaną obciążeniu impulsem cieplnym. Inne prace z tego zakresu dotyczą efektów termicznych w powłokach grubościennych [1a], [7a, b], [48a], [103a, b]. M. A. Zadojan [125a] rozpatrywał pełzanie walca w sformułowaniu liniowej teorii dziedziczenia traktując jądro odpowiedniego równania całkowego problemu jako zależne od temperatury w następujący sposób:

$$K(t,\tau,T) = E_0 e \gamma_{\tau}^{-T} \frac{\partial}{\partial\tau} [\varphi(\tau,t) e^{\mu T}]$$

(γ, μ oznaczają stałe materiałowe, E_0 moduł sprężystości w temperaturze odniesienia).

5. Pełzanie ustalone

5.1. W zakresie zagadnień nieliniowej lepko-sprężystości uwaga koncentruje się dotychczas głównie na problemach pełzania stacjonarnego. Daje ono bowiem możliwość zbadania takich specyficznych cech niesprężystego zachowywania się konstrukcji jak *redystrybucja naprężeń* w stosunku do stanu sprężystego oraz *wyboczenie «pełzające»*.

Liczba proponowanych związków między naprężeniami a prędkościami odkształceń pełzania jest znaczna. Istnieje szereg opracowań przeglądowych traktujących o tych związkach fizycznych (F. K. G. ODQVIST [81a], I. FINNIE [33a]), o wyboczeniu przy pełzaniu (N. J. HOFF [54b]) oraz monografie (L. M. KACZANOW [63c], F. K. G. ODQVIST i J. HULT [82a]), omawiające zagadnienia od strony postaci funkcji (2.2) dla pełzania, a zależności (2.11) dla stacjonarnego pełzania.

Dla celów analizy pełzania powłok niezbędne jest określenie bezpośrednich związków między wielkościami dynamicznymi a kinematycznymi. Najbardziej rozpowszechnione prawo pełzania $\dot{\varepsilon} = k(\dot{\varepsilon})\sigma^n$, uogólnione na przestrzenny stan naprężenia, przyjmuje w zadaniu płaskim następującą postać:

$$(5.1)\qquad \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = B(s_{ij}s_{ij})^{\frac{n-1}{2}}[\sigma_{\alpha\beta}(1/3)\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}], \qquad \dot{\varepsilon}_{33} = -\dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma}.$$

Po odwróceniu związków (5.1) otrzymuje się zależności

$$(5.2)\qquad \sigma_{\alpha\beta} = (\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}+\dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})/B^n(\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij})^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Wobec założonej nieściśliwości $\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$, kwadratowy niezmiennik stanu odkształcenia występujący w (5.2) może być przedstawiony jako $\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}+\dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha}\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}$, a po wyprowadzeniu założenia o prostych normalnych przyjmuje on następującą postać:

$$(5.3.)\qquad \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_{\alpha\beta}+\dot{\lambda}_{\alpha\alpha}\dot{\lambda}_{\beta\beta}+2x_3(\dot{\lambda}_{\alpha\beta}\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}+\dot{\lambda}_{\alpha\alpha}\dot{\varkappa}_{\beta\beta})+x_3^2(\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}+\dot{\varkappa}_{\alpha\alpha}\dot{\varkappa}_{\beta\beta}) = $$
$$= P_L+2x_3P_{KL}+x_3^2P_K \equiv P.$$

W powyższym wzorze przez P_L, P_{KL}, P_K oznaczono odpowiednie niezmiennicze wielkości tensorów kinematycznych powierzchni środkowej. Wykorzystując związki (5.3) w zależnościach (3.1) otrzymuje się następujące wyrażenia na *siły wewnętrzne*:

$$(5.4)\qquad N_{\alpha\beta} = (\dot{\lambda}_{\alpha\beta}+\dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2+(\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}+\dot{\varkappa}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2.$$

$$(5.5)\qquad M_{\alpha\beta} = (\dot{\lambda}_{\alpha\beta}+\dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2+(\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}+\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta})I_3,$$

gdzie

$$(5.6)\qquad I_s = \frac{1}{B^n}\int_{-H}^{H}\frac{x_3^{s-1}}{P^{(n-1)/2n}}dx_3, \qquad s = 1, 2, 3,$$

które to wielkości można interpretować kolejno jako uogólnione pole, moment statyczny i moment bezwładności przekroju powłoki.

Jest bezpośrednio widoczne z powyższych zależności, że wszystkie *wielkości dynamiczne i kinematyczne są w ustalonym pełzaniu wzajemnie związane*. Zależności te są bardziej złożone, niż by to wynikało z prostej superpozycji stanu błonowego i giętnego. Siły błonowe są połączone zarówno z wydłużeniami jak i zakrzywieniami powierzchni środkowej. Nie istnieje więc możliwość oddzielnego rozpatrywania stanów membranowego i zgięciowego z wyjątkiem bardzo szczególnych problemów brzegowych.

Z uwagi na postać związków (5.4)-(5.6) rozwiązanie problemów brzegowych pełzania w zamkniętej postaci jest możliwe tylko w nielicznych szczególnych przypadkach. Na ogół stosuje się metody numeryczne i wariacyjne.

Nieliniowość związków (5.1) powoduje istotne różnice w polu sił pomiędzy rozwiązaniem dla liniowej sprężystości a rozwiązaniem zagadnienia pełzania. Różnice są tym bardziej wyraźne, im «wyższa» jest nieliniowość równania fizycznego. Różnice obejmują również, co jest zrozumiałe, zależność między obciążeniem a przemieszczeniem powłoki.

5.2. Badaniu wpływu nieliniowości związku fizycznego na pole sił wewnętrznych w powłoce poświęcona jest praca M. P. Bieńka i A. M. Freudenthala [11a]. Analiza przebiegu sił wewnętrznych w pobliżu brzegu powłoki walcowej wykazała, że szczyt momentu zostaje (w porównaniu do rozwiązania liniowo-sprężystego) znacznie zmniejszony i zmienia się charakter współpracy sił błonowych i momentów przy przenoszeniu obciążeń. W. I. Rozenblum [102a] zastosował metodę wariacyjną do badania zależności pomiędzy ciśnieniem a przemieszczeniem promieniowym dla powłoki walcowej. C. R. Calladine [15a] wyznaczył dla pół-nieskończonej powłoki walcowej na drodze całkowania numerycznego zasięg i przebieg «efektu brzegowego». Zagadnieniom redystrybucji sił w powłokach poświęcona jest praca H. Poritsky'ego [95a].

Wyznaczeniem przemieszczeń powłok walcowych znajdujących się w stanie ustalonego pełzania zajmował się A. E. Gemma [37a, b], a dla powłok obrotowo-symetrycznych L. M. Kaczanow [63b, c]. A. E. Gemma i J. T. Warfield [38a] wyznaczyli zależność między ciśnieniem a przemieszczeniem promieniowym dla zamkniętej elipsoidy.

5.3. Zamkniętą postać rozwiązań problemów pełzania można uzyskać przez zastosowanie *prawa fizycznego w «zlinearyzowanej» postaci*. Linearyzacja jest tu jednak dosyć szczególna i polega w zasadzie na uogólnieniu związku $\dot{\varepsilon} = k\sigma^n$ na złożony stan naprężenia nie w postaci $\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = B^2(s_{ij}s_{ij})^n$, lecz w postaci $\dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_j = B(\sigma_i - \sigma_j)^n$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Różnica tych podejść tłumaczy się tak, jak różnica pomiędzy warunkiem plastyczności Hubera–Misesa a warunkiem największego naprężenia stycznego (por. A. M. Wahl [124a], W. I. Rozenblum [102c], por. również C. R. Calladine i D. C. Drucker [16a]).

Tego typu podejście zastosowali E. T. Onat i H. Yüksel [87a] do analizy pełzania powłok walcowych, uzyskując zamkniętą postać związku na przemieszczenia, oraz W. I. Rozenblum [102e] przy rozpatrywaniu pełzania powłok znajdujących się w błonowym stanie naprężenia.

5.4. Zależność (5.1) można wykorzystać do poszukiwania grubości powłok znajdujących się w stanie błonowym, a charakteryzujących się jednakową prędkością pełzania we wszystkich punktach powłoki (tzw. *powłoki «równomiernego pełzania»* por. [63c]). Wówczas zachodzić musi $\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \mathrm{const}$, co z kolei stosownie do (2.12) jest równoważne warunkowi $s_{ij}s_{ij} = \text{const}$. Wykorzystując definicję sił błonowych otrzymuje się zależność

$$N_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} - (4/9)N_{\alpha\alpha}N_{\beta\beta} = 4H^2c, \tag{5.7}$$

gdzie c jest daną stałą. Ponieważ w stanie błonowym $N_{\alpha\beta}$ jest określone z równań równowagi, zależność (5.7) podaje zmianę grubości powłoki.

5.5. Jedną z charakterystycznych cech nieliniowej lepko-sprężystości jest zjawisko *wyboczenia «pełzającego»*. Okazuje się, że po upływie dostatecznie długiego okresu czasu *prędkości odkształceń nieograniczenie wzrastają*, a tym samym proces odkształcenia staje się niestateczny dla każdej wartości obciążenia (por. N. J. HOFF [56b, c], JU. N. RABOTNOW [99c], S. A. SZESTERIKOW [120a]). Tak np. dla pręta ściskanego osiowo, a charakteryzującego się odchyłką od stanu idealnego, istnieje czas krytyczny τ_{kr} skończony taki, przy którym prędkość narastania odkształceń staje się nieskończona. Zagadnienia niestateczności pełzania — podstawy i analiza wyboczenia prostych konstrukcji omawiane są w pracach przeglądowych N. J. HOFFA [54b], JU. N. RABOTNOWA i S. A. SZESTERIKOWA [100a], B. F. DE VEUBECKE [123a] oraz w monografii [82a] (por. też [39a]).

Niestateczność procesu pełzania powłok walcowych poddanych działaniu osiowego ściskania i ciśnienia wewnętrznego pierwszy analizował E. SUNDSTRÖM [118a]. N. J. HOFF, W. E. JASHMAN i W. NACHBAR [55a] rozpatrzyli stateczność walcowej powłoki sandwiczowej przy poprzecznym ciśnieniu (por. też. A. P. KUZNIECOW i L. M. KURSZIN [69a]). Zagadnień z pogranicza wyboczenia przy pełzaniu dotyczy praca C. R. CALLADINE'A [15b], rozpatrująca rozprzestrzenianie się fałdy w powłoce walcowej.

5.6. *Nieliniowe pełzanie* zamkniętej kuli na gruncie nieliniowej teorii dziedziczenia rozpatrywali N. CH. ARUTUNIAN i M. M. MANUKIAN [7b]. Wpływ temperatury na stateczność i zniszczenie powłok analizowany jest przez WAH TEIN i R. KIRKA [121a]. Praca ta zawiera dane doświadczalne odnoszące się do przyśpieszonego pełzania powłok walcowych. J. P. ELLINGTON [27a] rozpatrywał pełzanie powłoki walcowej stosując prawo fizyczne zawierające czas *explicite*. Stosując zależności nieliniowej toerii dziedziczenia i nieliniowe związki kinematyczne M. I. ROZOWSKI [103b] analizował pełzanie powłoki kulistej. Zagadnień zbliżonych do stacjonarnego pełzania powłok dotyczą ponadto prace [33b], [9a], [127a].

