

ZASADA BETTIEGO JAKO PODSTAWA WARUNKÓW MODELOWYCH

MARIAN JANUSZ (GLIWICE)

1. Uwagi ogólne. Zasada Bettiego

Publikacja niniejsza ma na celu zwrócenie większej niż dotychczas uwagi na możliwość wszechstronnego uwzględnienia odpowiedniości modelowej przy badaniach konstrukcji inżynierskich na modelach. Chodzi również o przedstawienie zasady Bettiego jako podbudowy teoretycznej owej odpowiedniości. Zagadnienia te były już poruszone w jednym z rozdziałów obszerniejszej pracy autora [1]. Z powodu bardzo małego nakładu sprawa powyższa jednak nie została należycie upowszechniona. Stąd też zapewne wynika fakt, iż w literaturze przedmiotu odpowiedniość modelową traktuje się często jako zagadnienie nowe i w zakresie ograniczonym. W pracy obecnej wyniki teoretyczne zilustrowano przykładami liczbowymi.

W celu wyznaczenia pewnych wielkości statycznych, występujących w prętowym układzie konstrukcyjnym, za pomocą badań modelowych należy sporządzić model obiektu rzeczywistego i to zazwyczaj z odmiennego materiału. Przez termin «model» rozumiemy w tym przypadku pomniejszony i geometrycznie podobny materialny obraz odpowiadający układowi rzeczywistemu w taki sposób, ażeby wielkości statyczne wyznaczone dla modelu mogły być łatwo obliczone dla obiektu rzeczywistego przez uwzględnienie odpowiednich podziałek. Dlatego wymiary modelu powinny być tak dobrane, aby stosunek odpowiadających sobie, a różnych od zera składników wzoru na przemieszczenie w obiekcie rzeczywistym i modelu wyrażał się tą samą liczbą.

Wspomniany wzór na przemieszczenie można wyprowadzić np. za pomocą zasady Bettiego, której treść wyraża znana równość:

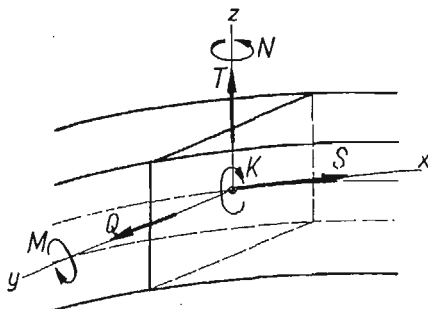
$$(1.1) \quad \sum_J P_J p_{JK} = \sum_K Q_K q_{kJ}.$$

Symbole P_J i Q_K oznaczają tu wielkości skupionych obciążeń statycznych działających na rozpatrywany układ, natomiast symbolami p_{JK} i q_{kJ} oznaczono odpowiednie przemieszczenia; pierwszy indeks określa miejsce i kierunek przemieszczenia, drugi zaś przyczynę jego powstania.

W dowolnym przypadku obociążenia układu prętowego energię sprężystą U przedstawić można za pomocą następujących wielkości statycznych: siła podłużna S , moment skręcający K , dwa momenty zginające M i N oraz dwie siły ścinające T i Q (rys. 1, gdzie osie y i z są głównymi środkowymi osiami bezwładności prze-

kroju, a oś x jest zgodna w danym miejscu z osią elementu). Energia sprężysta układu ma, jak wiadomo, postać następującą:

$$(1.2) \quad U = \frac{1}{2} \int \frac{S^2 ds}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{K^2 ds}{GC} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EI_y} + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EI_z} + \frac{1}{2} \int \kappa_y \frac{Q^2 ds}{GA} + \frac{1}{2} \int \kappa_z \frac{T^2 ds}{GA}.$$



Rys. 1

Korzystając ze znanych wzorów na energię sprężystą możemy zasadę Bettięgo dla układu przestrzennego wyrazić w następujący sposób:

$$(1.3) \quad \sum_J P_J p_{JK} = \sum_K Q_k q_{kJ} = \int \frac{S_J S_K}{EA} ds + \int \frac{K_J K_K}{GC} ds + \int \frac{M_J M_K}{EI_y} ds + \\ + \int \frac{N_J N_K}{EI_z} ds + \int \kappa_y \frac{Q_J Q_K}{GA} ds + \int \kappa_z \frac{T_J T_K}{GA} ds.$$

