

OSCYLACJE RAKIETY LECĄCEJ PO TORZE FALISTYM W ATMOSFERZE ZIEMI¹

JERZY MARYNIAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W wielu pracach rozpatrywane jest zagadnienie powrotu raket na ziemię i wejście raket czy też pojazdów kosmicznych w atmosferę ziemi.

STALONY-DOBRAŃSKI [10] rozpatrując wejście rakiety do atmosfery ziemi stwierdza, że wpływ atmosfery na tor lotu uwidacznia się dopiero poniżej wysokości 97 km. Wysokość tę nazywa «wysokością efektywną» i uważa, że dopiero od niej może być rozpatrywany lot pojazdu kosmicznego jako wejście do atmosfery. Ze względu na tor wejście pojazdów kosmicznych (raket) w atmosferę ziemi dzielimy na: wejście po torze balistycznym, wejście po spirali (szybowanie na wysokości równoważnej) i wejście po torze falistym. Podział ten jest właściwy również dla raket dalekiego zasięgu.

Rakieta szybująca leci lotem ślizgowym na wysokości, która została nazwana przez SANGERA «wysokością równoważną». Wysokość ta maleje ze wzrostem obciążenia jednostkowego powierzchni nośnej i zmniejszeniem prędkości lotu [2]. Siła nośna niezbędna do lotu tej rakiety równoważy różnicę ciężaru i siły odśrodkowej wywołanej krzywoliniowym ruchem wokół ziemi; wtedy lot jest możliwy dla bardzo małych kątów toru.

Tor rakiety lecącej po torze falistym stanowi szereg odcinków toru balistycznego połączonych ze sobą fazą rykoszetowania.

Przy każdym «skoku» minimalna wysokość toru rakiety jest zawsze mniejsza od «wysokości równoważnej», na której mogłaby lecieć rakieta szybująca z taką samą prędkością i z tym samym współczynnikiem siły nośnej. Lot rakiety po torze falistym jest możliwy wtedy, gdy kąt toru na początku skoku nie przewyższa 12° [2] i gdy rakieta dysponuje siłą nośną (ma powierzchnie nośne).

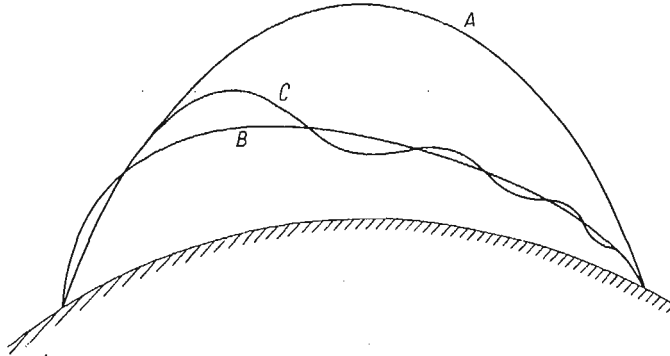
Zagadnieniem raket lecących po torze falistym pierwszy zajmował się SANGER nazywając taką rakieta «rakieta rykoszetującą». W dalszym ciągu nad zagadnieniami lotu «rakiety rykoszetującej» pracowali FRIEDRICH i DORE [1], a następnie TOBAK i ALLEN [3] rozpatrywali stateczność dynamiczną.

Ponieważ «rykoszetowanie» związane jest z ruchem na granicy dwóch ośrodków, a rakieta porusza się właściwie w jednym ośrodku, to jest w atmosferze ziemi

¹ Fragment niniejszej pracy był przedstawiony na IV Ogólnopolskiej Konferencji Techniki Rakietowej i Astronautyki w Katowicach w 1963 r.

o zmiennej gęstości, więc słuszniej jest używać zwrotu «rakieta lecąca po torze falistym».

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę ruchu i oscylacji kąta natarcia rakiety poruszającej się w atmosferze ziemi po torze falistym. Oparto się na założeniach przyjętych przez TOBAKA i ALLENA w pracy [3] i przyjęto ciągłość atmosfery. TOBAK i ALLEN w oparciu o pracę [1] obliczyli współrzędne toru rakiety i oscylacje



Rys. 1. Tory rakiet dalekiego zasięgu. A—rakieta balistyczna, B—rakieta szybująca, C—rakieta lecąca po torze falistym (rakieta rykoszetująca)

kąta natarcia wokół środka ciężkości rakiety. Analizę przeprowadzili na przykładzie rakiety rykoszetującej przyjmując «nieciągły» model atmosfery. Powyższe założenie wprowadza osobliwość w chwili początkowej, co rzutuje na rozwiązanie zagadnienia. Uniknięcie uproszczeń stosowanych w pracy [3] dało w rozwiązaniach znaczne różnice nie tylko ilościowe ale i jakościowe.

Przyjęte oznaczenia

$Cm_\alpha = \frac{\partial Cm}{\partial \alpha}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem kąta natarcia,
$Cm_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial Cm}{\partial (\dot{\alpha} l)}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem prędkości zmiany kąta natarcia,
$Cm_\delta = \frac{\partial Cm}{\partial \delta}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem kąta wychylenia steru,
$Cm_q = \frac{\partial Cm}{\partial \left(\frac{\dot{\theta} l}{V}\right)}$	pochodna współczynnika momentu pochyłającego względem kątowej prędkości pochylenia,
	C_x współczynnik oporu
	C_z współczynnik siły nośnej,
	C_m współczynnik momentu,
$Cz_\alpha = \frac{\partial Cz}{\partial \alpha}$	pochodna współczynnika siły nośnej względem kąta natarcia,
g [m/sek ²]	przyspieszenie ziemskie,
h [m]	wysokość lotu,
I [kg m sek ²]	moment bezwładności,
l [m]	długość rakiety,

$m \left[\frac{\text{kgsek}^2}{\text{m}} \right]$	masa rakiety,
$Q \text{ [kG]}$	ciężar rakiety,
$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \text{ [kG/m}^2\text{]}$	ciśnienie dynamiczne,
$P_z \text{ [kG]}$	siła nośna,
$P_x \text{ [kG]}$	opór,
P_z/P_x	doskonałość,
$R \text{ [m]}$	promień ziemi,
$S \text{ [m}^2\text{]}$	powierzchnia nośna,
$s \text{ [m]}$	droga (długość toru),
$t \text{ [sek]}$	czas,
$V \text{ [m/sek]}$	prędkość lotu,
$V_E \text{ [m/sek]}$	prędkość lotu początkowa (przy wejściu),
$X \text{ [m]}$	długość mierzona wzdłuż ziemi,
$y \text{ [m]}$	wysokość nad powierzchnią ziemi,
$y_E \text{ [m]}$	wysokość początkowa,
$\alpha \text{ [rad]}$	kąt natarcia,
$\alpha_E \text{ [rad]}$	kąt natarcia początkowy (przy wejściu),
$\alpha_s \text{ [rad]}$	kąt natarcia statyczny,
$\alpha_0 \text{ [rad]}$	kąt natarcia oscylujący,
$\beta \text{ [m}^{-1}\text{]}$	współczynnik gęstości powietrza,
$\gamma \text{ [rad]}$	kąt toru,
$\gamma_E \text{ [rad]}$	kąt toru początkowy (przy wejściu),
$\gamma_s \text{ [rad]}$	kąt toru statyczny,
$\gamma_z \text{ [rad]}$	kąt toru zastępczy,
$\delta \text{ [rad]}$	kąt wychylenia steru,
$\theta \text{ [rad]}$	kąt pochylenia rakiety,
$\rho \left[\frac{\text{kgsek}^2}{\text{m}^4} \right]$	gęstość powietrza,
$\sigma \text{ [m]}$	promień bezwładności.

2. Równania ruchu i założenia ogólne

Ruch rakiety poruszającej się w atmosferze został opisany równaniami przedstawionymi przez TOBAKA i ALLENA [3].