6. Teoria małych odkształceń sprężysto-plastycznych

6.1. Stosownie do założeń «odkształceniowej» teorii plastyczności odkształcenie objętościowe jest czysto sprężyste, a *prawo odkształcenia* postaciowego postuluje proporcjonalność dewiatorów naprężenia i całkowitego odkształcenia. W przypadku powłok odpowiedni związek przybiera postać

$$\sigma_{\alpha\beta} = A(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \tag{6.1}$$

gdzie $A = [s_{ij}s_{ij}/e_{ij}e_{ij}]^{1/2}, \quad i, j = 1, 2, 3.$

Jak to było już podkreślane uprzednio, do analizy procesów małych odkształceń plastycznych niezbędna jest znajomość również warunku plastyczności. Załóżmy, że warunek plastyczności podany jest w postaci regularnej funkcji niezmienników stanu naprężenia. Najprostszą postacią takiej funkcji (niezależnej od ciśnienia hydrostatycznego) jest warunek plastyczności Hubera–Misesa, reprezentujący krytyczną (dla danego materiału izotropowego) wartość jednostkowej energii odkształcenia postaciowego. Ponieważ gęstość energii odkształcenia postaciowego określona jest kwadratowym niezmiennikiem dewiatora naprężenia, omawiany warunek ma postać $\Phi = s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_0^2$, gdzie σ_0 oznacza granicę plastyczności w jednoosiowym stanie naprężenia. W płaskim stanie naprężenia otrzymuje się odpowiednio $\Phi(\sigma_{\alpha\beta}) = 3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - 2\sigma_0^2 = 0$. Dla materiału idealnie plastycznego zachodzi $\dot{\Phi} = 0$, a więc warunek plastyczności nie zmienia się w procesie odkształcenia plastycznego, podczas gdy dla materiału wykazującego wzmocnienie plastyczne $\dot{\Phi} > 0$. Przypadek $\dot{\Phi} < 0$ odpowiada odciążeniu, które w myśl założeń teorii odkształceniowej jest czysto sprężyste.

6.2. Prawo fizyczne teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych dla omówionego warunku plastyczności przyjmuje następującą postać:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_0(2/3e_{ij}e_{ij})^{1/2}(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}), \tag{6.2}$$

a więc naprężenia są jednoznacznie określone przez odkształcenia i moduł plastyczności materiału σ_0. Na podstawie zależności (3.1) i (3.2) otrzymuje się bezpośrednie *związki między siłami wewnętrznymi a odkształceniami powierzchni środkowej*, mianowicie

$$N_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta}+\lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_1+(\varkappa_{\alpha\beta}+\varkappa_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2, \tag{6.3}$$

$$M_{\alpha\beta} = (\lambda_{\alpha\beta}+\lambda_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2+(\varkappa_{\alpha\beta}+\varkappa_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_3, \tag{6.4}$$

gdzie

$$I_s = \sigma_0(2/3)\int_{-H}^{H}(x_3^{s-1})/(e_{ij}e_{ij})^{1/2}dx_3, \qquad s = 1, 2, 3. \tag{6.5}$$

Dla materiału ze wzmocnieniem oczywiście σ_0 występuje pod znakiem całki. Wyrażenia (6.5) można interpretować kolejno jako zredukowane pole, moment statyczny i moment bezwładności przekroju powłoki. Ponieważ $e_{ij}e_{ij}$ dla powłok wyraża się poprzez niezmiennik $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\gamma\gamma}\varepsilon_{\beta\beta}$, który wobec założenia (3.2) jest wielomianem drugiego stopnia względem $\varkappa_0$, to całki (6.5) dają się wyznaczyć i związki (6.3) oraz (6.4) otrzymuje się w postaci zamkniętej.

6.3. Wyrażenia (6.3) do (6.5) wraz z warunkami równowagi i związkami geometrycznymi, łączącymi $\lambda_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ ze składowymi w, u_α $(\alpha = 1, 2)$ wektora przemieszczenia, przedstawiają układ równań teorii powłok sprężysto-plastycznych, który wymaga rozwiązania dla aktualnych warunków brzegowych. Z zależności tych widać, że elementy stanu zgięciowego i błonowego wchodzą do obydwu równań definiujących siły wewnętrzne. Wynika stąd wniosek, że w ogólnym przypadku *nie jest możliwe rozdzielenie równań teorii powłok plastycznych na grupy* dotyczące odpowiednio *stanu zgięciowego* i *stanu błonowego*, jak to ma miejsce w teorii powłok sprężystych (por. [34a]). Fakt ten wskazuje na odmienność zagadnień powłok plastycznych w porównaniu ze sprężystymi. Rozdzielenie stanu momentowego od stanu błonowego następuje jedynie dla szczególnych przypadków odkształcenia, takich mianowicie gdy $I_2 = 0$ (co oznacza, że wyrażenie $e_{ij}e_{ij}$ jest symetryczne względem powierzchni środkowej).

Bezpośrednie całkowanie równań teorii powłok sprężysto-plastycznych nie jest w ogólnym przypadku możliwe. W dążeniu do rozwiązania problemów brzegowych stosuje się więc *metody przybliżone*, które można podzielić na metody wariacyjne i metodę rozwiązań sprężystych (A. A. Iliuszin [58a]).

6.4. W metodzie rozwiązań sprężystych stosuje się drogę kolejnych przybliżeń. Jako zerowe przybliżenie traktuje się rozwiązanie liniowo-sprężyste danego problemu brzegowego. Znając pole przemieszczeń wyznacza się e_{ij}, co z kolei pozwala na obliczenie wielkości (6.5), a tym samym na przedstawienie sił wewnętrznych w zależności od przemieszczeń. Podstawienie tych związków do równań równowagi prowadzi do zależności różniczkowych na przemieszczenia. Z uwagi na nieliniowość prawa fizycznego tak otrzymane równania różnią się od związków dla powłok sprężystych o pewne dodatkowe człony, które mogą być interpretowane jako odpowiednia zmiana obciążeń (np. jako specyficzne pole sił ciężkości). Równania przemieszczeniowe wymagają teraz rozwiązania dla «zmodyfikowanych» obciążeń przy niezmienionych warunkach brzegowych. W rezultacie tego kroku otrzymuje się nowe pole przemieszczeń. Postępowanie powtarza się aż do chwili, kiedy różnice pomiędzy rezultatami dwóch kolejnych przybliżeń mogą być uznane za dostatecznie małe (por. [58d]). Jak widać, sposób postępowania może być uciążliwy. Zbieżność metody rozwiązań sprężystych badał W. M. Panferow [90a], jednak przedstawiony dowód zbieżności nie może być uważany za dostateczny (por. [8a]).

Omówioną metodę kolejnych przybliżeń zastosowano do rozwiązania kilku prostszych przypadków powłok. Odkształcenia powłoki walcowej pod działaniem obrotowo symetrycznych obciążeń rozpatrywane są w pracach A. A. Iliuszina [58b, c, d] i innych [5a], [92a]. I. S. Curkow analizował tą metodą odkształcenie mało wyniosłej powłoki kulistej [18b] oraz przypadek «efektu brzegowego» w powłoce walcowej [18a, d, e] również dla powłoki ortotropowej [18c]. R. A. Mieżłumian podał równania sprężysto-plastycznych odkształceń cienkościennych profili otwartych [72a-d].

6.5. Metody wariacyjne stosowane w teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych oparte są na założeniu, że wariacja całkowitej energii odkształcenia W jest równa pracy L wykonanej przez obciążenia zewnętrzne na przyrostach przemieszczeń δu_i spowodowanych zgodną z więzami wariacją stanu odkształcenia, a więc

$$\delta \int_V W dV = \int_s T_i \delta u_i ds, \tag{6.6}$$

jeśli pominąć siły masowe. Na wielkość W składa się zarówno energia odkształcenia objętościowego, proporcjonalna do niezmiennika ε_{ii}, jak i energia odkształcenia postaciowego, która dla prawa fizycznego (2.14) zależy od wyrażenia $\int\limits_0^{e_{ij}} A e_{ij} de_{ij}$, gdzie A jest odpowiednią dla przyjętego warunku plastyczności skalarną funkcją określającą moduł odkształcenia [podobnie jak w (6.1)]. Tego typu podejście stosował A. A. ILIUSZIN [58b], zaś W. M. PANFEROW [90b] rozpatrywał problem doboru najwłaściwszych funkcji na przemieszczenia. I. S. GERASIMOW [40a] zastosował metodę wariacyjną do analizy współdziałania sprężysto-plastycznej płyty ze sprężystą powłoką w naczyniu ciśnieniowym.

6.7 Metody teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych, głównie metoda rozwiązań sprężysto-plastycznych mają praktyczne znaczenie dla *studiowania początku procesu odkształceń plastycznych.* W szczególności ta teoria może dostarczyć interesujących ze stanowiska technicznego informacji na temat odkształceń w pierwszej fazie procesu nieodwracalnego. Wówczas założenie o niezmienności kierunków głównych tensorów odkształcenia i naprężenia może być zaakceptowane (jeśli rozpatrywać problem ze stanowiska technicznego, nie matematycznego). Jeśli natomiast chodzi o wyznaczenie stopnia bezpieczeństwa konstrukcji na zniszczenie, to metoda rozwiązań sprężystych przedstawia niewielką wartość z uwagi na pracochłonność obliczeń. Ponadto otrzymane rozwiązania są przybliżone bez możliwości określenia bezwzględnego stopnia dokładności wyznaczenia np. obciążenia granicznego dla powłok. Z tych względów obserwuje się obecnie spadek zainteresowania teorią małych odkształceń sprężysto-plastycznych, szczególnie w zastosowaniu do zagadnień teorii konstrukcji. Wypierana jest ona w zagadnieniach nośności granicznej przez formalnie poprawniejszą i technicznie bardziej efektywną teorię plastycznego płynięcia.

7. Nośność graniczna

7.1. W zachowaniu się konstrukcji wykonanej z materiału idealnie sprężysto-plastycznego (bez wzmocnienia) można w procesie jej obciążania wyodrębnić dwie fazy, mianowicie: a) stan użytkowy, b) stan wyczerpania nośności. W pierwszym przypadku zachodzi przy narastających obciążeniach wzajemnie jednoznaczna zależność między naprężeniami a odkształceniami, podczas gdy drugiemu spośród wymienionych stanów odpowiada niekontrolowany przyrost odkształceń przy ustalonej intensywności obciążenia. Odpowiednia wielkość obciążenia jest definiowana jako *obciążenie graniczne* (*nośność graniczna*) konstrukcji, któremu towarzyszy *przekształcenie konstrukcji w mechanizm* o jednym co najmniej stopniu swobody (*mechanizm zniszczenia*). Przekształcenie się konstrukcji w mechanizm związane jest z osiągnięciem przez naprężenia warunku plastyczności w określonej liczbie obszarów, kontynuacja zaś procesu odkształcenia się plastycznego następuje bez zmiany liczby i geometrii tych uplastycznionych obszarów. Wielkość obciążenia granicznego może być wyznaczona na drodze śledzenia całego procesu obciążenia konstrukcji od stanu sprężystego poprzez sprężysto-plastyczny aż do stanu granicznego. Istnieje też możliwość bezpośredniego wyznaczenia intensywności obciążenia granicznego przez zastosowanie takich metod analizy, które ograniczają się do rozpatrzenia wyłącznie stanu wyczerpania nośności. W tym drugim przypadku podstawą analizy jest sztywno-plastyczny model odkształcania się materiału. Obciążenie graniczne związane jest przy tym podejściu z rozpoczęciem się procesu odkształceń plastycznych (por. A. A. GWOZDIEW [45a,b], R. HILL [47b], W. PRAGER [96a]).