2. Przemieszczenia rzeczywiste i modelowe; ogólny warunek odpowiedniości modelowej

Gdy grupę sił J stanowi tylko jedna siła P , a badany układ jest układem liniowo sprężystym, czyli podlegającym uogólnionemu prawu Hooke'a, to można napisać, że

$$S_J = PS_J^{\circ}, \quad K_J = PK_J^{\circ}, \quad M_J = PM_J^{\circ}, \quad N_J = PN_J^{\circ}, \quad Q_J = PQ_J^{\circ}, \quad T_J = PT_J^{\circ},$$

gdzie S_J° , K_J° , M_J° , N_J° , Q_J° , T_J° pochodzą od niemianowanej siły jednostkowej. Jeżeli jest to faktycznie siła, wtedy S_J° , Q_J° , T_J° są wielkościami niemianowanymi. Jeśli siła jednostkowa będzie momentem, to wielkości te będą miały wymiar 1/długość. W pierwszym przypadku M_J° , N_J° , K_J° mają wymiar długości, w drugim zaś przypadku są niemianowane. Siła jednostkowa jest momentem wtedy, gdy i siła P jest momentem. Przez siłę P bowiem należy rozumieć siłę uogólnioną. Równanie (1.3) przybierze teraz postać następującą:

$$(2.1) \quad P p_{JK} = \int \frac{PS_J^{\circ} S_K}{EA} ds + \int \frac{PK_J^{\circ} K_K}{GC} ds + \int \frac{PM_J^{\circ} M_K}{EI_y} ds + \\ + \int \frac{PN_J^{\circ} N_K}{EI_z} ds + \int \kappa_y \frac{PQ_J^{\circ} Q_K}{GA} ds + \int \kappa_z \frac{PT_J^{\circ} T_K}{GA} ds,$$

skąd

$$p_{JK} = \int \frac{S_J^{\circ} S_K}{EA} ds + \int \frac{K_J^{\circ} K_K}{GC} ds + \int \frac{M_J^{\circ} M_K}{EI_y} ds + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N_K}{EI_z} ds + \int \kappa_y \frac{Q_J^{\circ} Q_K}{GA} ds + \int \kappa_z \frac{T_J^{\circ} T_K}{GA} ds.$$

Należy mieć zawsze na uwadze, że S_J° , K_J° , M_J° itd. pochodzą od działania siły $P = 1$, stanowiącej teraz całkowitą grupę sił J . W ten sposób dla danego układu prętowego liniowo sprężystego obciążonego uogólnionymi siłami Q_K grupy K znaleziono przemieszczenie określonego punktu i .

Nawiązując teraz do uwag ogólnych, sformułowanych w odniesieniu do badań modelowych na początku poprzedniego punktu, obliczymy wartość liczbową stosunków pomiędzy odpowiadającymi sobie składnikami wzoru na przemieszczenie dla pewnego punktu obiektu rzeczywistego i analogicznego punktu na modelu. Jak już wiadomo, stosunki te muszą być równe. Jeżeli przemieszczenie jakiegoś punktu obiektu rzeczywistego jest $a' + b' + c' + \dots$, a przemieszczenie analogicznego punktu na modelu jest $a'' + b'' + c'' + \dots$ oraz jeśli dla wszystkich możliwych a' , b' , c' , ... ma być

$$\frac{a' + b' + c' + \dots}{a'' + b'' + c'' + \dots} = l,$$

to musi równocześnie zachodzić równość

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''} = \frac{c'}{c''} = \dots = l.$$

Oznaczając przez p'_{iK} przemieszczenie dowolnego i -tego punktu obiektu rzeczywistego pod działaniem grupy sił K , a przez p''_{iK} — analogiczne przemieszczenie na modelu, otrzymamy według wzoru (2.1)

$$p'_{iK} = \int \frac{S_J^{\circ} S'_K}{E'A'} ds' + \int \frac{K_J^{\circ} K'_K}{G'C'} ds' + \int \frac{M_J^{\circ} M'_K}{E'I'_y} ds' + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N'_K}{E'I'_z} ds' + \int \kappa'_y \frac{Q_J^{\circ} Q'_K}{G'A'} ds' + \int \kappa'_z \frac{T_J^{\circ} T'_K}{G'A'} ds', \\ p''_{iK} = \int \frac{S_J^{\circ} S''_K}{E''A''} ds'' + \int \frac{K_J^{\circ} K''_K}{G''C''} ds'' + \int \frac{M_J^{\circ} M''_K}{E''I''_y} ds'' + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N''_K}{E''I''_z} ds'' + \int \kappa''_y \frac{Q_J^{\circ} Q''_K}{G''A''} ds'' + \int \kappa''_z \frac{T_J^{\circ} T''_K}{G''A''} ds''.$$