Ogólne równanie ruchu przy założeniu, że w każdym cyklu oscylacji prędkość V i ciśnienie dynamiczne q pozostają niezmiennie, zostały ujęte przez Tobaka i Allena w postaci dwóch układów:

pierwszy układ określający tor środka ciężkości rakiety (właściwie układ ten odpowiada wolnym oscylacjom, tzn. charakteryzuje tor falisty rakiety)

$$\begin{aligned}
 & -mV - CxqS + mg \sin \gamma_s = 0, \\
 & mV\dot{\gamma}_s + gSCz_a \alpha_s + m \left(\frac{V^2}{R+y} - g \right) \cos \gamma_s = 0, \\
 & I\dot{\theta}_s - qSl \left(Cm_a \alpha_s + Cm_q \frac{\dot{\theta}_s l}{V} + Cm_\delta \delta + Cm_{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_s l}{V} \right) = 0, \\
 & \theta_s = \alpha_s - \gamma_s;
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

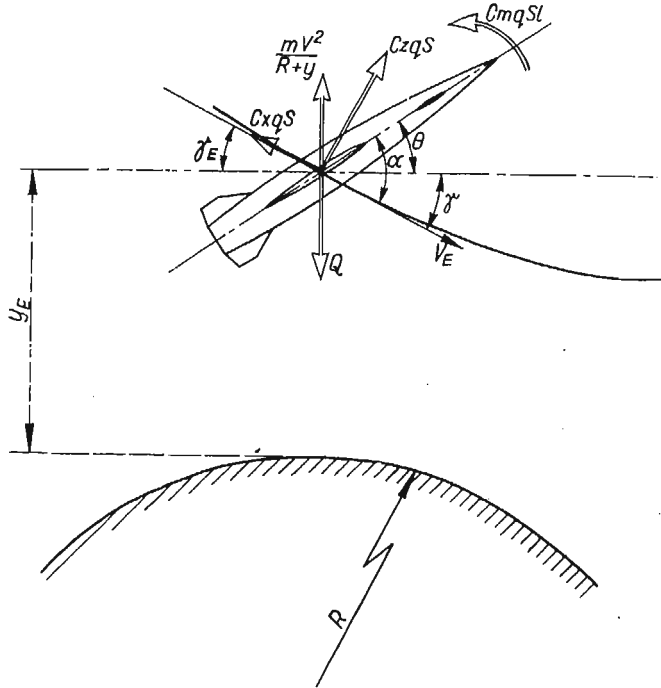
drugi układ określający oscylacje rakiety względem środka ciężkości (układ ten odpowiada oscylacjom szybkim)

$$mV\dot{\gamma}_0 + qSCz_\alpha \alpha_0 = 0,$$

$$(2.2) \quad I\ddot{\theta}_0 - qSl \left(Cm_\alpha \alpha_0 + Cm_q \frac{\dot{\theta}_0 l}{V} + Cm_{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_0 l}{V} \right) = 0,$$

$$\theta_0 = \alpha_0 - \gamma_0.$$

Odpowiednie kąty oznaczono na rys. 2. (por. [3] i [1].)



Rys. 2. Oznaczenia kątów i wielkości początkowych

Przy dalszym rozpatrywaniu ruchu rakiety «rykoszetującej» od atmosfery, której tor przedstawia linię falistą o malejącej amplitudzie, przyjęto następujące założenia upraszczające [3]:

a) współczynniki aerodynamiczne są niezależne od liczby Macha (lot odbywa się z prędkością ~ 4000 m/sek),

b) współczynnik oporu C_x jest niezależny od kąta natarcia i prędkości pochylenia,

c) stosunek siły nośnej do oporu jest wielkością stałą,

d) pominięto składnik $m \left(\frac{V^2}{R+y} - g \right)$ zawierający różnicę siły odśrodkowej i składowej ciężaru rakiety.

Prędkość lotu V i gęstość powietrza ρ wyrazimy za pomocą funkcji kąta toru γ ; gęstość powietrza zmienia się wraz z wysokością

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta y},$$

gdzie

$$\varrho_0 = 0,178 \text{ kG sek}^2/\text{m}^4, \quad \beta = \frac{1}{6700} \text{ m}^{-1}.$$

Drugie równanie układu (2.1) po uproszczeniu ma postać;

$$mV \frac{d\gamma_s}{dt} + \frac{1}{2} \varrho V^2 SCz = 0;$$

podstawiając do powyższego równania zależność na ϱ i zależność kinematyczną

$$V \sin \gamma_s = - \frac{dy}{dt} = - \frac{dy}{d\gamma_s} \frac{d\gamma_s}{dt}$$

po scałkowaniu otrzymamy

$$(2.3) \quad y = - \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{2m\beta}{\varrho_0 SCz} (\cos \gamma_s - \cos \gamma_E) + e^{-\beta y_E} \right].$$

Korzystając z powyższej zależności otrzymamy

$$(2.4) \quad \varrho = \varrho_0 e^{-\beta y} = \frac{2m\beta}{SCz} (\cos \gamma_s - \cos \gamma_E) + \varrho_0 e^{-\beta y_E}.$$

Wyrażenie na zmianę gęstości w funkcji kąta toru (2.4) różni się od przyjętego w pracach [1] i [3] składnikiem $\varrho_0 e^{-\beta y_E}$. Składnik ten został również pominięty wcześniej w pracach SAŃGERA dotyczących rakiety rykoszetującej. Uwzględnienie tego składnika w niniejszej pracy rzutuje na tok rozwiązywania zagadnienia i daje nie tylko zmiany ilościowe, ale i zasadnicze jakościowe.

Prędkość lotu V znajdujemy z pierwszego i drugiego równania (2.1) w postaci

$$(2.5) \quad V = V_E e^{(\gamma_s - \gamma_E)} \frac{Px}{Pz}.$$

3. Tor środka ciężkości rakiety

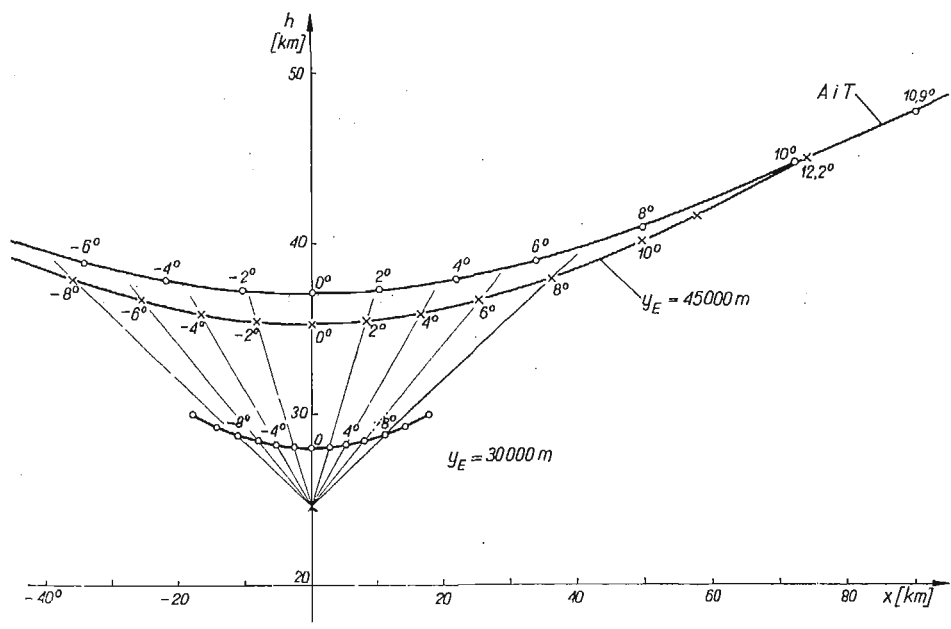
Tor środka ciężkości rakiety w czasie jednego skoku określamy za pomocą współrzędnych x , y i drogi s .