7.2. Analiza stanu granicznej nośności konstrukcji wymaga wyspecyfikowania warunku plastyczności, który należy przedstawić w zależności od sił wewnętrznych, a więc dla powłok w postaci $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$, jak to podaje zależność (3.5). Warunek plastyczności tworzy w przestrzeni sił wewnętrznych $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ zamkniętą hiperpowierzchnię, zawierającą początek przyjętego (kartezjańskiego) układu odniesienia. Ta hiperpowierzchnia definiowana jest jako *powierzchnia graniczna* (powierzchnia plastyczności). Dla określenia ruchu mechanizmu zniszczenia, oprócz wyspecyfikowania warunku (3.5), potrzebna jest znajomość odpowiedniego *prawa ruchu*, a więc związku fizykalnego (3.4). Ruch ośrodka (niesztywny) jest określony, jeśli znany jest związek między naprężeniami a prędkościami odkształceń. Ponieważ takimi relacjami posługuje się teoria plastycznego płynięcia, stanowi ona podstawę teorii nośności granicznej. Teoria plastycznego płynięcia posługuje się pojęciem stowarzyszonego prawa płynięcia $\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda\,\partial\Phi/\partial\sigma_{ij}$; przyjmuje się, że warunek plastyczności Φ jest *potencjałem dla prędkości odkształceń plastycznych* lub w przypadku nieregularnej powierzchni granicznej tzw. uogólnionym potencjałem (W. KOITER [68a]).

Można wykazać (por. A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI [114a], M. SAVE [108a]), że o ile zachodzi *stowarzyszone prawo płynięcia* w przestrzeni naprężeń, to zależności

$$\dot{\lambda}_{\alpha\beta} = \nu\frac{\partial F}{\partial N_{\alpha\beta}}, \quad \dot{\varkappa}_{\alpha\beta} = \nu\frac{\partial F}{\partial M_{\alpha\beta}}, \quad \nu \geqslant 0 \tag{7.1}$$

opisują chwilowy ruch tych punktów powierzchni środkowej, w których $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$. Wielkości dynamiczne występujące w równaniu powierzchni granicznej oraz wielkości kinematyczne $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$, $\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}$ określają *prędkość rozpraszania energii wewnętrznej* (ogólnie wyrażającej się skalarem $d = \sigma_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}$), mianowicie $d = M_{\alpha\beta}\dot{\varkappa}_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$ na jednostkę powierzchni środkowej powłoki. Ponieważ proces plastycznego płynięcia jest nieodwracalny, zachodzi $d > 0$. Przy wypukłości powierzchni granicznej fakt ten łącznie z postulatem stateczności $\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} > 0$ służy do uzasadnienia słuszności stowarzyszonego prawa płynięcia (por. [21b], [96c]).

7.3. Sprecyzowanie równania powierzchni granicznej jest jednym z podstawowych problemów teorii nośności granicznej, gdyż znając je określamy równocześnie kryterium uplastycznienia, jak i na podstawie (7.1) ruch tworzącego się (w stanie wyczerpania nośności) mechanizmu zniszczenia. W zakresie formułowania równań powierzchni granicznej wyodrębnić można dwa podejścia. Jedno z nich polega na *transformacji warunku plastyczności* $F(\sigma_{ij}) = 0$ z przestrzeni naprężeń do przestrzeni sił wewnętrznych (3.1), drugie natomiast *formułuje bezpośrednio zależność* $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$, nie troszcząc się o postać warunku plastyczności «w naprężeniach». Przewagę ma jednak podejście pierwsze.

Dla zilustrowania tej metody otrzymywania równania powierzchni granicznej dla powłok dokonajmy wymaganej transformacji w przypadku warunku plastyczności Hubera–Misesa, tzn.

$$\Phi = 3\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta} - 2\sigma_0^2 = 0. \tag{7.2}$$

Stowarzyszone prawo płynięcia zastosowane do (7.2) prowadzi dla materiału nieściśliwego do następujących związków między naprężeniami a prędkościami odkształceń plastycznych:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{3\nu}(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}), \qquad \dot{\varepsilon}_{33} = -\dot{\varepsilon}_{\gamma\gamma}. \tag{7.3}$$

Podstawienie (7.3) do (7.2) dostarcza związku określającego parametr ν, mianowicie:

$$\nu = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{6}}(\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta}). \tag{7.4}$$

Z porównania zależności (7.3) i (7.4) wynika, że dla warunku plastyczności Hubera–Misesa prędkość odkształcenia plastycznego jednoznacznie określa stan naprężenia. W teorii małych odkształceń sprężysto–plastycznych zachodziły odpowiednie związki (6.2) między naprężeniami a odkształceniami. Jeśli zależności (7.2) i (7.3) wykorzystać w równaniach definiujących *siły wewnętrzne*, otrzymuje się następujący układ równań:

$$N_{\alpha\beta} = \sigma_0(\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_1 + \sigma_0(\dot{\varkappa}_{\alpha\beta} + \dot{\varkappa}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2, \tag{7.5}$$

$$M_{\alpha\beta} = \sigma_0(\dot{\lambda}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_2 + \sigma_0(\dot{\varkappa}_{\alpha\beta} + \dot{\varkappa}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})I_3, \tag{7.6}$$

gdzie

$$I_s = (1/3\sigma_0)\int_{-H}^{H}(x_3^{s-1}/\nu)\,dx_3, \qquad s = 1, 2, 3. \tag{7.7}$$

Ponieważ z (3.2) i (7.4) wynika, że ν jest wielomianem drugiego stopnia względem x_3, to całki (7.7) można wyznaczyć. Równania (7.4) i (7.5) przedstawiają *parametryczną postać hiperpowierzchni granicznej* w przestrzeni sił wewnętrznych $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$. Eliminując niezależne parametry dochodzi się do bezpośredniego związku $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$, który jednak w ogólnym przypadku nie daje się przedstawić w postaci zamkniętej. Natomiast dla *powłok sandwiczowych* otrzymuje się następujący układ równań:

$$3n_{\alpha\beta}n_{\alpha\beta} + 3m_{\alpha\beta}m_{\alpha\beta} - m_{\alpha\alpha}m_{\beta\beta} - n_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta} = 2, \tag{7.8}$$

$$3m_{\alpha\beta}n_{\alpha\beta} - m_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta} = 0, \tag{7.9}$$

gdzie $m_{\alpha\beta}$, $n_{\alpha\beta}$ oznaczają odpowiednie bezwymiarowe wielkości momentów i sił błonowych (por. [114a]).

Równanie powierzchni granicznej typu (7.5)-(7.6) podał A. A. Iliuszin [58c] wychodząc ze związków teorii odkształceniowej, a w nieco innej parametryzacji zależności te uzyskał następnie P. G. Hodge [49k], (por. też prace: W. W. Rożdziestwienski [104a], W. I. Jerchow [28a, c], a dla przypadku uwzględnienia ścinania G. S. Shapiro [115a]). A. Sawczuk i J. Rychlewski [114a] oprócz podania związków (7.4)-(7.5) badali geometryczną strukturę hiperpowierzchni plastyczności wykazując, że powierzchnie graniczne dla szczególnych przypadków geometrii powłok i kinematyki ich plastycznego odkształcenia otrzymuje się bądź przez odpowiednie przecięcia, bądź przez rzutowanie ogólnej hiperpowierzchni do odpowiednich podprzestrzeni.

7.4. W przypadku *odcinkowo-liniowych warunków plastyczności* bezpośrednie otrzymanie równania powierzchni granicznej w podany wyżej sposób nie jest możliwe. Ponadto dla liniowych warunków plastyczności powierzchnie graniczne nie koniecznie są liniowe (w przestrzeni sił wewnętrznych). Dla warunku Coulomba–Treski równania powierzchni granicznej w przypadku obrotowo-symetrycznych powłok podali E. T. Onat i W. Prager [86a], E. T. Onat [85a] oraz P. G. Hodge [49 a, b], a dla szczególnego przypadku powłoki walcowej D. C. Drucker w pionierskiej pracy z zakresu teorii nośności granicznej powłok [21a], (por. też [49d, e, f,]). Dla powłok sandwiczowych równania powierzchni granicznej są odcinkowo liniowe (por. P. G. Hodge [44a, i, l]), W. Prager [96d]).

Nieliniowość związków $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 0$ prowadzi w konsekwencji do nieliniowych różniczkowych równań problemów nośności granicznej powłok, a tym samym ogranicza poważnie klasę zamkniętych rozwiązań. Linearyzację równań można uzyskać przez linearyzację powierzchni granicznej, co osiąga się np. przez *zastąpienie rzeczywistej powłoki odpowiednim modelem sandwiczowym* (por. Ju. N. Rabotnow [99b], W. I. Rozenblum [102b]).

7.5. W dążeniu do uzyskania zamkniętej postaci rozwiązań problemów brzegowych stosowaną praktyką jest używanie zamiast «dokładnych» równań hiperpowierzchni granicznych (otrzymywanych przez transformację aktualnie stosowanego warunku plastyczności) pewnych ich przybliżeń. Następuje to np. bądź przez *pominięcie wpływu niektórych sił* wewnętrznych (D. C. Drucker i R. T. Shield [24a], [117a]), bądź *rozdzielenie w warunku plastyczności wpływu zginania i stanu błonowego* (tzn. zamiast np. $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = 1$ stosuje się $F_1(N_{\alpha\beta}) = C_N^2$, $F_2(M_{\alpha\beta}) = C_M^2$, $C_N^2+C_N^2 = 1$). (W. I. Rozenblum [102b,d]). Do tej ostaniej grupy należy propozycja P. G. Hodge'a [49j], przyjmująca $C_N = C_M = 1$, a więc postulująca brak współdziałania momentów i sił błonowych, podobnie jak dla szczególnego przypadku powłoki walcowej przyjął to D. C. Drucker [21a].

Odrębną grupę powierzchni granicznych stanowią zależności odnoszące się do stanu granicznego *powłok żelbetowych* (por. Z. Mróz [75a], A. Sawczuk i W. Olszak [113a], a również [109d] i [112a]). Traktowane one mogą być jako powierzchnie graniczne dla warunków największego naprężenia normalnego, a tym samym jako przybliżenia (z nadmiarem) odpowiednich zależności granicznych dla warunku Coulomba–Treski. Dla powłok z materiałów o odmiennych granicach plastyczności na rozciąganie i ściskanie zagadnienie powierzchni granicznych studiowali W. Prager [96d] oraz R. Sankaranarayanan i W. Olszak [107a] (por. też M. Życzkowski [129a], jeśli chodzi o ogólne kryteria wytężenia konstrukcji, w tym i powłok).

Należy zaznaczyć, że stosowanie przybliżonych powierzchni granicznych w dążeniu do uzyskania zamkniętej postaci rozwiązań problemów nośności granicznej ma swoje teoretyczne uzasadnienie w podstawowych twierdzeniach omawianej tu teorii, które zostaną przytoczone dalej.

7.6. Znając *podstawowe związki teorii nośności granicznej, a więc powierzchnię graniczną, prawo płynięcia, równania statyczne i kinematyczne* można starać się rozwiązywać konkretne problemy brzegowe. Na *zupełne* rozwiązanie problemu brzegowego składa się określenie intensywności obciążenia granicznego, stowarzyszonego z nim pola sił wewnętrznych oraz ruchu konstrukcji towarzyszącego granicznej intensywności obciążenia. Uzyskano dotychczas szereg rozwiązań zupełnych dotyczących powłok obrotowo–symetrycznych, przy czym odnoszą się one prawie wyłącznie do przybliżonych powierzchni granicznych i stowarzyszonego z nimi prawa odkształcenia.