Wielkości S_J° , Q_J° i T_J° są jednakowe dla obiektu rzeczywistego i dla modelu, ponieważ w obydwóch przypadkach pochodzą od niemianowej siły jednostkowej. Natomiast $S'_K \neq S''_K$, $Q'_K \neq Q''_K$ i $T'_K \neq T''_K$, bowiem siły K , działające na obiekt rzeczywisty i na model nie są identyczne, lecz pozostają do siebie w pewnym stosunku. Momenty K_J° i $K_J^{\circ\prime}$, M_J° i $M_J^{\circ\prime}$ oraz N_J° i $N_J^{\circ\prime}$, jakkolwiek wywołane jed-

nakową siłą jednostkową, są jednak różne w obiekcie i modelu z powodu różnicy wymiarów, a tym samym różnicy ramion w jednym i drugim przypadku.

Kąty obrotu φ wyrażają następujące wzory:

$$\varphi'_{iK} = \int \frac{S_J^{\circ} S_K'}{E' A'} ds' + \int \frac{K_J^{\circ} K_K'}{G' C'} ds' + \int \frac{M_J^{\circ} M_K'}{E' I_y'} ds' + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N_K'}{E' I_z'} ds' + \int \kappa_y' \frac{Q_J^{\circ} Q_K'}{G' A'} ds' + \int \kappa_z' \frac{T_J^{\circ} T_K'}{G' A'} ds',$$

$$\varphi''_{iK} = \int \frac{S_J^{\circ} S_K''}{E'' A''} ds'' + \int \frac{K_J^{\circ} K_K''}{G'' C''} ds'' + \int \frac{M_J^{\circ} M_K''}{E'' I_y''} ds'' + \\ + \int \frac{N_J^{\circ} N_K''}{E'' I_z''} ds'' + \int \kappa_y'' \frac{Q_J^{\circ} Q_K''}{G'' A''} ds'' + \int \kappa_z'' \frac{T_J^{\circ} T_K''}{G'' A''} ds''.$$

W celu wyznaczenia φ'_{iK} i φ''_{iK} działamy momentem jednostkowym w miejscu i kierunku tych przemieszczeń, zarówno w układzie rzeczywistym, jak modelowym.

W wyrażeniu ostatnim S_J° , Q_J° i T_J° pochodzą od momentu jednostkowego, więc — jak już wspomniano uprzednio — mają one wymiar 1/długość, są wobec tego różne w obydwóch układach. Natomiast momenty K_J° , M_J° i N_J° , jako wywołane niemianowanym momentem jednostkowym, są niemianowane, są zatem jednakowe w obydwóch układach, mimo że wielkości K_K , M_K i N_K są różne dla obiektu i modelu z wiadomego powodu.

Wprowadźmy obecnie podziałkę rozpiętości i ramion

$$\frac{s'}{s''} = n,$$

podziałkę pól przekrojów

$$\frac{A'}{A''} = a,$$

podziałkę momentów bezwładności

$$\frac{I_y'}{I_y''} = i_y, \quad \frac{I_z'}{I_z''} = i_z, \quad \frac{C'}{C''} = c$$

oraz podziałkę tylko sił obciążających (a nie momentów obciążających)

$$\frac{P'}{P''} = f;$$

zatem dla momentów obciążających będzie

$$\frac{P' s'}{P'' s''} = fn.$$

Wprowadźmy również podziałkę stałych sprężystości, ponieważ obiekt rzeczywisty i model sporządzone są na ogół z różnych materiałów,

$$\frac{E'}{E''} = e, \quad \frac{G'}{G''} = g.$$

Wyznamy następnie wartości liczbowe stosunków odpowiadających sobie składników, które występują we wzorach na przemieszczenie w układzie rzeczywistym i modelowym. Otrzymamy następujące wyrażenia, w których pojedyncze kreski ' u góry odnoszą się do obiektu rzeczywistego, a podwójne '' — do modelu:

$$\begin{aligned} \frac{\int \frac{S_J^{\circ} S_K'}{E' A'} ds'}{\int \frac{S_J^{\circ} S_K''}{E'' A''} ds''} &= \frac{fn}{ae}, & \frac{\int \frac{K_J' K_K'}{G' C'} ds'}{\int \frac{K_J'' K_K''}{G'' C''} ds''} &= \frac{fn^3}{gc}, \\ \frac{\int \frac{M_J^{\circ} M_K'}{E' I_y'} ds'}{\int \frac{M_J'' M_K''}{E'' I_y''} ds''} &= \frac{fn^3}{ei_y}, & \frac{\int \frac{N_J^{\circ} N_K'}{E' I_z'} ds'}{\int \frac{N_J'' N_K''}{E'' I_z''} ds''} &= \frac{fn^3}{ei_z}, \\ \frac{\int \kappa_y' \frac{Q_J^{\circ} Q_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_y'' \frac{Q_J^{\circ} Q_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{fn}{ag}, & \frac{\int \kappa_z' \frac{T_J^{\circ} T_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_z'' \frac{T_J^{\circ} T_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{fn}{ag}, \end{aligned}$$

dla kątów zaś:

$$\begin{aligned} \frac{\int \frac{S_J^{\circ} S_K'}{E' A'} ds'}{\int \frac{S_J^{\circ} S_K''}{E'' A''} ds''} &= \frac{f}{ae}, & \frac{\int \frac{K_J' K_K'}{G' C'} ds'}{\int \frac{K_J'' K_K''}{G'' C''} ds''} &= \frac{fn^2}{gc}, \\ \frac{\int \frac{M_J^{\circ} M_K'}{E' I_y'} ds'}{\int \frac{M_J'' M_K''}{E'' I_y''} ds''} &= \frac{fn^2}{ei_y}, & \frac{\int \frac{N_J^{\circ} N_K'}{E' I_z'} ds'}{\int \frac{N_J'' N_K''}{E'' I_z''} ds''} &= \frac{fn^2}{ei_z}, \\ \frac{\int \kappa_y' \frac{Q_J^{\circ} Q_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_y'' \frac{Q_J^{\circ} Q_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{f}{ag}, & \frac{\int \kappa_z' \frac{T_J^{\circ} T_K'}{G' A'} ds'}{\int \kappa_z'' \frac{T_J^{\circ} T_K''}{G'' A''} ds''} &= \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{f}{ag}. \end{aligned}$$

W badaniach modelowych, jak już stwierdzono, dla przesunięć rzeczywistych i modelowych musi być spełniona równość

$$\frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{gc} = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{fn^3}{ei_z} = \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{fn}{ag} = \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{fn}{ag},$$

a dla kątów obrotu — równość

$$\frac{f}{ae} = \frac{fn^2}{gc} = \frac{fn^2}{ei_y} = \frac{fn^2}{ei_z} = \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{f}{ag} = \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{f}{ag}.$$

Obydwie ostatnie równości sprowadzają się do jednej następującej:

$$(2.2) \quad \frac{1}{ae} = \frac{n^2}{gc} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{\kappa_y'}{\kappa_y''} \cdot \frac{1}{ag} = \frac{\kappa_z'}{\kappa_z''} \cdot \frac{1}{ag}.$$

Jeżeli rozważany układ prętowy jest np. kratownicą, to różny od zera jest tylko składnik pochodzący od siły podłużnej S ; inne składniki nie wchodzi w rachubę. Wobec tego

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = \alpha, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{f}{ae} = \frac{1}{n} \alpha,$$

a stąd

$$(2.3) \quad p'_{iK} = \alpha p''_{iK}, \quad \varphi'_{iK} = \frac{1}{n} \alpha \varphi''_{iK}.$$

Przemieszczenie rzeczywiste obliczamy mnożąc pomierzone przemieszczenie modelowe przez współczynnik wynikający z uwzględnienia przyjętych dla modelu podziałek.

Model jednak musi być tak wykonany, ażeby wszystkie podziały modelowe spełniały warunek (2.2), który można uznać za ogólny warunek odpowiedniości modelowej. Warto podkreślić, że warunek ten jest wynikiem zastosowania wzoru (2.1) do wyrażenia przemieszczeń rzeczywistych i modelowych, a wzór ten wyprowadzono w oparciu o zasadę wzajemności przemieszczeń Bettiego. Zasada wzajemności przemieszczeń okazała się zatem całkowicie przydatna do zbudowania podstaw teoretycznych dla odpowiedniości modelowej układów prętowych, podlegających uogólnionemu prawu Hooke'a. Należało tylko tę ogólnie znaną zasadę wyrazić za pomocą wielkości wewnętrznych, jak to uwidoczniło w równaniu (1.2). Udowodniono zarazem znacznie szerszą uniwersalność zasady wzajemności przemieszczeń, aniżeli jej się to ogólnie przypisuje. Zasada wzajemności przemieszczeń może słusznie współzawodniczyć z najogólniejszą w mechanice zasadą prac przygotowanych. Zwrócenie uwagi na ogólną przydatność omawianej zasady było między innymi także celem niniejszej pracy.