Równanie (2.3) po przekształceniu przyjmie postać:

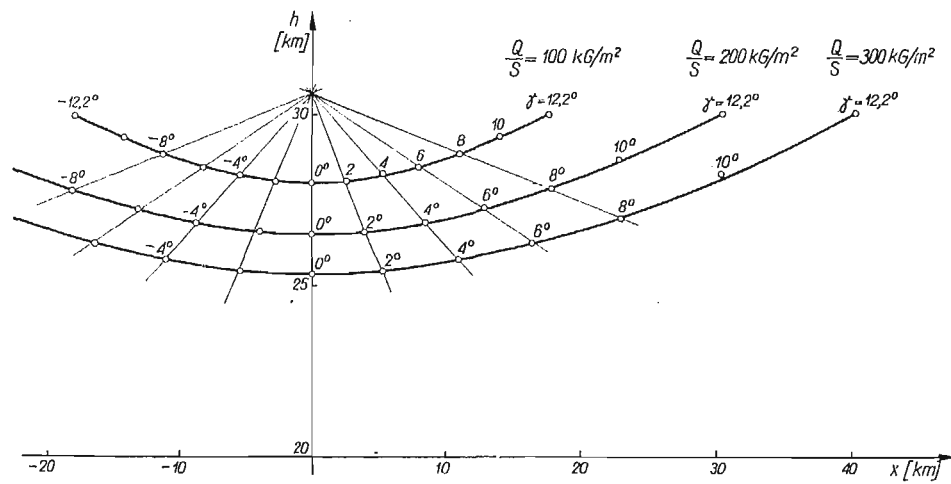
$$y = \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta \left[(\cos \gamma_s - \cos \gamma_E) + \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E} \right]} \right|,$$

ponieważ w powyższym wyrażeniu $\frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E}$ jest wielkością małą i stałą dla danego skoku, więc wprowadzamy kąt zastępczy

$$(3.1) \quad \cos \gamma_z = \cos \gamma_E - \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E},$$



Rys. 3. Tor środka ciężkości rakiety o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kg/m}^2$ lecącej po torze falistym z wysokości początkowej 30 000 m i 45 000 m



Rys. 4. Tor środka ciężkości rakiety o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kg/m}^2$, 200 kg/m^2 i 300 kg/m^2 lecącej po torze falistym z wysokości początkowej 30 000 m

który szczególnie w dalszej części uprości i umożliwi analityczne rozwiązanie zagadnienia.

Współrzędne toru środka ciężkości mają postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} y &= \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta (\cos \gamma_s - \cos \gamma_z)} \right|, \\ X &= \pm \frac{1}{\beta} \left[|\gamma_s| + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_z} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(\gamma_z/2) + \operatorname{tg}(\gamma_s/2)}{\operatorname{tg}(\gamma_z/2) - \operatorname{tg}(\gamma_s/2)} \right| \right], \\ s &= \pm \frac{1}{\beta \sin \gamma_z} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_z}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma_s}{2}\right)}{\operatorname{tg}(\gamma_z/2) - \operatorname{tg}(\gamma_s/2)} \right|. \end{aligned}$$

Wielkość składnika $\frac{\varrho_0 SCz}{2m\beta} e^{-\beta y_E}$ jest mała, lecz nie może być pomijana w stosunku do różnicy $(\cos \gamma_s - \cos \gamma_E)$. Kąt toru γ_s jest zawarty w granicach $-\gamma_E \leq \gamma_s \leq \gamma_E$, gdzie γ_E jest kątem początkowym (wejścia) na danej wysokości i dla rakiety «rykoszetującej» osiąga wartość $\sim 12^\circ$. Uwzględnienie tego wyrażenia pozwala w odróżnieniu od pracy [3] na obliczenie współrzędnych toru na dowolnej wysokości lotu rakiety o różnych obciążeniach jednostkowych Q/S (rys. 3 i 4).

4. Oscylacje wokół środka ciężkości rakiety

Oscylacje rakiety wokół środka ciężkości opisane są układem równań (2.2), który po uwzględnieniu uproszczeń przyjmuje postać:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} mV\dot{\gamma} + \frac{1}{2} \varrho V^2 C_{z\alpha} \alpha &= 0, \\ I\ddot{\theta} - qSl \left(Cm_\alpha \alpha + Cm_q \frac{\dot{\theta}l}{V} + Cm_{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}l}{V} \right) &= 0, \\ \alpha - \gamma &= \theta. \end{aligned}$$

W dalszym ciągu pomijane są indeksy s i 0 , tak że α oznacza oscylujący kąt natarcia γ zmienny kąt toru środka ciężkości rakiety.

Po przekształceniu układu równań (4.1) otrzymujemy równanie oscylacji kąta natarcia α w funkcji czasu o postaci

$$(4.2) \quad \ddot{\alpha}(t) + f_1(t) \dot{\alpha}(t) + f_2(t) \alpha(t) = 0,$$

gdzie współczynniki $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są niejawnymi funkcjami czasu przez ϱ i V i wyrażają się zależnościami

$$(4.3) \quad \begin{aligned} f_1(t) &= Cz_\alpha \frac{\varrho VS}{2m} - (Cm_q + Cm_{\dot{\alpha}}) \frac{\varrho VSl^2}{2I}, \\ f_2(t) &= \frac{d}{dt} \left(Cz_\alpha \frac{\varrho VS}{2m} \right) - \frac{Cm_q Cz_\alpha}{Im} \left(\frac{\varrho VSl}{2} \right)^2 - Cm_\alpha \frac{\varrho V^2 Sl}{2I} \end{aligned}$$

W przypadku oscylacji rakiety lecącej po torze falistym wygodniej jest równanie (4.2) przedstawić w funkcji kąta toru γ niż rozpatrywać w funkcji czasu.

Przechodzimy na nowe zmienne γ :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha'(\gamma) \frac{d\gamma}{dt}, \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \alpha''(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \alpha'(\gamma) \frac{d^2\gamma}{dt^2}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu zależności (4.4) do równania (4.2) otrzymamy

$$(4.5) \quad \alpha''(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 + \alpha'(\gamma) f_1(\gamma) \left[\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right] + f_2(\gamma) \alpha(\gamma) = 0.$$

Oznaczając przez

$$\begin{aligned} f_3(\gamma) &= \left[\beta V_E e^{(\gamma-\gamma_E)} \frac{Px}{Pz} \right]^{-2} f_1(\gamma) \left(\frac{d\gamma}{dt} + \frac{d^2\gamma}{dt^2} \right), \\ f_4(\gamma) &= \left[\beta V_E e^{(\gamma-\gamma_E)} \frac{Px}{Pz} \right]^{-2} f_2(\gamma) \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(4.6) \quad \alpha''(\gamma) \left[(\cos \gamma - \cos \gamma_E) + \frac{SCz \varrho_0}{2m\beta} e^{-\beta\gamma_E} \right] + \alpha'(\gamma) f_3(\gamma) + \alpha(\gamma) f_4(\gamma) = 0.$$

Wprowadzamy zależność (3.1) na zastępczy kąt toru γ_z i obliczamy funkcje $f_3(\gamma)$ i $f_4(\gamma)$; otrzymamy

$$(4.7) \quad \begin{aligned} f_3(\gamma) &= (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 (1 - \sin \gamma) \left[\frac{Cz_\alpha}{Cz} - \frac{Cm_q + Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \right] + \\ &+ (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^3 \left[\frac{Cz_\alpha}{Cz} - \frac{Cm_q + Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} f_4(\gamma) &= (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 \left[\frac{Px}{Pz} - \frac{Cm_q Cz_\alpha}{Cz^2} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \right] - \\ &- (\cos \gamma - \cos \gamma_z) \left[\sin \gamma + \frac{Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\beta l} \right]. \end{aligned}$$

Stosując podstawienie

$$(4.9) \quad \alpha(\gamma) = \bar{\alpha} e^{-\frac{1}{2} \int_{\gamma_E}^{\gamma} f_3(\gamma) d\gamma} = \bar{\alpha} e^{\psi(\gamma)}$$

otrzymamy równanie (4.6) w postaci

$$(4.10) \quad \bar{\alpha}'' (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 + \bar{\alpha} \left[\frac{1}{4} f_3^2(\gamma) - \frac{1}{2} f_3'(\gamma) + f_4(\gamma) \right] = 0,$$

które nie posiada składnika z pierwszą pochodną.