7.7. Zagadnienia brzegowe dla *powłok walcowych* obciążonych poprzecznie były pierwszymi rozwiązywanymi problemami nośności granicznej powłok. Równania dynamiczne i kinematyczne są tu rozdzielone, a więc zagadnienie jest «statycznie wyznaczalne», jeśli chodzi o wyznaczenie obciążenia granicznego i pola sił wewnętrznych. Rozdzielenie związków ułatwia uzyskanie efektywnych rozwiązań (A. A. Iliuszin [58a], D. C. Drucker [21a], E. T. Onat [85a], P. G. Hodge [49a,b]. G. Eason [25a], G. Eason i R. T. Shield [26a], A. R. Rżanicyn [106c]). Porównanie warunków plastyczności dla tego typu konstrukcji i wynikające stąd wnioski odnoszące się do klasycznego w teorii powłok sprężystych «efektu brzegowego» podali A. Sawczuk i P. G. Hodge [110a]. W. Olszak i A. Sawczuk [83b] przeprowadzili analizę wpływu warunku plastyczności na nośność powłok walcowych obciążonych liniowo zmieniającym się ciśnieniem. Analizie odkształceń tego typu konstrukcji sprężysto–plastycznych poświęconych jest szereg prac (m. in. A. A. Iliuszin [58d], A. N. Ananina [5a], P. G. Hodge [49b], P. Klement [66a], J. A. König [67a]). Zagadnienia jednoczesnego działania obciążeń podłużnych i poprzecznych analizowali E. T. Onat i W. Prager [86a], P. G. Hodge [49a, i, l], H. Cohen i R. T. Shield [17a], P. G. Hodge i J. Panarelli [52a], a uwzględniając zjawiska stateczności B. Paul [91a], B. Paul i P. G. Hodge [92a].

Dla *powłok obrotowo symetrycznych* równania łączące siły i te wiążące wielkości kinematyczne są, ogólnie biorąc, sprzężone. Pierwsze rozwiązanie odnoszące się do płaskiej powłoki kulistej podał S. M. Fejnberg [30b]. P. G. Hodge uzyskał rozwiązania dla powłok kulistych rozprzęgając te równania przez uproszczenie warunku plastyczności [49g]. E. T. Onat [85c] i P. G. Hodge [49h] podali rozwiązanie dla powłoki stożkowej obciążonej siłą skupioną. T. Nakamura [78a] uzyskał szereg rozwiązań odnoszących się do powłok stożkowych i kulistych. Wszystkie rozwiązania korzystają z powierzchni granicznej dla materiału Coulomba–Treski, ewentualnie z jej przybliżeń.

7.8. Z inżynierskiego stanowiska najbardziej interesującą wielkością, której dostarcza analiza nośności granicznej, jest *obciążenie graniczne*. Znajomość obciążenia granicznego pozwala ocenić *stopień bezpieczeństwa konstrukcji* na zniszczenie, stąd też jego szczególne znaczenie, podczas gdy pole sił wewnętrznych i mechanizm zniszczenia konstrukcji są dla tego celu mniej istotne. Ponadto, jak to wynika z uzyskanych dotychczas rozwiązań i analiz ([491], [78a], [110a]), równanie powierzchni granicznej nie wpływa na wielkość obciążenia granicznego w sposób istotny, mimo iż różnice w polu sił i szybkościach przemieszczeń mogą być zasadnicze. Oszacowanie intensywności obciążenia granicznego bez konieczności podawania zupełnego rozwiązania problemu brzegowego teorii nośności granicznej jest możliwe dzięki dwu *podstawowym twierdzeniom nośności granicznej*. Znaczenie tych twierdzeń polega na dostarczeniu metod określania granic przedziału, w którym zawiera się rzeczywista nośność konstrukcji. Te *twierdzenia o «granicach obciążenia niszczącego»* zostały sformułowane przez A. A. Gwozdiewa [45a] i następnie udowodnione przez D. C. Druckera, W. Pragera i H. J. Greenberga [22a], [23a] dla materiałów sprężysto-plastycznych oraz R. Hilla [47b] (por. też. W. Koiter [68b]).

Twierdzenie o dolnej granicy nośności. Konstrukcja sztywno-plastyczna nie ulega zniszczeniu, co najwyżej znajduje się w stanie równowagi granicznej pod działaniem obciążenia p_s, jeśli może być znalezione jakiekolwiek pole sił wewnętrznych, będące w równowadze z działającym obciążeniem, a nie prowadzące do przekroczenia równania powierzchni granicznej.

Twierdzenie o górnej granicy nośności. Konstrukcja sztywno-plastyczna ulega niszczeniu pod działaniem obciążenia p_k, jeśli może być znaleziony taki mechanizm zniszczenia, dla którego prędkość wprowadzania energii zewnętrznej nie jest mniejsza od prędkości rozpraszania energii wewnętrznej.

Przy obciążeniach $p = \mu p_0$ narastających proporcjonalnie do jednego parametru μ (p_0 oznacza obciążenia jednostkowe) oszacowanie nośności konstrukcji od dołu odpowiada wyznaczeniu statycznie dopuszczalnego mnożnika μ_s, przy czym $p_s = \mu_s p_0$. Aby wyznaczyć μ_s, należy znaleźć takie pole sił wewnętrznych $M^0_{\alpha\beta}(\mu_s P_0)$, $N^0_{\alpha\beta}(\mu_s p_0)$, które czyni zadość różniczkowym równaniom równowagi i statycznym warunkom brzegowym zadania, a równocześnie spełnia postulat $F(N^0_{\alpha\beta}, M^0_{\alpha\beta}) \leqslant K$, tzn. nie przekracza warunku plastyczności. Jeśli F jest jednorodną funkcją (stopnia α) składowych stanu naprężenia, to wobec liniowości $M_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta}$ względem μp_0 warunek nieprzekroczenia powierzchni plastyczności ma postać

$$\mu_s^\alpha F(N^0_{\alpha\beta}, M^0_{\alpha\beta}) \leqslant K. \tag{7.10}$$

Najlepszą *dolną granicę nośności* daje

$$\mu_s^\alpha = \max \frac{K}{F(N^0_{\alpha\beta}, M^0_{\alpha\beta})}. \tag{7.11}$$

Warto zaznaczyć, że wprowadzenie do (7.10) pola sił wewnętrznych, wynikającego z rozwiązania problemu brzegowego teorii sprężystości, prowadzi do określenia jednego ze statycznie dopuszczalnych mnożnika obciążenia μ_s. Problemy związane z wyznaczeniem najlepszych statycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia granicznego analizował S. M. FEJNBERG [30a].

Oszacowanie nośności granicznej od góry, tzn. wyznaczenie kinematycznie dopuszczalnego mnożnika obciążenia μ_k (przy jednoparametrowych obciążeniach $p_k = \mu_k p_0$), następuje przez rozpatrzenie bilansu wprowadzonej do układu i rozproszonej tam energii. Ponieważ każdy wirtualny mechanizm spełnia warunki kinematyczne nałożone na mechanizm zniszczenia, to zasada przygotowanych prędkości staje się narzędziem do oceny górnych granic nośności. Jeśli więc $\dot{u}_i^*$ jest wirtualnym polem prędkości przemieszczania się (niesztywnego) konstrukcji, to z odpowiednich związków między przemieszczeniami a odkształceniami otrzymuje się $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*$ oraz $\dot{u}_{\alpha\beta}^*$. Drugie twierdzenie teorii nośności granicznej daje zależność

$$\mu_k \int_A p_{0i}\dot{u}_i^* dA \geqslant \int (M_{\alpha\beta}^*\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^*\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*)\,dA, \tag{7.12}$$

przy czym całkowanie obejmuje cały obszar A powierzchni środkowej powłoki. W obszarach, gdzie następuje rozpraszanie energii wewnętrznej, $M_{\alpha\beta}^*$ i $N_{\alpha\beta}^*$ spełniają odpowiednie równanie powierzchni granicznej. Najlepszą *ocenę nośności powłoki* od góry określa następujące wyrażenie:

$$\mu_k = \min \frac{\int_A (M_{\alpha\beta}^*\dot{\varkappa}_{\alpha\beta}^* + N_{\alpha\beta}^*\dot{\lambda}_{\alpha\beta}^*)}{\int_A p_{0i}\dot{u}_i^* dA}. \tag{7.13}$$

Konieczność znajomości aktualnych związków $F(N_{\alpha\beta}^*, M_{\alpha\beta}^*) = K$ w obszarach odkształcających się plastycznie utrudnia bezpośrednie korzystanie z zależności (7.13) w praktycznych obliczeniach. Jeśli natomiast dla konstrukcji izotropowej składowe tensorów sił wewnętrznych zastąpić wielkościami $M_{\alpha\beta} = M_0\delta_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\beta} = N_0\delta_{\alpha\beta}$, to dla wyznaczenia kinematycznego mnożnika obciążenia otrzymujemy zależność

$$\mu_k = \Big[M_0\int_A |\dot{\varkappa}_{\alpha\alpha}^*|\,dA + N_0\int_A |\dot{\lambda}_{\alpha\alpha}^*|\,dA\Big] \Big/ \int_A p_{0i}\dot{u}_i^* dA. \tag{7.14}$$

W zasadzie M_0 i N_0 powinny być tak dobrane, aby równania $M_0\delta_{\alpha\beta}$ i $N_0\delta_{\alpha\beta}$ opisywały rzeczywistą powierzchnię graniczną, a wówczas (7.14) prowadzi do oceny nośności granicznej od góry.

Powyższa zależność stanowi podstawę *kinematycznej* (*energetycznej*) *metody wyznaczania obciążenia granicznego*. Jeśli wirtualny mechanizm zniszczenia konstrukcji składa się ze sztywnych ogniw połączonych obszarami uplastycznionymi (np. liniowe przeguby plastyczne), to wartość licznika w (7.4) otrzymuje się przez całkowanie dotyczące tych obszarów.

Jeżeli wielkości μ_s i μ_k znane są z (7.11) i (7.13), to z twierdzeń o nośności granicznej wynika, że rzeczywiste obciążenie graniczne $p_G = \mu_G p_0$, scharakteryzowane przez mnożnik obciążenia μ_G, zawarte jest w przedziale określonym przez

$$\mu_s \leqslant \mu_G \leqslant \mu_k. \tag{7.15}$$

7.9. Twierdzenia o granicach obciążenia wykorzystane zostały do oceny obciążenia granicznego dla *powłok kulistych* po raz pierwszy przez E. T. ONATA i W. PRAGERA [86a], P. G. HODGE [49e, g] zaś uzyskał na tej drodze szereg rozwiązań odnoszących się do kopuł kulistych. W. I. ROZENBLUM [102b] określił granice przedziału nośności *powłoki stożkowej* obciążonej równomiernym ciśnieniem. Z. MRÓZ [75a], D. C. DRUCKER i R. T. SHIELD [24c, 117a], P. G. HODGE [49e, f], T. NAKAMURA [78a] oraz P. G. HODGE i C. LAKSHMIKANTHAM [50a] oszacowali nośność w kilku innych przypadkach geometrii i obciążenia *powłok obrotowo-symetrycznych* (por. też [105a]). Problem nośności przekrycia walcowego studiował na tej drodze N. M. FIALKOV [32a]; K. SZMODITS [119a] oraz T. NAKAMURA [78b] zajmowali się obciążeniem granicznym *powłok o ujemnej krzywiźnie*.