Gdyby chodziło o wielkości statyczne w układach prętowych liniowo sprężystych, to przy badaniach modelowych wyrażamy je przeważnie za pomocą przemieszczeń mierzonych na modelach. W celu uzyskania wielkości statycznych, odnoszących się do obiektów rzeczywistych, należy pomierzone przemieszczenia modelowe przeliczyć na rzeczywiste według wzorów (2.3). Samo wyznaczanie wielkości statycznych za pomocą badań modelowych nie jest objęte zakresem niniejszej pracy, mającej za zadanie głównie podanie warunków, którym powinien czynić zadość model, ażeby nadawał się do wyznaczenia tych wielkości. Rozważania dokładniejsze, dotyczące modelowego określenia wielkości statycznych zarówno dla układów płaskich jak i przestrzennych, zawarte są w obszernej monografii autora [1], a także w pracach [2, 3, 4 i 5]. Krótki zarys obliczania tych wielkości z pomiarów modelowych podano dla orientacji w p. 5 niniejszej pracy.

3. Warunki modelowe dla układów płaskich

Ażeby bardziej szczegółowo podać warunki odpowiedniości modelowej, wynikające z równości (2.1), podzielimy wszystkie zagadnienia na *płaskie i przestrzenne*. W zagadnieniach płaskich jest

$$K = N = Q = 0,$$

wobec tego warunek odpowiedniości przybiera postać następującą:

$$(3.1) \quad \frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \cdot \frac{fn}{ag}.$$

Wpływ siły podłużnej i poprzecznej na wielkości przemieszczeń jest bardzo mały, wskutek czego często go pomijamy, a uwzględniamy tylko wpływ momentu zginającego. Wówczas dla przesunięć będzie

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn^3}{ei_y} = \alpha,$$

dla kątów obrotu zaś

$$\frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{fn^2}{ei_y} = \frac{1}{n} \alpha.$$

Wtedy podziałki f , n , e , i_y przyjmujemy jako od siebie niezależne.

Jeżeli jednak zależy nam na uwzględnieniu większej dokładności, to biorąc np. pod uwagę wpływ siły podłużnej i momentu zginającego musimy tak wykonać model, ażeby jego podziałki spełniały warunek

$$\frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{ei_y}, \quad \text{czyli} \quad n^2 = \frac{i_y}{a} \quad \text{albo} \quad an^2 = i_y = \frac{I'_y}{I''_y} = \frac{A' r_y'^2}{A'' r_y''^2} = a \frac{r_y'^2}{r_y''^2},$$

$$\text{skąd} \quad n^2 = \frac{r_y'^2}{r_y''^2} \quad \text{lub ostatecznie} \quad n = \frac{r'_y}{r''_y},$$

gdzie r'_y i r''_y są głównymi środkowymi ramionami bezwładności przekroju obiektu rzeczywistego i modelu w odniesieniu do osi y (rys. 1). Dla uwzględnienia zatem przy modelowym wyznaczaniu wielkości statycznych wpływu siły podłużnej i momentu zginającego należy tak dobrać przekrój poprzeczny modelu, ażeby stosunek ramion bezwładności przekrojów obiektu i modelu był równy podziałce długości. Podziałkę pól a przyjmujemy niezależnie od n . Wtedy będzie

$$\frac{fn^3}{ei_y} = \frac{fn^3}{aen^2} = \frac{fn}{ae} = \alpha \quad \text{oraz} \quad \frac{fn^2}{ei_y} = \frac{fn^2}{aen^2} = \frac{f}{ae} = \frac{1}{n} \alpha,$$

zatem znowu

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = \alpha \quad \text{i} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n}.$$