Wprowadzamy oznaczenia

$$(4.11) \quad K_1 = \frac{Cz_\alpha}{Cz} - \frac{Cm_q + Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2,$$

$$(4.12) \quad K_2 = - \frac{Cm_\alpha}{Cz} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 \frac{1}{\beta l},$$

$$(4.13) \quad K_3 = \frac{Px}{Pz} - \frac{Cm_q Cz_\alpha}{Cz^2} \left(\frac{l}{\sigma} \right)^2$$

i obliczamy funkcję przy $\bar{\alpha}$ otrzymując

$$M(\gamma) = \frac{1}{4} f_3^2(\gamma) + f_4(\gamma) - \frac{1}{2} f_3'(\gamma) = (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 \left[\frac{1}{2} \cos \gamma K_1 + K_3 \right] + (\cos \gamma - \cos \gamma_z) [\sin \gamma (1 - \sin \gamma) K_1 - \sin \gamma + K_2].$$

W wyrażeniu na $M(\gamma)$ współczynniki $K_2 \gg K_3 > K_1$, po pominięciu składników małych dostaniemy

$$(4.14) \quad M(\gamma) = (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 K_3 + (\cos \gamma - \cos \gamma_z) K_2.$$

W pracy [3] odpowiednik wyrażenia (4.14) ma postać:

$$M(\gamma) = \frac{K_2}{\cos \gamma - \cos \gamma_E} + \frac{1 - \cos \gamma \cos \gamma_E}{4(\cos \gamma - \cos \gamma_E)},$$

co dla warunków wejścia i wyjścia ze skoku, tzn. gdy $\gamma = \gamma_E$ lub $\gamma = -\gamma_E$ daje osobliwości i rzutuje na rozwiązanie równania.

Równanie (4.10) przyjmie postać

$$(4.15) \quad \bar{\alpha}'' (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 + \bar{\alpha} [(\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 K_3 + (\cos \gamma - \cos \gamma_z) K_2] = 0.$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Ponieważ kąt toru γ jest zawarty między wielkościami:

dla fazy wejścia

$$\gamma_E \geq \gamma \geq 0,$$

dla fazy wyjścia

$$0 \geq \gamma \geq -\gamma_E,$$

a kąt $\gamma_E \approx 12^\circ$ oraz $\gamma_z \approx 13,8^\circ$ wyrażenie $(\cos \gamma - \cos \gamma_z)$ przedstawiające sobą gałąź kosinusoidy zastąpiono sieczną

dla fazy wejścia

$$\cos \gamma - \cos \gamma_z \approx (\gamma_z - \gamma) \frac{1}{2} \left(\gamma_z + \frac{1}{2} \gamma_E \right),$$

dla fazy wyjścia

$$\cos \gamma - \cos \gamma_z \approx (\gamma_z + \gamma) \frac{1}{2} \left(\gamma_z + \frac{1}{2} \gamma_E \right).$$

Stosując powyższe uproszczenia równanie (4.15) przyjmie postać

$$\bar{\alpha}'' (\gamma_z \mp \gamma) + \bar{\alpha} \left[(\gamma_z \mp \gamma)^2 K_3 + (\gamma_z \mp \gamma) \frac{2K_2}{\gamma_z + \frac{1}{2} \gamma_E} \right] = 0.$$

Stosując zamianę zmiennych $\gamma_z \mp \gamma = \eta$ i oznaczając

$$(4.16) \quad \kappa_2 = -\frac{2K_2}{\gamma_z + \frac{1}{2}\gamma_E}$$

otrzymamy

$$(4.17) \quad \bar{a}''\eta^2 + \bar{a}(\eta^2 K_3 + \eta\kappa_2) = 0.$$

Wielkości liczbowe współczynników w przypadku rozpatrywanej rakiety są następujące: $\kappa_2 = 5560$, $K_3 = 132$. Po rozdzieleniu współczynnika przy \bar{a} na dwie funkcje i zostawieniu po stronie lewej wartości znaczących otrzymamy

$$(4.18) \quad \bar{a}''\eta^2 + \bar{a}\left(\eta\kappa_2 + \frac{1}{4}\right) = \bar{a}\left(\frac{1}{4} - \eta^2 K_3\right).$$

Z rozwiązania powyższego równania przy pominięciu prawej strony otrzymamy pierwsze przybliżenie

$$(4.19) \quad \bar{a}''\eta^2 + \bar{a}\left(\eta\kappa_2 + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Rozwiązanie powyższego równania jest kombinacją liniową funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju zerowego rzędu

$$(4.20) \quad \bar{a}(\eta) = C_1\sqrt{\eta} J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] + C_2\sqrt{\eta} Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}].$$

Dalsze przybliżenia otrzymamy zastępując równanie (4.18) równaniem całkowym Volterry drugiego rodzaju w postaci

$$\begin{aligned} \bar{a}(\gamma) = C_1\sqrt{\gamma_z - \gamma} J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z - \gamma)}] + \\ + C_2\sqrt{\gamma_z - \gamma} Y_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z - \gamma)}] - \int_{\gamma_E}^{\gamma} K(\gamma\xi)\bar{a}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} K(\gamma\xi) = \left(\frac{1}{4} - \eta_2 K_3\right) \pi\sqrt{\eta}\sqrt{\gamma_z \mp \xi} \{ Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z \mp \xi)}] - \\ - J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] Y_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z \mp \xi)}] \} \end{aligned}$$

Dalsze przybliżenia obliczamy rozwiązując równanie całkowe Volterry metodą kolejnych przybliżeń. Już w drugim przybliżeniu wartość całki jest mała i może być pominięta. W przypadku rakiety rozpatrywanej dla przykładu wartość liczbową całki dla $\gamma = 0$ wynosi $-7,3 \cdot 10^{-3}$, co w stosunku do 1,17 wartości $\bar{a}(\gamma)$ obliczonej w pierwszym przybliżeniu stanowi poniżej 1%. Widzimy, że uwzględnienie prawej strony równania daje nieznaczne poprawki i jako rozwiązanie równania (4.17) przyjmujemy pierwsze przybliżenie:

$$(4.21) \quad \alpha(\gamma) = e^{\psi(\gamma)}\sqrt{\eta} \{ C_1 J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] + C_2 Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] \}.$$

Obliczymy teraz wykładnik potęgowy przy e , funkcję $\psi(\gamma)$. Funkcja ta jest scałkowana bez uproszczeń:

$$(4.22) \quad \psi(\gamma) = -\frac{1}{2} \int_{\gamma_E}^{\gamma} K_1 f_3(\gamma) d\gamma = -\frac{1}{2} K_1 \int_{\gamma_E}^{\gamma} [\cos \gamma - \cos \gamma_z]^2 - \\ - \sin \gamma (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^2 + (\cos \gamma - \cos \gamma_z)^3] d\gamma,$$

$$\psi(\gamma) = -\frac{1}{2} K_1 [(\gamma_E - \gamma)\mu_1 + (\gamma_E^2 - \gamma^2)\mu_3 + (\gamma_E^3 - \gamma^3)\mu_5],$$

gdzie po uproszczeniu

$$\mu_1 = -2 + 5 \cos \gamma_z - 4 \cos^2 \gamma_z + \cos^3 \gamma_z,$$

$$\mu_3 = \frac{3}{2} - \cos \gamma_z + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma_z,$$

$$\mu_5 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \cos \gamma_z + \frac{1}{2} \cos^2 \gamma_z.$$

Wykładnik potęgowy $\psi(\gamma)$ przedstawiony przez funkcję (4.22) jest parabolą. Natomiast wykładnik potęgowy uzyskany w pracy [3] ma postać

$$\psi(\gamma)_A = -\frac{1}{2} K_1 (\gamma_E - \gamma),$$

tzn. zmienia się liniowo w zależności od γ i tym samym wywołuje silny wzrost tłumienia w fazie wyjścia, co jest sprzeczne z fizycznym wyjaśnieniem zjawiska.

Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy dla warunków początkowych. W niniejszej pracy rozpatrzono dwa przypadki:

Przypadek A. Rakieta na początku skoku (w fazie wejścia) leci na określonym kącie natarcia α_E i bez prędkości kątowej — odpowiada to warunkom przyjętym w pracy [3].

Przypadek B. Rakieta wchodzi na określonym kącie natarcia α_E i z określoną prędkością kątową q_E .

Przypadek A. Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy dla warunków początkowych: gdy

$$\gamma = \gamma_E, \quad \text{to} \quad \alpha = \alpha_E, \quad da/dt = 0$$

z równania (4.21) po uwzględnieniu (4.22).

Oscylacje kąta natarcia wokół środka ciężkości rakiety w funkcji kąta toru γ wyrażają się zależnością

$$(4.23) \quad \alpha(\gamma) = \alpha_E e^{\psi(\gamma)} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_z - \gamma_E}} [G_1 J_0(2\sqrt{\kappa_2 \eta}) - G_2 Y_0(2\sqrt{\kappa_2 \eta})],$$

gdzie

$$\eta = \gamma_z - \gamma \quad \text{— dla fazy wejścia, tzn. } \gamma_E \geq \gamma \geq 0,$$

$$\eta = \gamma_z + \gamma \quad \text{— dla fazy wyjścia tzn. } 0 \geq \gamma \geq -\gamma_E,$$

$$\psi(\gamma) \quad \text{— przedstawione wyrażeniem (4.22),}$$

$$(4.24) \quad G_1 = [1 - (\gamma_z - \gamma_E)(K_1\mu_1 + 2\gamma_E K_1\mu_3 + 3\gamma_E^2 K_1\mu_5)] Y_0(\mu_2) - \mu_2 Y_1(\mu_2)$$

$$(4.25) \quad G_2 = [1 - (\gamma_z - \gamma_E)(K_1\mu_1 + 2\gamma_E K_1\mu_3 + 3\gamma_E^2 K_1\mu_5)] J_0(\mu_2) - \mu_2 J_1(\mu_2),$$

$$\mu_2 = 2\sqrt{\kappa_2(\gamma_z - \gamma_E)}.$$

Prędkość kątową przy wyjściu (na końcu skoku) obliczamy przez zróżniczkowanie wyrażenia (4.24) względem czasu i podstawieniu

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \gamma &= -\gamma_E. \\ q &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\gamma = -\gamma_E} = \left(\frac{d\alpha}{d\gamma}\right)_{\gamma = -\gamma_E} \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\gamma = -\gamma_E} = \\ &= \alpha_E V_E \frac{SCz\varrho_0}{2m} e^{-[\gamma_E(K_1\mu_1 + \frac{2P_x}{P_z}) + \gamma_E^3 K_1\mu_3 + \beta\gamma_E]} \end{aligned}$$

Odpowiednie wyniki otrzymane w pracy [3] dla oscylacji kąta natarcia w przypadku A są następujące:

dla fazy wejścia, $\gamma_E \geq \gamma \geq 0$,

$$\alpha(\gamma)_A = \alpha_E e^{\kappa_1(\gamma_E - \gamma)} J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_E - \gamma)}]$$

dla fazy wyjścia, $0 \geq \gamma \geq -\gamma_E$,

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma)_A &= \alpha_E e^{\kappa_1(\gamma_E - \gamma)} \left\{ \left[\frac{J_0(\mu) Y_1(\mu) + J_1(\mu) Y_0(\mu)}{J_0(\mu) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_0(\mu)} \right] J_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_E + \gamma)}] + \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{J_0(\mu) J_1(\mu)}{J_0(\mu) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_0(\mu)} \right] Y_0[2\sqrt{\kappa_2(\gamma_E + \gamma)}] \right\}, \end{aligned}$$

a prędkość kątową przy wyjściu

$$q_A = -\beta V_E \alpha_E \mu \sin \gamma_E J_0(\mu) J_1(\mu) e^{-2\gamma_E} \left(\frac{P_x}{P_z} - K_1 \right).$$

Różnice w wynikach prac niniejszej i [3], przedstawionych poprzednio, są znaczne i zostaną omówione poniżej.

Przypadek B. Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy dla warunków początkowych:

$$\text{gdy } \gamma = \gamma_E, \quad \text{to } \alpha = \alpha_E, \quad \frac{d\alpha}{dt} = q_E.$$

z równania (4.21) po uwzględnieniu (4.22).

Oscylacje kąta natarcia w przypadku wejścia z określoną prędkością kątową mają postać

(4.27)

$$\alpha(\gamma) = \alpha(\gamma)_{q=0} + \frac{q_E}{V_E} e^{\psi(\gamma)} \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_z - \gamma_E}} G_3 \{ Y_0(\mu_2) J_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] - J_0(\mu_2) Y_0[2\sqrt{\kappa_2\eta}] \},$$

gdzie $\alpha(\gamma)_{q=0}$ oznacza oscylacje kąta natarcia przedstawione zależnością (4.23) w przypadku A;

$$G_3 = \pi(\gamma_z - \gamma_E) \frac{2m}{SCz\varrho_0} e^{\beta\gamma_E}.$$

Prędkość kątową przy wyjściu ma postać:

$$(4.28) \quad q = \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)_{\gamma = -\gamma_E} = q_{q=0} + q_E e^{-\gamma_E \left(K_1 \mu_1 + \frac{2Px}{Pz} \right) + \gamma_E^3 K_1 \mu_1}.$$

gdzie $q_{q=0}$ jest prędkością kątową przedstawioną zależnością (4.26) w przypadku A.

5. Przykład liczbowy

Obliczenia przykładowe i porównawcze wykonano dla rakiety o danych geometrycznych i aerodynamicznych przyjętych przez TOBAKA i ALLENA [3].

Rozpatrywano rakietę posiadającą kadłub stożkowy o długości $l = 15$ m, skrzydła delta o małym wydłużeniu, obciążenie jednostkowe powierzchni nośnej $Q/S = 100$ kG/m²; 200 kG/m² i 300 kG/m². Przyjęto kadłub jednolity o momencie bezwładności $I = \frac{1}{22} ml^2$, gdzie $\left(\frac{l}{\sigma} \right)^2 = 22$.

Dane aerodynamiczne są następujące: doskonałość $P_z/P_x = 6$. Początkowy kąt natarcia $\alpha_E = 5^\circ$, zapas stateczności 3%;

$$\frac{C_{z\alpha}}{C_z} = 10, \quad \frac{C_{m\alpha}}{C_z} = -\frac{1}{10}, \quad \frac{C_{m_q} + C_{m\dot{\alpha}}}{C_z} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{C_{m_q} C_{z\alpha}}{C_z^2} = -6;$$

początkowy kąt toru $\gamma_E = 12,2^\circ$, zasięg ~ 7400 km, prędkość max $V_E \approx 4350$ m/sek.

Obliczenia wykonano dla wyników otrzymanych w niniejszej pracy i na wspólnych wykresach porównano z wynikami otrzymanymi w pracy [3].