A. R. RŻANICYN zaproponował *uproszczoną metodę oceny nośności granicznej powłok mało wyniosłych* o dowolnej geometrii [106b]. Kilka przykładów w oparciu o tę metodę posługującą się pojęciem «skupionych odkształceń» (będących w zasadzie nieciągłościami w krzywiznach i wydłużeniach powierzchni środkowej powłoki) podano w pracach [106d, e, f, g].

Uzyskanie rozwiązań zupełnych dla powłok przy nieobrotowo-symetrycznych warunkach brzegowych związane jest z koniecznością rozpatrzenia mieszanego zagadnienia dynamiczno-kinematycznego, tzn. związki odnoszące się do pola sił nie dają się odłączyć od zależności dotyczących mechanizmu zniszczenia. W tych warunkach tylko posługiwanie się metodami przybliżonymi wydaje się jedynie właściwym podejściem do oceny nośności takich konstrukcji. Dla mechanizmów zniszczenia składających się ze sztywnych płatów połączonych wzdłuż uplastycznionych linii A. SAWCZUK [109d] podał odpowiednią postać zależności (7.14), odnoszącą się do powłok walcowych o dowolnej wyniosłości. W tym podejściu rozpraszanie energii koncentruje się na liniach *uogólnionych przegubów plastycznych*, podobnie jak w teorii linii załomów płyt, z tym że w przypadku powłok przeguby plastyczne z zasady są krzywoliniowe. Nośność graniczną przekrycia walcowego oszacował na tej drodze M. JANAS [61a].

7.10. Odrębną grupę stanowią zagadnienia nośności granicznej powłok żelbetowych, przy czym wyróżnić tu należy dwie tendencje. Jedna z nich charakteryzuje się dążeniem do uzyskania rozwiązań zupełnych w oparciu o właściwe dla żelbetu równania powierzchni granicznej, podczas gdy drugi kierunek ogranicza się wyłącznie do analizy energetycznej według zależności (7.12). Sformułowania równań *powierzchni granicznej dla żelbetowych powłok* dotyczą prace Z. MROZA [75a], A. SAWCZUKA i W. OLSZAKA [113a] oraz A. SAWCZUKA i J. A. KÖNIGA [112a]. W pracach [112a], [113a] podane są odpowiednie uzupełnienia rozwiązania problemów nośności granicznej zbiorników i silosów walcowych.

Grupa *przybliżonych rozwiązań* odnoszących się do powłok żelbetowych jest znacznie obszerniejsza. I. Menyhárd [71a] podał górną granicę nośności zbiornika walcowego. S. Kaliszky [64a] rozpatrywał nośność stożkowej powłoki żelbetowej. Szereg rozwiązań odnoszących się do powłok kulistych podali N. W. Achwlediani [2a, b, c], N. W. Achwlediani i W. I. Szajszmełaszwili [3a, b], G. I. Chazalia [46a], A. M. Owieczkin [89a, b]. Cechą charakterystyczną wymienionej tu grupy prac jest ich eksperymentalno-teoretyczny charakter. Obciążenie graniczne oblicza się tu dla mechanizmów zniszczenia zaobserwowanych doświadczalnie. Szczególnie dużą liczbę doświadczeń z zakresu nośności granicznej kopuł żelbetowych zawiera praca [89b]. *Doświadczenia nad zachowaniem się przekryć walcowych* opisują: A. L. L. Baker [10a, b], P. B. Morice [74a], A. L. Bouma i in. [13a, 101a], K. Hruban [56a], A. Sawczuk [109d]. Badania te wskazują na stosowalność metod analizy granicznej do zagadnień powłok żelbetowych i to nawet w uproszczonej postaci (por. [62a], [65a]), jeśli nie ingerują zjawiska stateczności.

7.11. Wśród zagadnień analizy plastycznej konstrukcji wyodrębnił się specjalny kierunek dotyczący zasad *optymalnego projektowania*. Zastosowanie teorii projektowania konstrukcji plastycznych na minimum ciężaru (D. C. Drucker i R. T. Shield [24a, b], R. T. Shield [116a], Z. Mróz [75b]) do zagadnień powłok walcowych dotyczą prace E. T. Onata i W. Pragera [86b], W. Freibergera [35a, b] oraz R. T. Shielda [116b]. W tym podejściu kryterium minimum ciężaru związane jest z żądaniem, aby funkcja określająca jednostkowe rozpraszanie energii przybierała stałą wartość w każdym punkcie powierzchni środkowej powłoki tzn. $D(K_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\beta}) = \text{const}$. Zagadnienia optymalnego projektowania powłok plastycznych dotyczą prace W. Olszaka i A. Sawczuka [83a], H. Zieglera [126a] i H. Islera [59a], traktujące problem optymalnego projektowania bądź od strony *doboru niejednorodności*, bądź — jak to ma miejsce w dwóch ostatnich pracach — doboru grubości zapewniających zrealizowanie się wymaganego stanu naprężenia.

7.12. Ponieważ rzeczywiste materiały wykazują wzmacnianie się w miarę narastania odkształceń plastycznych, ocena nośności granicznej, przyjmująca za punkt wyjścia idealnie plastyczny model odkształcenia, nie zawsze jest wystarczająca. Jeśli rozpatrywać geometrycznie *wzmacnianie się materiału*, to oznacza ono, ogólnie biorąc, zwiększanie się i przemieszczanie powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, tzn. $F(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}) = C(\varkappa_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\beta}, a_i)$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$, $(i = 1, \ldots, 8)$. W tym ogólnym zapisie wyróżnić można dwa najprostsze *typy wzmocnienia*: *izotropowe*, gdy $C = C(\varkappa_{\alpha\beta}, \lambda_{\alpha\beta})$, oraz *kinematyczne*, gdy $F = C = \text{const}$. W pierszym przypadku powierzchnia graniczna równomiernie się zwiększa. Natomiast wzmocnienie kinematyczne (W. Prager [96b], A. Ju. Iszlinski [60a]) charakteryzuje się wyłącznie translacją powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń o wektor a_i. Analizy walcowych powłok plastycznych po przekroczeniu obciążenia powodującego plastyczne płynięcie dotyczą prace P. G. Hode'a [49c], P. G. Hodge'a i S. V. Nardo, [51a], P. G. Hodge'a i F. A. Romano, [53a], N. Perrone'a [93a],

N. Perrone'a i P. G. Hodge'a [94a, b]. Zachowywanie się powłok obrotowo-symetrycznych przy kinematycznym modelu wzmocnienia badał E. T. Onat [85b]. Zagadnień wzmocnienia w obecności pola temperatury dotyczy praca Ch. Hwanga [57a].

7.13. Odrębną grupę mało zbadanych jeszcze zagadnień stanowią problemy nośności granicznej przy obecności błonowych sił ściskających, a więc problemy z pogranicza *nośności granicznej i wyboczenia*. W przypadku powłok walcowych zagadnienie nośności przy jednoczesnym zginaniu i ściskaniu rozpatrywali B. Paul i P. G. Hodge [92a] oraz B. Paul [91a]. Systematyczne przedstawienie omawianego problemu zawarte jest w monografii [49f].

7.14. Zjawiska *anizotropii plastycznej*, i to zarówno *strukturalnej* (związanej z wewnętrzną budową materiału), jak *konstrukcyjnej* (wywołanej przez odpowiednie kombinacje materiałów o odmiennych własnościach plastycznych), znalazły również odbicie w teorii powłok. M. Sz. Mikeładze [73a, -e] rozpatrywał powłoki sandwiczowe z ortotropowego materiału Misesa (por. [47a]). A. Sawczuk w oparciu o wprowadzony odcinkowo-liniowy warunek dla ciał anizotropowych podał równanie powierzchni granicznej dla powłok obrotowo symetrycznych [109a]. W przypadku anizotropowego materiału nośność graniczna konstrukcji zależy od wzajemnej orientacji głównych kierunków anizotropii i głównych kierunków krzywizn odkształconej powłoki. Związki ogólnej teorii powłok anizotropowych dla warunku plastyczności $\Phi = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-1 = 0$ (W. Olszak, W. Urbanowski [84a]) podał A. Sawczuk [109b, c]. Równanie powierzchni granicznej dla powłok sandwiczowych, odpowiadające związkom (7.8)-(7.9), ma w przypadku anizotropii postać

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}(m_{\alpha\beta}m_{\gamma\delta}+n_{\alpha\beta}n_{\gamma\delta}) = 1, \qquad A_{\alpha\beta\gamma\delta}(m_{\alpha\beta}n_{\gamma\delta}+n_{\alpha\beta}m_{\gamma\delta}) = 0, \tag{7.16}$$

gdzie $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$ jest tensorem modułów plastyczności o sześciu niezależnych składowych (czterech w przypadku płaskiej ortotropii por. [47a]). Z (7.16) widać, w jaki sposób anizotropia deformuje powierzchnię graniczną. Nośność graniczną ortotropowej powłoki walcowej analizował D. Niepostyn [79a], a W. Olszak i A. Sawczuk [83b, c] podali rozwiązanie odnoszące się do częściowego zniszczenia zbiornika ortotropowego. Zagadnienie «efektu brzegowego» dla walcowych powłok ortotropowych rozpatrywał M. Sz. Mikeładze [73b] jak też zagadnienia optymalnego kształtowania tego typu konstrukcji [73e, f].

7.15. Ostatnio obserwuje się tendencję do studiowania *wpływu pola temperatury na nośność graniczną konstrukcji*. Dotychczasowe prace dotyczące powłok rozpatrują jedynie przypadki, gdy własności plastyczne materiału są niezależne od temperatury, która tym samym ma charakter obciążenia. W. S. Czernina [19a] podała rozkład sił wewnętrznych w pobliżu połączenia dwóch powłok walcowych z materiałów o odmiennych własnościach termicznych i plastycznych. E. T. Onat i S. Yamanturk analizowali stan graniczny powłoki walcowej pod działaniem dużych gradientów temperatury [88a]. Spośród zagadnień nieobjętych niniejszym omówieniem należy wspomnieć o dynamicznej nośności konstrukcji.

8. Uwagi końcowe

Niniejsza praca podając przegląd rozwijających się dyscyplin z zakresu powłok niesprężystych wymaga uzupełnienia pewnego rodzaju syntezą, wskazującą przewidywane kierunki badań. Oprócz dostarczania nowych rozwiązań problemów brzegowych odnoszących się do zagadnień bezpośrednio omówionych, rozwój badań będzie musiał objąć zagadnienia *dostosowywania się powłok sprężysto-plastycznych do zmiennych programów obciążania*. Odejście od jednoparametrycznego obciążenia pociąga za sobą konieczność innego zdefiniowania nośności granicznej konstrukcji.

Uwzględnienie zmian w geometrii konstrukcji wskutek odkształcenia się plastycznego prowadzi do badania *stateczności procesu odkształceń plastycznych*. Pojęcie stateczności zastąpi w przyszłości dotychczas stosowane pojęcie obciążenia granicznego. Nośność graniczna związana z pojawieniem się plastycznego ruchu konstrukcji nie może stanowić podstawy do oceny stopnia bezpieczeństwa konstrukcji w przypadku zaawansowanych odkształceń (w zakresie w jakim konstrukcja może je przenieść). Pojęcie stateczności procesu odkształcenia pozwoli prześledzić współdziałanie efektów zmian geometrii powłoki i wzmocnienia materiału.