Przy równoczesnym uwzględnieniu także siły poprzecznej powinien być dla modelu spełniony warunek

$$\frac{fn}{ae} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \frac{fn}{ag},$$

czyli

$$\frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = \frac{g}{e} = \frac{G'}{G''} \frac{E''}{E'} = \frac{E'}{2(1+\mu')} \cdot \frac{2(1+\mu'')}{E''} \frac{E''}{E'} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'},$$

gdzie μ' jest współczynnikiem Poissona materiału obiektu, a μ'' materiału modelu. W celu uwzględnienia również wpływu siły poprzecznej przekrój poprzeczny modelu powinien być zatem tak dobrany, ażeby był spełniony ostatni warunek. Wtedy także $g = e\kappa'_z/\kappa''_z$, czyli

$$\frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \frac{fn}{ag} = \frac{fn}{ae} = a.$$

Ponieważ stosunek $(1+\mu'')/(1+\mu')$ jest w praktyce zawsze różny od κ'_z/κ''_z , przeto dla spełnienia ostatniego warunku musimy zmienić nieco kształt przekroju poprzecznego w modelu, przy czym również spełniać się musi warunek $r'_y/r''_y = n$; nie trzeba jednak zważać zupełnie na stosunek pól a , albowiem wielkość ta nie występuje w omawianym warunku.

Podano w ten sposób zależności, jakie muszą zachodzić pomiędzy podziałkami modelu płaskiego układu prętowego, ażeby spełniony był ogólny warunek odpowiedniości modelowej, wyrażony w (2.2). Gdy przyjmiemy podziałkę n dla rozpiętości i ramion, podziałkę pól a i podziałkę sił f , to podziałka momentów bezwładności musi mieć postać $i_y = an^2$, co będzie miało miejsce zawsze przy zachowaniu warunku $r'_y/r''_y = n$. Jednakże podziałki n , a i f można zawsze przyjmować jako dowolne i od siebie niezależne. Inaczej nieco przedstawia się sprawa podziałki modułów sprężystości podłużnej e , o ile pragniemy uwzględnić wpływ siły poprzecznej. Podziałka e musi wtedy spełniać warunek $\kappa'_z/\kappa''_z = g/e = (1+\mu'')/(1+\mu')$, nie zależy zatem od poprzednich, nie jest już jednak dowolna. Nie zachodzi potrzeba zwracania na to uwagi, gdy godzimy się na opuszczenie nieznacznego zresztą wpływu siły poprzecznej. Wtedy podziałki n , a , f i e mogą być uważane za dowolne i niezależne. Dowolność podziałki e jest szczególnie dogodna, gdyż nie musimy krępować się wówczas zależnością $\kappa'_z/\kappa''_z = (1+\mu'')/(1+\mu')$, nie musimy tym samym korygować poprzecznego przekroju modelowego ani też dobierać dla modelu specjalnego materiału.

W praktyce badań modelowych dla płaskich układów prętowych z reguły zatem opuszczamy wpływ siły poprzecznej, gdyż daje on różnice, które kwalifikują się do rzędu wielkości pomijalnych. Najczęściej uwzględniamy wyłącznie wpływ momentu zginającego i mamy wówczas $a = fn^3/ei_y$. Dla zwiększenia dokładności możemy uwzględnić wpływ siły podłużnej przy $r'_y/r''_y = n$. W tym ostatnim przypadku wygodnie będzie, gdy odpowiedniość modelową

$$\frac{fn^3}{ei_y} = \frac{fn}{ae}$$

nieco zmodyfikujemy i założymy $a = n^2$ oraz $i_y = n$. Otrzymamy więc

$$\frac{fn^3}{en^4} = \frac{f}{an},$$

co oczywiście jest równoznaczne ze spełnieniem warunku modelowego dla równoczesnego uwzględnienia wpływu momentu zginającego i siły podłużnej. Postępowanie takie ułatwia praktyczny dobór grubości modelu.

4. Przykłady liczbowe

Przykład 1. Dana jest belka rzeczywista o kształcie dźwigara stalowego INP10. Zaprojektować odpowiedni przekrój modelu z płyty celuloidowej. Przekrój belki rzeczywistej charakteryzują następujące wartości: pole $A' = 10,6 \text{ cm}^2$, moment bezwładności $I'_y = 174 \text{ cm}^4$, ramię bezwładności $r'_y = 4,01 \text{ cm}$.