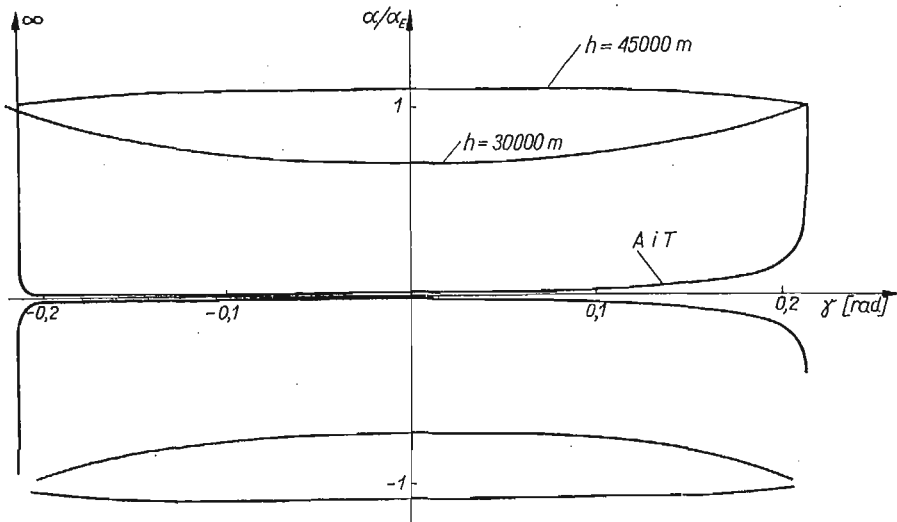
Tor lotu rakiety o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100$ kG/m² obliczono wg wzorów (3.2) dla dwóch wysokości 45 000 m oraz 30 000 m i przedstawiono na rys. 3, na którym wykreślono również tor obliczony ze wzorów Tobaka i Allena [3] oznaczając go na wykresie przez A i T .

Na podstawie wzorów (3.2) obliczono charakter skoku rakiety na wysokości 30 000 m dla trzech obciążeń powierzchni nośnej $Q/S = 100$ kG/m², dla 200 kG/m² i 300 kG/m² i przedstawiono na rys. 4. Jak wynika z obu wykresów różnice spowodowane uwzględnieniem wysokości wejścia są znaczne. Wyniki otrzymane w niniejszej pracy pozwalają na obliczenie toru podczas dowolnego skoku na dowolnej wysokości. Zmniejszenie wysokości wejścia (rys. 3) jak również zmniejszenie obciążenia jednostkowego powierzchni nośnej powodują skrócenie skoku.

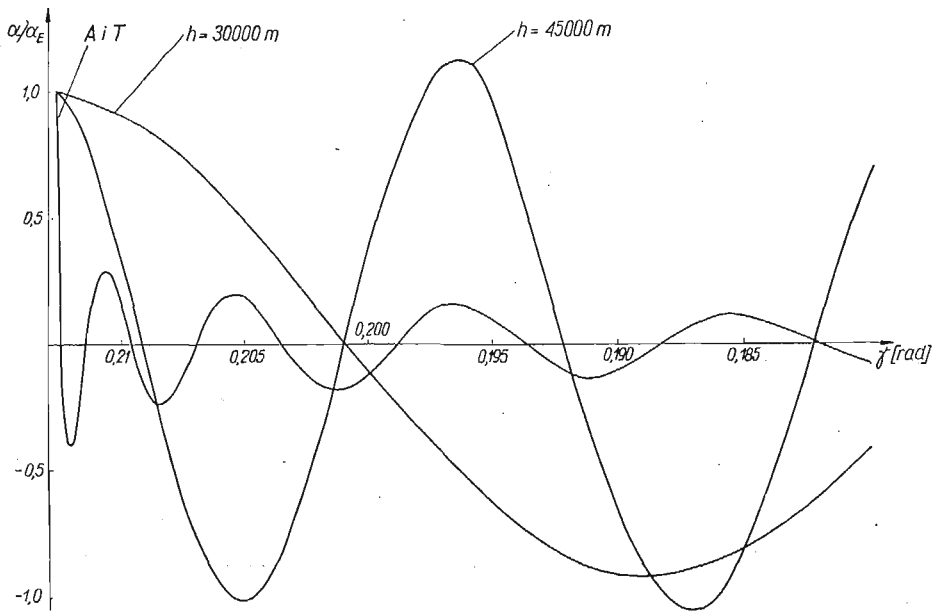
Oscylacje kąta natarcia rakiety lecącej po torze falistym, która przy wejściu nie posiada prędkości kątowej, obliczono ze wzoru (4.23) i zmianę stosunku a/a_E przedstawiono na wykresach.

Na rysunku 5 przedstawiono obwiednie maksymalnych amplitud oscylacji kąta natarcia w czasie jednego skoku dla rakiety lecącej po torze falistym o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100$ kG/m², rozpoczynającej wejście na wysokości $\gamma_E = 45 000$ m i 30 000 m i porównano je z wykresem obwiedni obliczonej ze wzorów Tobaka i Allena w [3].

Charakter oscylacji kąta natarcia dla powyższych warunków przedstawiono na rys. 6 a/a_E w funkcji kąta toru γ i na rys. 7 w funkcji długości skoku x .



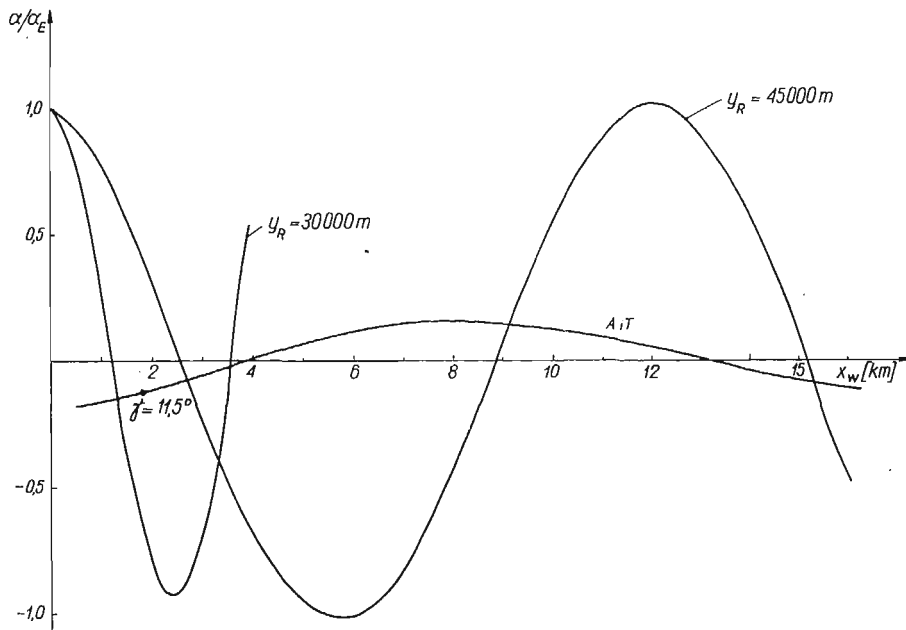
Rys. 5. Obwiednie amplitud oscylacji kąta natarcia wokół środka ciężkości rakiety w funkcji kąta toru dla wysokości początkowej 30 000 m i 45 000 m i w przypadku Tobaka i Allena



Rys. 6. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji kąta toru przy obciążeniu jednostkowym rakiety $Q/S = 100$ kG/m²

Jak widzimy z rys. 5, 6 i 7 różnice wynikające z obliczeń wg pracy niniejszej i pracy [3] nie tylko mają charakter ilościowy, ale różnią się zasadniczo jakościowo (rys. 5). Amplituda oscylacji kąta natarcia wg pracy [3] jest bardzo silnie tłumiona bez względu na wysokość zarówno w fazie wejścia, jak i przy wyjściu.