Odrębną grupę zagadnień w ramach klasycznych założeń sztywno-plastyczności stanowią problemy *dynamicznych obciążeń* ciśnieniem, masą i temperaturą. Również zagadnienia *niejednorodności plastycznej* spowodowanej zmianą własności materiałów wskutek działań cieplnych, strumienia neutronów, wymagają analizy na konkretnych przykładach.

Wreszcie zagadnienia zachowywania się powłok wykonanych z materiałów *sprężysto-lepko-plastycznych* oczekuje podjęcia badań tak teoretycznych, jak i doświadczalnych.

Rozwój tych kierunków obejmujących bardzo złożone problemy jest z jednej strony pobudzany przez potrzeby techniki, z drugiej strony ma doniosłe znaczenie poznawcze.

Literatura cytowana w tekście

[1a] B. O. AGGARWALA, *Thermal stresses in spherical shells of viscoelastic materials*, Z. angew. Math., **40**, 1960, 482-488.

[2a] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, *К расчету железобетонных оболочек вращения по предельному равновесию*, Сообщ. АН Груз. ССР, **18**, 1957, 205-210.

[2b] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, *К расчету несущей способности сборных железобетонных куполов*, Строител. Мех. Расч. Соор., 5, **3**, 1961, 15-17.

[2c] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, *О несущей способности пологих железобетонных оболочек покрытий двоякой кривизны*, Исслед. Теор. Сооруж., **11**, 1962, 253-259.

[3a] Н.В. АХВЛЕДИАНИ, В.И. ШАЙШМЕЛАВИЛИ, *К расчету несущей способности оболочек*, Сообщ. АН Груз. ССР, **13**, 1952.

[3b] Н. В. АХВЛЕДИАНИ, В.И. ШАЙШМЕЛАШВИЛИ, *К расчету оболочек двоякой кривизны по стадии разрушения*, Труды Инст. Строит. Дела АН ГССР, Тбилиси, **5**, 1955, 61-71.

[4a] T. ALFREY, *Mechanical Behavior of High Polymers*, Interscience, New York 1948.

[5a] А. Н. АНАНИНА, *Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки при упруго-пластических деформациях*, Инж. Сборник, **18**, 1954, 157-160.

[6a] Н. Х. АРУТЮНЯН, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Гос. Изд. Тех. Теор. Лит., Москва 1952.

[7a] Н. Х. АРУТЮНЯН, М.М. МАНУКЯН, *Ползучесть составных цилиндрических труб*, Изв. АН Армянской ССР, Сер. Физ. Мат., 6, **10**, 1957, 41-58.

[7b] Н. Х. АРУТЮНЯН, М.М. МАНУКЯН, *Ползучесть сферического сосуда*, Докл. АН Армянской ССР, **27**, 1958, 209-218.

[8a] В. М. БАБИЧ, *О некоторых работах В.М. Панферова по теории упруго-пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех., **20**, 1956, 767-771.

[9a] R. W. BAILEY, *Creep relationship and their application to pipes, tubes and cylindrical parts under internal pressure*, Proc. Instn. Mech. Engrs., **164**, 1951, 425-431.

[10a] A. L. L. BAKER, *A plastic design theory for reinforced and prestressed concrete shell roofs*, Mag. Concr. Research, **4**, 1950, 27-34.

[10b] A. L. L. BAKER, *Ultimate strength theory for short reinforced concrete cylindrical shell roofs*, Mag. Concr. Research, **10**, 1952, 3-8.

[11a] M. P. BIENIEK, A. M. FREUDENTHAL, *Creep deformation and stresses in pressurized long cylindrical shells*, J. Aero/Space Sci., **27**, 1960, 763-778.

[12a] R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.

[13a] A. L. BOUMA, A. C. VAN RIEL, H. VAN KOTEN, W. J. BERANEK, *Investigations on models of eleven cylindrical shells made of reinforced and prestressed concrete*, Proc. Symp. Shell Research, Delft 1961, North Holland, Amsterdam 1961, 79-101.

[14a] Z. BYCHAWSKI, *Creep buckling of a cylindrical panel*, Proc. World Conference on Shells, San Francisco 1962.

[15a] C. R. CALLADINE, *The steady creep of shells: a method of analysis*, Nuclear Reactor Containment Buildings and Pressure Vessels, Proc. Symp. Glasgow 1960, Butterwords, London 1960, 411-431.

[15b] C. R. CALLADINE, *On the creep of a wrinkle*, Creep in Structures, Springer, Berlin 1962, 245-271.

[16a] C. R. CALLANDINE, D. C. DRUCKER, *Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep*, Quart. App. l. Math., **20**, 1962, 79-84.

[17a] H. COHEN, R. T. SHIELD, *Limit analysis of cylindrical shells using approximate yield conditions*, Brown Univ., Div. Appl. Math., Rep. DA 4564/2, April 1958.

[18a] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластическое равновесие оболочек вращения при малых осесимметрических деформациях*, Изв. АН СССР, ОТН, №11, 1956, 106-110.

[18b] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластическое равновесие пологих оболочек при малых деформациях*, Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1957, 139-142.

[18c] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластическая деформация ортотропных цилиндрических оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1957, 50-54.

[18d] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластические деформации в тонкостенном цилиндре вблизи кольца жесткости*, Инж. Сборник, **28**, 1960, 182-189.

[18e] И. С. ЦУРКОВ, *Упруго-пластические деформации на защемленном краю тонкостенного цилиндра*, Инж. Сборник, **31**, 1961, 93-100.

[19a] В. С. ЧЕРНИНА, *Упруго-пластическая деформация сварной разнородной цилиндрической оболочки*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 1, 1960, 133-140.

[20a] E. A. DAVIS, *Creep rupture tests for design of high-pressure steam equipment*, J. Basic Engng., **2**, 1960, 453-461.

[21a] D. C. DRUCKER, *Limit analysis of cylindrical shells under axially-symmetric loading*, Proc. 1-st Midwest Conf. Solid Mech., Urbana 1953, 158-163.

[21b] D. C. DRUCKER, *Plasticity*, Proc. 1-st Symp. Naval Struct. Mech. (Stanford 1958), Pergamon Press, Oxford 1959, 407-455.

[22a] D. C. DRUCKER, H. J. GREENBERG, W. PRAGER, *The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain*, J. Appl. Mech., **18**, 1951, 371-378.

[23a] D. C. DRUCKER, W. PRAGER, H. J. GREENBERG, *Extended limit design theorems for continuous media*, Quart. Appl. Math., **9**, 1952, 381-389.

[24a] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Brussel 1956, Actes, **5**, 212-222.

[25b] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight*, Quart. Appl. Math., **15**, 1957, 269-281.

[26c] D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*, J. Appl. Mech., **26**, 1959, 61-68.

[25a]. G. EASON, *The load carrying capacity of cylindrical shells subjected to a ring of forces*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 1959, 169-181.

[26a] G. EASON, R. T. SHIELD, *The influence of free ends on the load-carrying capacity of cylindrical shells*, J. Mech. Phys. Solids, **4**, 1955, 17-27.

[27a] J. P. ELINGTON, *Creep collapse of tubes under external pressure*, Developm. and Engng. Group, U. K. Atomic Energy Author., Rep. No 162, 1960.

[28a] М. И. ЕРХОВ, *Конечное соотношение между силами и моментами при пластической деформации оболочек*, Строит. Мех. Расч. Сооруж., № 3, 1959, 38-41.

[28b] М. И. ЕРХОВ, *Определение несущей способности многопролетного тонкостенного трубопровода*, Вопросы теории пластичности и прочности строит. констр., Труды ЦНИИСК, Вып.4, Москва 1962, 168-175.

[28c] М. И. ЕРХОВ, *Симметричная деформация цилиндрической оболочки за пределом упругости*, Вопросы теории пластичности и прочности строит. конст., Труды ЦНИИСК, Вып. 4, Москва 1961, 176-198.

[29a] М. И. ЭСТРИН, *Расчет пологих осесимметрических оболочек из упруго-вязкого материала с учетом больших прогибов*, Вопросы теории пластичности и прочности строит. констр., Труды ЦНИИСК, Вып. 4, Москва 1961, 123-134.

[30a] С. М. ФЕЙНБЕРГ, *Принцип предельной напряженности*, Прикл. Мат. Мех., **12**, 1948, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 4, 1960, 101-111.

[30b] С. М. ФЕЙНБЕРГ, *Пластическое течение пологой оболочки для осесимметрической задачи*, Прикл. Мат. Мех., **21**, 1957, 544-549.

[31a] М. Р. ФЕДЬДМАН, *Расчет пологих оболочек с учетом ползучести материала*, Научн. Сообщ. Днепропетр. Инж. Инст., вып. 56, 1960.

[32a] M. N. FIALKOV, *Limit analysis of simply supported circular shell roofs*, J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, **84**, Sep. 1958, 1796.

[33a] I. FINNIE, *Stress analysis in the presence of creep*, Appl. Mech. Rev., **13**, 1960, 705-712.

[33b] I. FINNIE, *Steady-state creep of a thick-walled cylinder under combined axial load and internal pressure*, J. Basic Engng, **3**, 1960, 689-694.

[34a] W. FLÜGGE, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin 1960.

[35a]. W. FREIBERGER, *Minimum weight design of cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 576-580.

[35b] W. FREIBERGER, *On the minimum weight design problem for cylindrical sandwich shells*, J. Aero. Sci., **24**, 1957, 847-848.

[36a] A. M. FREUDENTAL, H. GEIRINGER, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Handbuch der Phys., **6**, 229-433, Spinger-Verlag, Berlin 1958.

[37a]. A. E. GEMMA, *The creep deformation of symmetrically loaded circular cylindrical shells*, J. Aero Space/Sci., **27**, 1960, 953-954.

[37b] A. E. GEMMA, *The steady creep of long pressurized cylinders*, J. Aero/Space Sci. **29**, 1962, 352-353.

[38a] A. E. GEMMA, J. T. WARFIELD, *The creep deformation of symmetrically loaded shells*, J. Aero/Space Sci., **28**, 1961, 507-508.

[39a] G. GERARD, A. G. GILBERT, *A critical strain approach to creep buckling of plates and shells*, J. Aero/Space Sci., **25**, 1958, 429-434, 458.

[40a] И. С. ГЕРАСИМОВ, *Об осесимметричной упруго-пластической деформации замкнутой круговой цилиндрической оболочки*, Инж. Сборник, 28, 1960, 241-246.

[41a] W. H. GLANVILLE, *The creep and flow of concrete under constant load*, Building Res. Tech., Paper No 12, HMSO, London 1930.

[42a] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, *Некоторые вопросы механики деформируемых сред*, Гос. Изд. Тех. Теор. Лит., Москва 1955.

[43a] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, Н. А. НИКОЛАЕНКО, *Ползучесть и несущая способность оболочек*, Госстройиздат, Москва 1960.

[43b] И. И. ГОЛЬДЕНБЛАТ, Н. А. НИКОЛАЕНКО, *Теория ползучести строительных материалов и ее приложения*, Гос. Изд. Лит. Стр. Арх. Стр. Матер., Москва 1960.

[44a] Г. С. ГРИГОРЯН, *К расчету безмоментных тонких железобетонных оболочек произвольно очертания с учетом ползучести бетона*, Изв. АН Армянской ССР, Серия физ.-мат., **10**, № 4, 1957, 67-91.

[45a] A. A. GVOZDEV, *The determination of the value of the collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation*, Inter. J. Mech. Sci., **1**, 1960, 322-335, [ros. wyd. 1936].

[45b] А. А. ГВОЗДЕВ, *Теория предельного равновесия*, Стройиздат, Москва 1949.