Przyjmijmy podziałkę długości $n = 10$. Przekrój modelu przy podziałce pól $a = n^2$ i podziałce momentów bezwładności $i_y = n^4$ wyznaczmy następująco:

$$\text{powierzchnia przekroju } A'' = \frac{A'}{a} = \frac{A'}{n^2} = \frac{10,6}{100} = 0,106 \text{ cm}^2,$$

$$\text{moment bezwładności } I''_y = \frac{I'_y}{i_y} = \frac{I'_y}{n^4} = \frac{174}{10\,000} = 0,0174 \text{ cm}^4.$$

Przyjmujemy prostokątny przekrój modelu, zatem $A'' = b''h''$, zaś $I''_y = \frac{b''h''^3}{12} = \frac{A''h''^2}{12}$. Wobec tego $h'' = \sqrt{\frac{12I''_y}{A''}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,0174}{0,106}} = 1,4 \text{ cm}$,

więc

$$b = \frac{A''}{h''} = \frac{0,106}{1,4} = 0,0734 \text{ cm}.$$

Ramię bezwładności przekroju modelowego wynosi $r''_y = 0,401 \text{ cm}$, zatem w odniesieniu do $r'_y = 4,01 \text{ cm}$ wypada w skali długości $n = 10$, jak być powinno dla równoczesnego uwzględnienia wpływu momentu zginającego i siły podłużnej. Jednakże model należy wykonać z płyty celuloidowej o grubości 0,0734 nie spotykanej w handlu, albowiem płyty te wyrabia się o grubościach co 0,5 mm.

Trudność tę omiemy, gdy przyjmiemy z góry grubość modelu b'' , a podziałkę długości n obliczymy odpowiednio. Mamy w tym celu do dyspozycji następujące zależności:

$$b''h''n^2 = A', \quad A'h''^2n^2 = 12I'_y$$

o niewiadomych h'' i n . Niewiadome te wyznaczmy w postaci:

$$h'' = \frac{12I'_y \cdot b''}{A'^2}, \quad n = \sqrt{\frac{A'}{b'' \cdot h''}}.$$

Zakładając $b'' = 0,1 \text{ cm}$ wyznaczmy wysokość przekroju modelu

$$h'' = \frac{12 \cdot 174 \cdot 0,1}{10,6^2} = 1,86 \text{ cm}, \quad n = \sqrt{\frac{10,6}{0,1 \cdot 1,86}} = 7,55.$$

Przykład 2. Wyznaczyć modelową skalę ugięć belki jak na rys. 2.

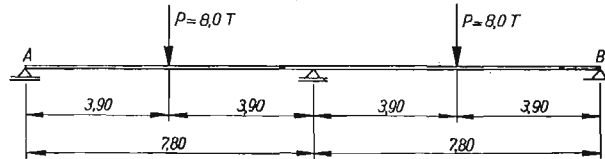
Belka wzdłuż całej długości ma stały moment bezwładności $I'_y = 15\,700 \text{ cm}^4$. Jest wykonana ze stali o stałej sprężystości $E' = 2\,100\,000 \text{ kG/cm}^2$.

Model belki wykonano z celuloidu o grubości 2 mm, skalę długości zastosowano 1 : 20, moment bezwładności przekroju modelowego $I''_y = 1,6 \text{ cm}^4$, stała sprężystości modelu $E'' = 25\,000 \text{ kG/cm}^2$, model obciążono siłą 1,0 kG.

Podziałki modelowe mają następujące wartości: dla długości $n = 20$, dla stałej sprężystości $e = \frac{2 \cdot 100\,000}{25\,000} = 84$, dla momentu bezwładności $i_y = \frac{15\,700}{1,6} = 9\,820$, dla sił $f = \frac{8000}{1} = 8000$.

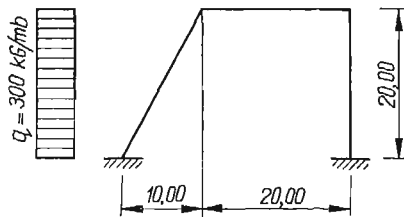
Uwzględniając tylko wpływ momentu zginającego otrzymamy

$$a = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{8000 \cdot 20^3}{84 \cdot 9820} = 77,6.$$



Rys. 2

Przykład 3. Wyznaczyć modelową skalę ugięć dla ramy jak na rys. 3 z uwzględnieniem wpływu momentu zginającego i siły podłużnej. Zastosowano następujące podziałki modelowe: dla sił $f = 1$, dla długości $n = 50$, dla stałych sprężystości podłużnych $e = 84$, dla powierzchni przekrojów $a = 215$. Podziałki te musiały być tak dobrane, ażeby skala ramion bezwładności dla przekrojów była równa skali długości dla modelu.