Według niniejszej pracy amplituda oscylacji kąta natarcia zależy od wysokości i przy wyjściu tłumienie maleje. Na wysokościach powyżej 45 000 m tłumienie jest mało efektywne i wartość oscylującego kąta natarcia przewyższa kąt natarcia przy wejściu. Zmniejszenie wysokości powoduje wzrost tłumienia (rys. 5) i wzrost częstotliwości oscylacji (rys. 7) (wpływa podobnie jak wzrost sztywności zawieszenia w ukła-



Rys. 7. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji przebytej odległości przy obciążeniu jednostkowym rakiety $Q/S = 100 \text{ kg/m}^2$

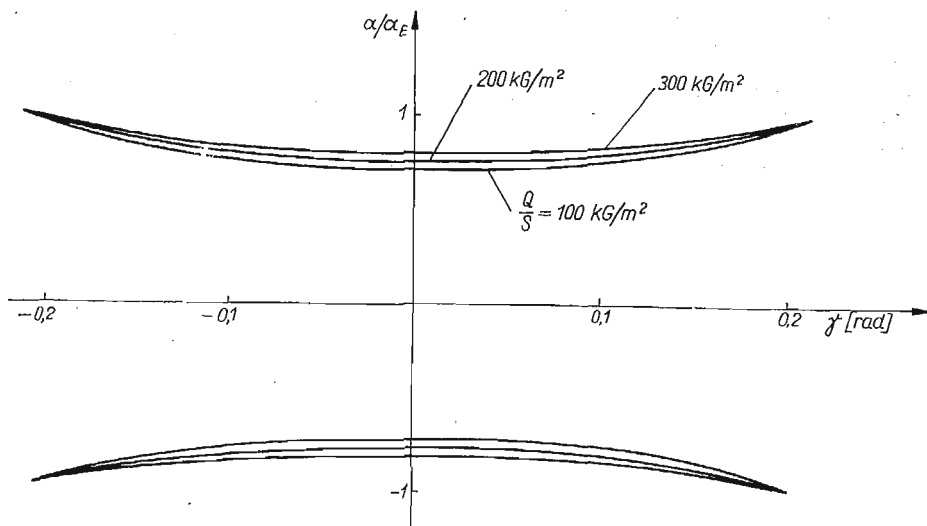
dzie mechanicznym); potwierdza to wyniki otrzymane przez Horiuchi'ego w pracy [7] i zaprzecza wynikom Tobaka i Allena [3]. Dla wysokości 30 000 m wykonano obliczenia przy trzech wartościach obciążenia jednostkowego tzn. $Q/S = 100 \text{ kg/m}^2$ i 300 kg/m^2 .

Na rysunku 8 przedstawiono obwiednie maksymalnych amplitud oscylacji kąta natarcia, na rys. 9 charakter oscylacji w funkcji kąta toru γ .

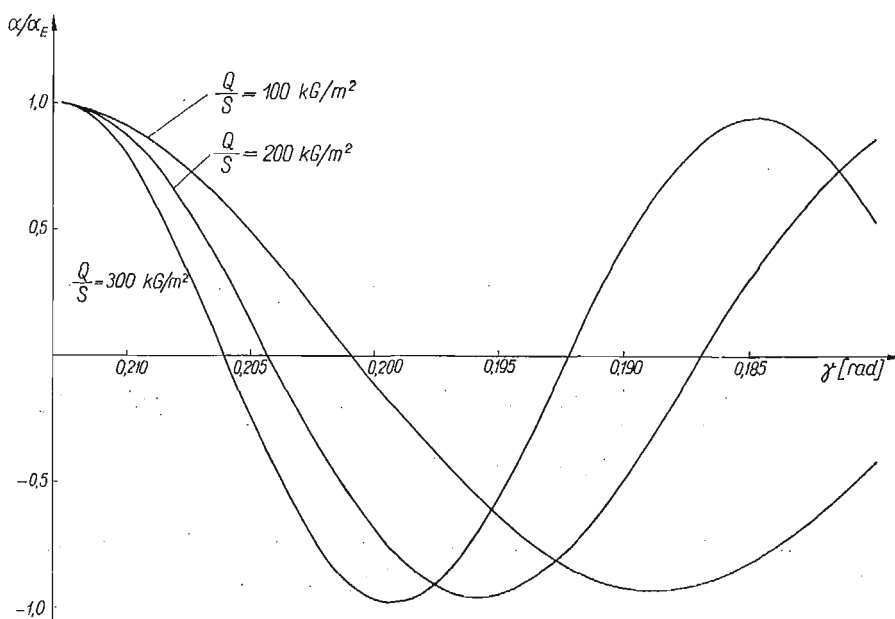
Wzrost obciążenia jednostkowego powoduje niewielkie zmniejszenie tłumienia (rys. 8) i znaczne zmniejszenie częstotliwości oscylacji (wpływa podobnie jak zwiększenie masy przy stałej sztywności zawieszenia w układzie mechanicznym).

Na podstawie wzoru (4.26) przeprowadzono obliczenia kątowej prędkości pochylania w chwili wyjścia z danego skoku, w przypadku gdy rakieta lecąca po torze falistym wchodzi bez prędkości kątowej.

Do ostatecznego obliczenia (da/dt) dla $\gamma = -\gamma_E$ przyjęto prędkości początkowe V_E , odpowiadające lotowi rakiety rykoszetuującej o danym obciążeniu jednostko-



Rys. 8. Obwiednie oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji kąta toru dla wysokości początkowej 30 000 m



Rys. 9. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji kąta toru dla wysokości początkowej 30 000 m

wym na wysokości równoważnej [2]. Początkowy kąt natarcia przyjęto dla wszystkich przypadków $\alpha_E = 5^\circ$. Tak obliczone prędkości kątowne pochylenia mają wartości podane w tablicy 1.

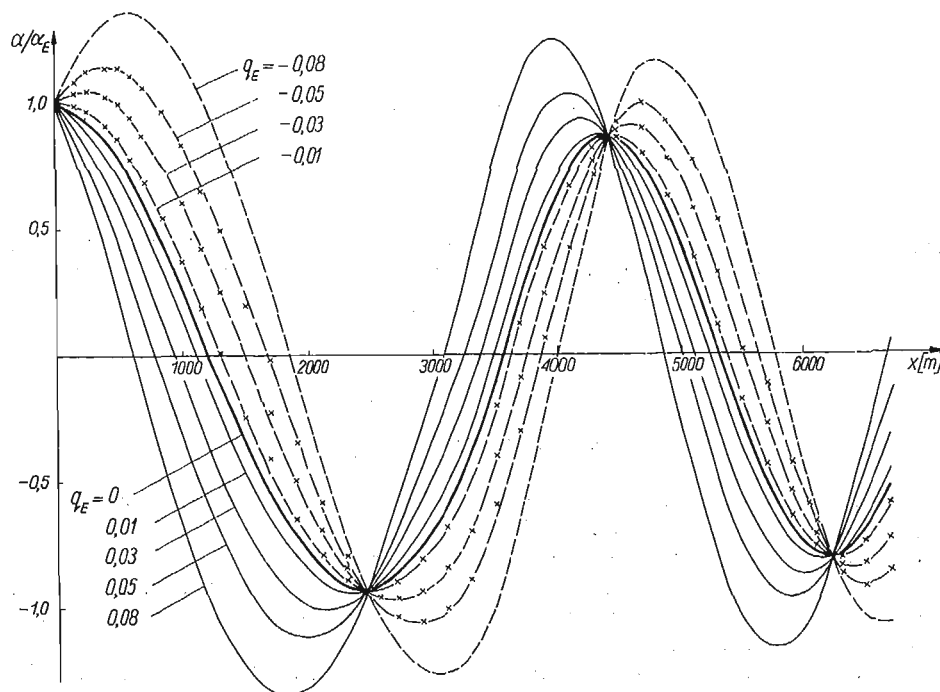
Jak wynika ze wzoru (4.26) i tablicy 1 rakieta lecąca po torze falistym wychodzą z każdego skoku koziołkuje mimo wejścia bez prędkości kątowej. Prędkość kątowa

Tablica 1

h	Q/S	V_E	$q = f(\alpha_E, V_E)$	T Czas jednego obrotu rakiety
m	kG/m ²	m/sek.	1/m	godz.
TOBAK I ALLEN	100	4350		35
		1855		14,9
45 000	100	1855	$1,01 \cdot 10^{-6}$	10,7
30 000	100	695	$9 \cdot 10^{-6}$	3,2
30 000	200	985	$4,76 \cdot 10^{-6}$	4,25
30 000	300	1300	$3,09 \cdot 10^{-6}$	4,97