[46a] Г. И. ХАЗАЛИЯ, *Расчет пологих сферических оболочек по предельному состоянию*, Сообщ. АН Груз. ССР, **17**, 1956, 815-822.

[47a] R. HILL, *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Univ. Press., Oxford 1950.

[47b] R. HILL, *A note on estimating the yield point loads in a plastic-rigid body*, Phil. Mag., **43** (7), 1952, 353-355.

[48a] H. H. HILTON, *Thermal stresses in thick-walled cylinders exhibiting temperature-dependent viscoelastic properties of the Kelvin type*, Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, ASME, New York 1955, 547-553.

[49a] P. G. HODGE, *Rigid plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **21**, 1954, 336-342.

[49b] P. G. HODGE, *Displacements in an elastic-plastic cylindrical shells*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 73-79.

[49c] P. G. HODGE, *Piecewise linear isotropic plasticity applied to circular cylindrical shell with symmetrical radial loading*, J. Franklin Inst., **263**, 1957, 13-33.

[49d] P. G. HODGE, *The linearization of plasticity problems by means of nonhomogeneous materials*, Proc. Symp. Nonhomog. Probl., Warsaw 1958, Pergamon Press, London 1959, 147-156.

[49e]. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Rationally Symmetric Shells*, DOMIIT, Rept 1-6, Chicago 1959.

[49f] P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill, New York 1959.

[49g] P. G. HODGE, *The collapse load of a spherical cap*, Proc. 4th Midwest Conf. Solid Mech., Austin, Texas 1959, 108-126.

[49h] P. G. HODGE, *Plastic analysis of circular conical shells*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 696-700.

[49i] P. G. HODGE, *Boundary value problems in plasticity*, Proc 2nd. Symp. Naval Struct. Mech. (Providence 1960), Pergamon Press, Oxford 1960, 297-334.

[49j] P. G. HODGE, *Yield conditions for rotationally symmetric shells under axisymmetric loading*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 323-331.

[49k] P. G. HODGE, *The Mises yield condition for rotationally symmetric shells*, Quart. Appl. Math., **18**, 1961, 305-311.

[49l] P. G. HODGE, *A comparison of yield conditions in the theory of plastic shells*, Problem in Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia, Pa, 1961, 165-177.

[50a] P. G. HODGE, C. LAKSHMIKANTHAM, *Limit Analysis of Shallow Shells of Revolution*, DOMIIT, Rep. 1-16, Chicago 1962.

[51a] P. G. HODGE, S. V. NARDO, *Carrying capacity of an elastic–plastic cylindrical shell with linear strain–hardening*, J. Appl. Mech., **26**, 79-85, 1958.

[52a] P. G. HODGE, J. PANARELLI, *Interaction curves for circular cylindrical shells according to the Mises or Tresca yield criteria*, J. Appl. Mech., **29**, 1962, 375-380.

[53a] P. G. HODGE, F. ROMANO, *Deformations of an elastic–plastic cylindrical shell with linear strain–hardening*, J. Mech. Phys. Solids, **4**, 1956, 145-161.

[54a] N. J. HOFF, *Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformation*, Quart. Appl. Math., **12**, 1954, 49-55.

[54b] N. J. HOFF, *Theories of creep buckling*, Proc. 3rd U.S.Nath. Congr. Appl. Mech. (Providence 1958), ASME, New York 1959, 29-49.

[54c] N. J. HOFF, *On a critical strain approach to creep buckling of plates and shells*, J. Aero/Space Sci., **26**, 1959, 117-118.

[55a] N. J. HOFF, W. E. JASHMAN, W. NACHBAR, *A study of creep collapse of a long circular cylindrical shell under uniform external pressure*, J. Aero/Space Sci., **26**, 1959, 663-669.

[56a] K. HRUBAN, *Skořepiny tvaru českých kleneb*, Sbornik VŠT, Brno, 20, No 83, 1951.

[57a] CH. HWANG, *Thermal stresses in an elastic, work–hardening sphere*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 629-634.

[58a] А. А. ИЛЬЮШИН, *Некоторые вопросы теории пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех., **7**, 1943, 245-272.

[58b] А. А. ИЛЬЮЩИН, *Приближенная теория упруго–пластических деформаций осесимметричной оболочки*, Прикл. Мат. Мех., **8**, 1944, 15-24.

[58c] А. А. ИЛЬЮШИН, *Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **9**, 1945, 101-140.

[58d] А. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва 1948.

[59a] H. ISLER, *Eine Kuppel gleicher Festigheit*, ZAMP, **10**, 1959, 576-578.

[60a] А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Мат. Журн., 6, 1954, 314-325.

[61a] M. JANAS, *Nośność graniczna przekrycia walcowego*, Arch. Inżyn. Lądow., **8**, 1962, 365-374,

[62a] K. W. JOHAHSEN, *Critical notes on calculation and design of cylindrical shells*, Final Rep. 3rd Congr. IABSE, Liege 1948, 601-606.

[63a] Л. М. КАЧАНОВ, *Ползучесть овальных и разностенных труб*, Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 9, 65-71.

[63b] Л. М. КАЧАНОВ, *Приближенное решение задач установившейся ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 3, 84-95.

[63c] Л. М. КАЧАНОВ, *Теория ползучести*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1960.

[64a] S. KALISZKY, *Untersuchung einer Kegelstumpf–Schale aus Stahlbeton auf Grund de, Traglastverfahrens*, Acta Techn. Hung., 34, 1961, 159-175.

[65a] G. DE KAZINCZY, *The limit design of shells*, Final Rep. 3rd Congr. IABSE, Liege 1948, 616-621.

[66a] P. KLEMENT, *Theorie der elastisch–plastischen Zylinderschale*, Österr. Ing. Arch., **16**, 1962, 199-211.

[67a] J. A. KÖNIG, *Stan sprężysto–plastyczny powloki walcowej*, Rozpr. Inżyn., w druku.

[68a] W. T. KOITER, *Stress–strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic–plastic materials with singular yield surface*, Quart. Appl. Mech., **11**, 1953, 350-354.

[68b] W. T. KOITER, *Genaral theorems for elastic–plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, 1, 1960, 167-224.

[69a] А. П. КУЗНЕЦОВ, Л. М. КУРШИН, *Устойчивость круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести*, ПМТФ, Прикл. Мех. Тех. Физ., № 3, 1962, 66-72.

[70a] E. H. LEE, *Stress analysis an visco–elastic bodies*, Quart. Appl. Math., 2, **13**, 1955, 183-190.

[71a] I. MENYHÁRD, *Die statische Berechnung von zylindrischen Stahlbeton — Behältern auf Grund der Bruchtheorie*, Vorbericht des V Kongr. Internat. Vereinigung f. Brückenbau u. Hochbau, Lisbon 1956, 45-48.

[72a] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Изгиб и кручение тонкостенных цилиндрических оболочек за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех., **14**, 1950, 253-264.

[72b] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Граничные условия при изгибе и кручении тонкостенных оболочек за пределом упругости*, Прикл. Мат. Мех., **14**, 1950, 537-542.

[72c] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Прикладная теория упруго-пластических оболочек и применение ее к расчету конструкций*, Инж. Сборник, **10**, 1951, 35-70.

[72d] Р. А. МЕЖЛУМЯН, *Определение несущей способности тонкостенной конструкции с учетом упрочнения материала*, Прикл. Мат. Мех., **15**, 1951, 175-182.

[73a] М.Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О несущей способности первоначально анизотропных оболочек*, Докл. АН СССР, 98, 1954, 921-923.

[73b] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О пластическом течении анизотропных оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1955, 67-80.

[73c] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Общая теория анизотропных жестко пластичеких оболочек*, Изв. АН СССР, ОТН, No 1, 1957, 85-94.

[73d] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Rigid-plastic analysis of anisotropic plates and shells*, Congr. Int. Mec. Appliqué, (Bruxelles 1956), Actes, **8**, 1957.

[73e] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Упруго-пластическое равновесие анизотропных оболочек*, Сообщ. АН Груз. ССР, **20**, 1958, 13-20.

[73f] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *Анализ веса и прочности жестко-пластических анизотропных оболочек*, Arch. Mech. Stos., **11**, 1959, 17-31.

[73г] М. Ш. МИКЕЛАДЗЕ, *О равнопрочных пластичных оболочках*, Сообщ. АН Груз. ССР 25, 1960, 391-398.

[74a] P. B. MORICE, *Research on concrete shell structures*, Proc. 1st Symp. Shell. Roof. Constr.) London 1952, Cem. Concr. Assoc., London 1954, 99-113.

[75a] Z. MRÓZ, *The load-carrying capacity of orthotropic shells*, Arch. Mech. Stos., **12**, 1960, 85-107.

[75a] Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., **19**, 1961, 127-135.

[76a] H. MUGURUMA, *Two dimensional creep deformation of concrete*, Proc. Symp. Non-Classical Shell Problems, Warsaw 1963.

[77a] P. M. NAGHDI, W. C. ORTHWEIN, *Response of shallow visco-elastic spherical shells to time dependent axisymmetric loads*, Quart. Appl. Math., **18**, 1960/61, 107-121.

[78a] T. NAKAMURA, *Plastic analysis of shells of revolution under axi-symmetric loads*, Ph. D. Dissertation, Stanford Univ., 1961.

[78b] T. NAKAMURA, *Limit analysis of non-symmetric sandwich shells*, Proc. Symp. Non-Classical Shell Problem, Warsaw 1963.

[79a] D. NIEPOSTYN, *The limit analysis of an orthotropic circular cylinder*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956, 565-580.

[80a] W. NOWACKI, *Transient thermal stresses in viscoelastic plates and shells*, Advances in Aeronautical Sci, Pergamon Press, Oxford 1962, 947-970.

[81a] F. K. G. ODQVIST, *Influence of primary creep on stresses in structural parts*, Trans. Roy. Inst. Techn., No 66, 1953,

[81b] F. K. G. ODQVIST, *Applicability of the elastic analogue to creep problems of plates, membranes and beams*, Creep in Structures, Springer, Berlin 1962, 137-160.

[82a] F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Kriechfestigkeit metalischer Werkstoffe*, Springer, Berlin 1962.

[83a] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Problems of limit analysis and limit design of non-homogeneous axially symmetric shells*, Proc. Symp. Concr. Shell. Roof. Constr., Oslo 1956, Teknisk Ukeblad, Oslo 1958, 249-256.

[83b] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung*, Acta Techn. Hung., **26**, 1959, 55-77.

[83c] W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Théorie de la capacité portante des constructions non-homogènes et orthotropes*, Ann. Inst. Techn. Bat. Trav. Publ., **13**, 1960, 517-535.

[84a] W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalised distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elasto-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., **8**, 1956, 85-110.

[85a] E. T. Onat, *The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading*, Quart. Appl. Math., **13**, 1955, 67-72.

[85b] E. T. Onat, *Analysis of shells of revolution composed of work hardening material*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 1958, 45-59.

[85c] E. T. Onat, *Plastic analysis of shallow conical shells*, J. Engng Mech. Div., Proc. ASCE, 1960, No 6, **86**, 1-12.

[86a] E. T. Onat, W. Prager, *Limit analysis of shells of revolution*, Proc. Ned. Akad. Wetensch., Ser. B, **57**, 1954, 534-548.

[86b] E. T. Onat, W. Prager, *Limits of economy of materials in shells*, De Ingenieur, No 10, **67**, 1955, 46-49.

[87a] E. T. Onat, H. Yüksel, *On the steady creep of shells*, Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (Providence 1958), ASME, New York 1959, 625-630.