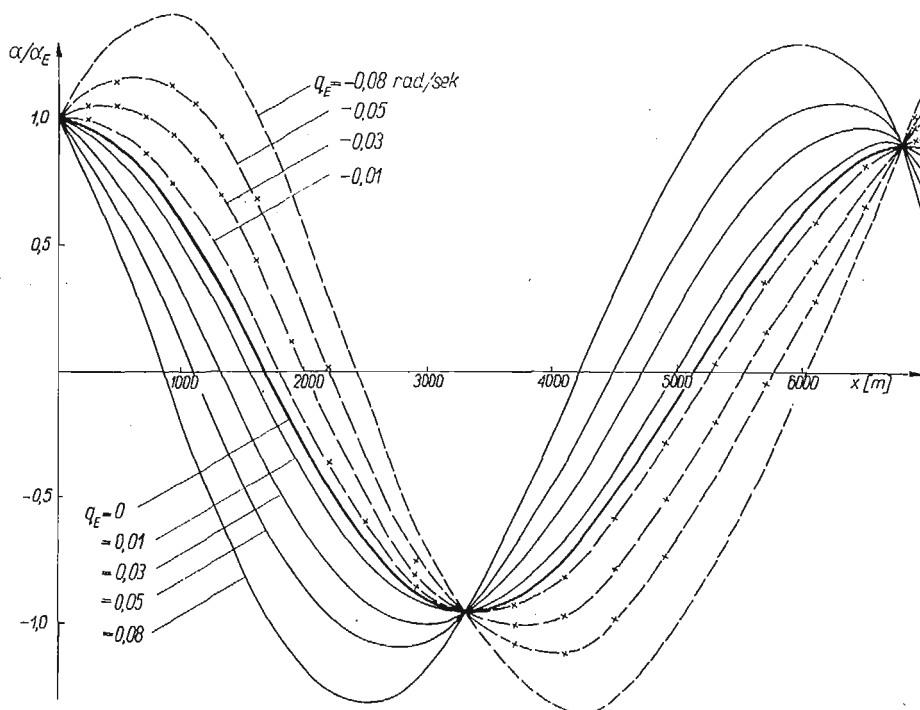
wzrasta w miarę zbliżania się do ziemi, jak również wraz ze zmniejszeniem się obciążenia jednostkowego rakiety.

Słuszne więc było rozpatrzenie przypadku B, gdy rakieta rozpoczyna skok z określoną prędkością kątową. Na podstawie wzoru (4.27) obliczono charakter oscylacji kąta natarcia rakiety rykoszetującej o obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kG/m}^2$ i 200 kG/m^2 , rozpoczynającej skok na wysokości 30 000 m. Obliczenia wykonano dla początkowej prędkości kątowej zmieniającej się od $-0,08 \text{ rad/sek}$ do $+0,08 \text{ rad/sek}$ i przedstawiono na rys. 10 i 11.



Rys. 10. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji przebytej odległości dla rakiety rozpoczynającej skok z prędkością kątową na wysokości 30 000 m przy obciążeniu jednostkowym $Q/S = 100 \text{ kG/m}^2$; $\alpha_E = 5^\circ$ i $V_E = 695 \text{ m/sek}$

Na rysunkach 10 i 11 widzimy, że prędkości kątowe w zakresie do $\pm 0,01$ rad/sek wpływają bardzo mało na charakter oscylacji i praktycznie biorąc wpływ ten można pominąć. Większe prędkości kątowe, tzn. $q_E > |\pm 0,01|$ rad/sek., powodują wzrost amplitudy oscylacji kąta natarcia nie wpływając zasadniczo na częstość oscylacji i charakter tłumienia.



Rys. 11. Charakter oscylacji kąta natarcia rakiety w funkcji przebytej odległości dla rakiety rozpoczynającej skok z prędkością kątową na wysokości 30 000 m przy obciążeniu jednostkowym $Q/S = 200 \text{ kG/m}^2$; $\alpha_E = 5^\circ$ i $V_E = 985 \text{ m/sek}$

Literatura cytowana w tekście

- [1] H. R. FRIEDRICH, F. J. DORE, *The dynamic motion of a missile descending through the atmosphere*, Jour. Aero. Sci., vol. 22, Nr 9, 1955 r.
- [2] Г. Я. АЛЛЕН, *Гиперзвуковые полеты и проблемы возвращения*, Проблемы движения главной части ракеты дального действия, Москва 1959. Przedruk z Jour. Aero. Sci., 4, 1958.
- [3] М. ТОВАК, H. J. ALLEN, *Dynamic stability of vehicles traversing ascending or descending paths through the atmosphere*.
- [4] H. J. ALLEN, A. J. EGGERS, *A study of the motion and aerodynamic heating of ballistic missiles entering the Earth's atmosphere at high supersonic speeds*, NACA Rept. 1381, 1958.
- [5] M. M. МОЕ, *An approximation to the reentry trajectory*, ARS Journal, Nr 1, 1960.
- [6] A. J. EGGERS, T. J. WONG, *Motion and heating of lifting vehicles during atmosphere entry*, ARS J. Nr 10, 1961.

[7] F. Y. HORIUCHI, *A parametric study of the dynamic motion of a spinning and nonspinning re-entry vehicle with non linear aerodynamic characteristics*, Balist. Missile and Aerospace Technol., vol. 4, Reentry. New York-London, Acad. Press 1961.

[8] R. BLUM, *Re-entry trajectories: flat earth approximation*, ARS J. Nr 4, 1962.

[9] B. J. DAYMAN, J. M. BRAYSHAW, D. A. NELSON, T. L. BABINEAUX, *The influence of shape aerodynamic damping of oscillatory motion during planet atmosphere entry and measurement of pitch damping at large oscillation amplitudes* (Inter planetary Miss Conf., 9th Annual Amer. Astronaut. Soc. Meet., Los Angeles, Calif. Jan 15th-17th 1963). Pasadena, Calif., Jet Propuls. lab. California Inst. Technol. 1963.

[10] J. STALONY-DOBZAŃSKI, *Effect of re-entry technique on the design of a space vehicle*, J. Techn. Session Prepr. Amer. Astronaut. Soc. Nr 59.

[11] N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa, 1957.

[12] E. КАМКЕ, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1961.

[13] W. POGORZELSKI, *Równania calkowe i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1953.

Резюме

ОСЦИЛЛЯЦИИ РАКЕТЫ ДВИЖУЩЕЙСЯ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ ПО ВОЛНООБРАЗНОЙ ТРАЕКТОРИИ

В работе проведен анализ движения и осцилляций угла атаки ракеты движущейся в атмосфере Земли по волнообразной траектории. При рассмотрении осцилляции угла атаки ракеты по отношению к центру тяжести получено обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Первое приближение получено в виде линейной комбинации функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; следующие приближения получены путем замены дифференциального уравнения интегральным уравнением Вольтерры второго рода.

Для заданной ракеты произведены расчеты, а результаты сравнены с результатами ТОВАКА и АЛЛЕНА в работе [3]. На этой основе отмечены значительные, не только количественные, но и качественные, физические обоснованные различия. Полученные результаты справедливы для ракеты движущейся по волнообразной траектории на произвольной высоте.

Summary

OSCILLATORY MOTION OF A SKIP ROCKET IN THE EARTH'S ATMOSPHERE

In the present paper the analysis of the motion and the oscillations of the incidence angle of a skip rocket moving in the earth's atmosphere is examined. An ordinary differential equation of the second order with variable coefficients has been obtained by considering the oscillations of the incidence angle of the rocket with respect to the centre of gravity. The first approximation is given in the form of a linear combination of the Bessel functions of the first and second kind and zero order, the second approximation is obtained replacing the differential equation by the Volterra integral equation of the second kind.

The example calculations has been performed for a given rocket and has been compared with the results of M. ТОВАК and H. J. ALLEN [3].

The results prove considerable quantitative as well as qualitative differences having a physical justification. The obtained results hold for a skip rocket flying along a wavy path on any altitude.