[88a] E. T. Onat, S. Yamantürk, *On thermally stressed elastic-plastic shells*, J. Appl. Mech., **29**, 1962, 108-114.

[89a] А. М. Овечкин, *Уравнение равновесия железо-бетонных куполов в стадии предельного состояния*, Научн. докл. высш. школ. Строительство, No 1, 1958, 35-46.

[89b] А. М. Овечкин, *Расчет железобетонных осесимметрических конструкций (оболочек)*, Гос. Изд. Лит. Стр. Арх. Стр. Матер., Москва 1961.

[90a] В. М. Панферов, *О сходимости метода упругих решений в теории упруго-пластических деформаций оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **13**, 1949, 79-94.

[90b] В. М. Панферов, *О применимости вариационных методов к задачам теории малых упруго-пластических деформаций*, Прикл. Мат. Мех., **16**, 1952, 319-322.

[91a] B. Paul, *Carrying capacity of elastic-plastic shells with various end conditions under hydrostatic pressure*, J. Appl. Mech., **26**, 1959, 553-560.

[92a] B. Paul, P. G. Hodge, *Carrying capacity of elastic-plastic shells under hydrostatic pressure*, Proc. 3rd US. Nat. Congr. Appl. Mech., (Providence 1958), ASME, New York 1959, 631-640

[93a] N. Perrone, *Strain hardening solutions to axisymmetric discs and tubes*, J. Appl. Mech.,. **27**, 1960, 45-53.

[94a] N. Perrone, P. G. Hodge, *Applications of consistent theory for strain hardening plastic solids*, PIBAL Rep. 403, Polyt. Inst., Brooklyn 1957.

[94b] N. Perrone, P. G. Hodge, *On strain-hardened circular cylindrical shells*, J. Appl. Mech. **27**, 1960, 489-495.

[95a] H. Poritsky, *Effect of creep on stresses in cylindrical shells*, Creep in Structures, Springer, Berlin 1962, 229-244.

[96a] W. Prager, *The general theory of limit design*, Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. (Istanbul 1952), **2**, 1956, 65-72.

[96b] W. Prager, *A new method of analysing stress and strain in work-hardening plastic solids*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 493-496.

[96c] W. Prager, *Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.

[96d] W. Prager, *On the plastic analysis of sandwich structures*, Probl. of Continuum Mechanics SIAM, Philadelphia, Pa, 1961, 347-349.

[97a] W. Prager, P. G. Hodge, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Wiley, New York 1951.

[98a] И.Е. Прокопович, *О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках*, Инж. Сборник, **34**, 1956, 151-164.

[99a] Ю.Н. Работнов, *Равновесие упругой среды с последействием*, Прикл. Мат. Мех., **12**, 1948, 53-62.

[99b] Ю.Н. Работнов, *Приближенная техническая теория упруго-пластических оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **15**, 1951, 167-174.

[99c] Yu. N. Rabotnov, *The theory of creep and its applications*, Proc. 2nd Symp. Nav. Struct. Mech. (Providence 1960), Pergamon Press, Oxford 1960, 338-346.

[100a] Ю.Н. Работнов, С.А. Шестериков, *Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. Мат. Мех., **21**, 1957, 406-412.

[101a] A. C. VON RIEL, W. J. BERANEK, A. L. BOUMA, *Tests on shell roof models of reinforced concrete mortar*, Proc. 2nd Symp. Shell. Roof. Constr. (Oslo 1957), Teknisk Ukeblad, Oslo 1957, 315-324.

[102a] В. И. РОЗЕНБЛЮМ, *Расчеты некоторых деталей турбин в условиях ползучести*, Котлотурбостроение, № 4, 1951.

[102b] В. И. РОЗЕНБЛЮМ, *Приближенная теория равновесия пластических оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **18**, 1954, 289-302.

[102c] В. И. РОЗЕНБЛЮМ, *О приближенных уравнениях ползучести*, Изв. Акад. Наук СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 5, 1959, 157-160.

[102d] В. И. РОЗЕНБЛЮМ, *Об условии пластичности для тонкостенных оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **24**, 1960, 364-366.

[102e] В. И. РОЗЕНБЛЮМ, *О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек*, ПМТФ, Ж. Прикл. Мех. Тех. Физ., № 4, 1960, 82-84.

[103a] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Изучение ползучести вращающейся трубы на основе интегрально-операторных уравнений*, Доповиди АН УССР, № 3, 1960, 309-313.

[103b] М. И. РОЗОВСКИЙ, *Влияние фактора времени на прочность сферической оболочки подвергнутой внутреннему давлению*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машиностр., № 4, 1961, 124-129.

[104a] В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, *Состояния предельного равновесия сопряжений оболочек вращения*, Научн. Сообщ., АСиА СССР, Вып. 1, Москва 1957.

[105a] В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, М.Н. РУЧИНСКИЙ, *Несущая способность цилиндрических сосудов с коническими и сферическими днищами*, Научн. Сообщ. Всес. Инст. Строит. Магистр. Трубопроводов, Москва 1959.

[106a] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*, Гостехиздат, Москва 1949.

[106b] A. R. RZHANITSYN, *The design of plates and shells by the kinematical method of limit equilibrium*, IX Congr. Appl. Mech. (Brussel 1956), Actes, **6**, 331-340.

[106c] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Пластические деформации трубы при осесимметричной нагрузке*, Изд. АН СССР, ОТН, № 8, 1958, 60-65.

[106d] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет оболочек методом предельного равновесия*, Иссл. вопр. теории пластич. прочности строит. констр., ЦНИИСК, Москва 1958, 7-35.

[106e] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет железобетонных оболочек методом продольного равновесия*, Теория расчета и констр. железобетон. констр. ЦНИИСК, Москва 1958, 155-175.

[106f] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет пологих оболочек методом предельного равновесия*, Строит. Мех. Расч. Сооруж., № 1, 1959, 5-11.

[106g] А. Р. РЖАНИЦЫН, *Пологие оболочки и волнистые настилы*, Научн. сообщ. АСиА СССР, Вып. 14, Москва 1960.

[107a] R. SANKARANARAYANAN, W. OLSZAK. *Yield surfaces for brittle plastic shells*, Proc. Symp. Non-Classical Shell Problems, Warszawa 1963.

[108a] M. SAVE, *On yield conditions in generalised stresses*, Quart. Appl. Math., **19**, 1961, 259-267.

[109a] A. SAWCZUK. *Piece-wise linear theory of anisotropic plasticity and its application to limit analysis problems*, Arch. Mech, Stos., **11**, 1959, 541-557.

[109b] A. SAWCZUK, *Yield condition for anisotropic shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., **Cl. IV.**, **8**, 1960, 213-227.

[109c] A. SAWCZUK, *On the theory of anisotropic plates and shells*, Arch. Mech. Stos., **13**, 1961, 355-366.

[109d] A. SAWCZUK, *On experimental foundations of the limit analysis theory of reinforced concrete shells*, Shell Research North Holland, Amsterdam 1961, 217-231.

[110a] A. SAWCZUK, P. G. Hodge, *Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells*, J. Franklin Inst., **269**, 1960, 362-374.

[111a] A. SAWCZUK, Th. JAEGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer, Berlin 1963.

[112a] A. SAWCZUK, J. A. KÖNIG, *Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych*, Arch. Inżyn. Lądow., **8**, 1962, 161-183.

[113a] A. SAWCZUK, W. OLSZAK, *A method of limit analysis of reinforced concrete tanks*, Proc. Int. Coll. Shell Calc. Methods, (Brussels 1961), North Holland, Amsterdam 1962, 416-437.

[114a] A. SAWCZUK, J. RYCHLEWSKI, *On yield surfaces for plastic shells*, Arch. Mech. Stos., **12**, 1960, 29-53.

[115a] G. S. SHAPIRO, *On yield surfaces for ideally plastic shells. Problems of Continuum Mechanics*, SIAM. Philadelphia, 1961, 414-418.

[116a] R. T. SHIELD, *Optimum design methods for structures*, Proc. 2nd. Symp. Naval Struct. Mech. (Providence 1960). Pergamon Press, Oxford 1960, 580-591.

[116b] R. T. SHIELD, *On the optimum design of shells*, J. Appl. Mech., **27**, 1960, 316-322.

[117a] R. T. SHIELD, D. C. DRUCKER, *Limit strength of thin-walled pressure vessels with an ASME standard torispherical head*, Proc. 3rd US. Nat. Congr. Appl. Mech. (Providence 1958), ASME, New York 1959, 665-672.

[118a] E. SUNDSTRÖM, *Creep buckling of cylindrical shells*, Trans. Roy. Inst. Techn., No 115, 1957.

[119a] C. SZMODITS, *A hiperbolikus paraboloidhéj töreselmelete*, Epités-és közlekedestudományi, Közlemények, 3, No 1-2, 1959.

[120a] С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Выпучивание при ползучести*, Прикл. Мат. Мех., **25**, 1961, 754-755.

[121a] TEIN WAH, R. KIRK, *Creep collapse of long cylindrical shells under high temperature and external pressure*, J. Aero/Space Sci., **28**, 1961, 177-188, 208.

[122a] E. TUNGL, *Durchschlagen einer flachen Kugelschale aus viscoelastischem Material*, Österreichisches Ing.-Arch., **16**, 1962, 286-298.

[123a] B. F. DE VEUBEKE, *Creep Buckling, High Temperature Effects in Aircraft Structures*, AGAR Dograph 28, Pergamon Press, 1958.

[124a] A. M. WAHL, *Analysis of creep in rotating discs based on the Tresca criterion and associated flow rule*, J. Appl. Mech., **23**, 1956, 231-234.

[125a] М. А. ЗАДОЯН, *О ползучести цилиндрической трубы при высоких температурах*, Докл. АН Армянской ССР, **31**, 1960, 201-209.

[126a] H. ZIEGLER, *Kuppeln gleicher Festigkeit*, Ing. Archiv, **26**, 1958, 378-382.

[127a] Б. В. ЗВЕРКОВ, *Ползучесть труб, нагруженных внутренним давлением и крутящим моментом*, Теплоэнергетика, № 8, 1959, 53-57.

[128a] M. ŻÓRAWSKI, *Determination of stresses generated in a layer and a viscoelastic closed spherical shell*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **8**, 1960, 557-563.

[129a] M. ŻYCZKOWSKI, *Die Grenzflächen in der Austrengungstheorie*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, **9**, 1961, 667-676.

Резюме

ВОПРОСЫ НЕУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Работа является обзором главных направлений исследований в области неупругих оболочек. Представляя основные уравнения для неупругих тел, авторы проводят дискуссию, касающуюся главных моделей вязких и пластических тел. Рассматриваются линейно-вязко-упругие оболочки. В случае нелинейной вязко-упругости рассматриваются специально вопросы стационарной ползучести. В дальнейшем авторы обсуждают теорию упруго-пластической деформации. В заключение рассматриваются задачи, касающиеся несущей способности и проектирование оболочек на предельную нагрузку.

Приводится обширный перечень литературы.

S u m m a r y

INELASTIC SHELL PROBLEMS

An attempt is made to survey the main trends in the field of inelastic shells. After the fundamental equations for inelastic solids being recalled, the main types of viscous and plastic response are analysed. Linearly viscoelastic shells are discussed. In nonlinear visco-elasticity special attention is paid to steady creep problems. Further, the theory of elastic-plastic deformation is discussed. Finally, the problems of limit analysis and limit design of shells are considered. Relevant reference to the literature is given.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 grudnia 1962 r.