Rys. 3

Model wykonano z celulojdu o grubości 0,3 cm i wysokości 0,9 cm. Moment bezwładności prętów ramy jest stały i jednakowy. Podziałka ugięć ma wartość

$$a = \frac{fn}{ae} = \frac{1 \cdot 50}{215 \cdot 84} = 0,00277.$$

Przykłady powyższe zaczerpnięte zostały z pracy O. DĄBROWSKIEGO [3].

5. Warunki modelowe dla układów przestrzennych

Przechodząc z kolei do przestrzennych układów prętowych należy stwierdzić na wstępie, że ogólny warunek odpowiedniości modelowej (2.2)

$$\frac{1}{ae} = \frac{n^2}{gc} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_x} = \frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} \cdot \frac{1}{ag} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} \cdot \frac{1}{ag}$$

nie zawsze musi być brany w całości pod uwagę. Jeżeli mamy np. do czynienia z kratownicą, w której prętach występują tylko siły podłużne, wtedy wymagania wynikające z uwzględnienia momentu skręcającego, momentów zginających i sił poprzecznych odpadają, wobec tego

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a.$$

Jeżeli np. nie działają w układzie siły podłużne i momenty skręcające i nie uwzględniamy wpływu sił poprzecznych, wówczas model musi spełnić warunek

$$\frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z},$$

co zachodzi wtedy, gdy $i_y = i_z$, czyli $I'_y/I''_y = I'_z/I''_z$ albo $A'r'_y{}^2/A''r''_y{}^2 = A'r'_z{}^2/A''r''_z{}^2$, lub $a(r'_y{}^2/r''_y{}^2) = a(r'_z{}^2/r''_z{}^2)$, a więc ostatecznie gdy

$$(5.1) \quad \frac{r'_y}{r''_y} = \frac{r'_z}{r''_z} = \varrho.$$

Model w takim przypadku musi być tak sporządzony, ażeby stosunki głównych centralnych ramion bezwładności przekrojów poprzecznych w obiekcie i modelu były sobie równe. Wówczas będzie także

$$i_y = i_z = a\varrho^2, \quad \frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn^3}{ae\varrho^2} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{fn^2}{ae\varrho^2} = \frac{1}{n} a.$$

Gdybyśmy chcieli uwzględnić przy nieistniejącym ciągle momencie skręcającym oraz przy uwzględnieniu wpływu sił poprzecznych jeszcze siłę podłużną, to zgodnie z poprzednimi rozważaniami musiałoby być $r'_y/r''_y = r'_z/r''_z = \varrho = n$, a wtedy $fn^3/ae\varrho^2 = fn/ae$, czyli

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a.$$

Stosunki ramion bezwładności przekrojów poprzecznych w obiekcie rzeczywistym i modelu musiałyby być nie tylko równe, ale ponadto równe skali długości modelu.

Dla uwzględnienia wpływu sił poprzecznych przy nieistniejącym momencie skręcającym musiałby być spełniony warunek

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = k = \frac{g}{e} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'}.$$

Najlepiej byłoby przyjąć $k = 1$, czyli sporządzić model jako wierne pomniejszenie geometryczne obiektu rzeczywistego, tzn. w jednakowej skali dla rozpiętości i wymiarów poprzecznych, a tym samym zachować ten sam kształt przekroju, jaki ma on w obiekcie rzeczywistym. Byłoby to możliwe, gdyby obiekt i model sporządzone były z tego samego materiału. Skoro jednak w rzeczywistości $\mu' \neq \mu''$, to można uzyskać racjonalny model dla uwzględnienia wpływu sił poprzecznych na wyznaczane wielkości statyczne przez odpowiednie skorygowanie kształtu prze-

kroju modelu, zachowując jednak $\varrho = n$, a nie zważając na skalę przekroju poprzecznego a .

Gdy spełniony będzie warunek

$$k = \frac{1 + \mu''}{1 + \mu'},$$

wtedy także $g = ek$, a zatem znowu

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = \alpha, \quad \text{zaś} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{f}{ae} = \frac{1}{n} \alpha.$$

Rozważmy wreszcie wpływ momentu skręcającego. Najprościej przedstawia się ta sprawa w przypadku przekroju kołowego lub pierścieniowego, ponieważ wówczas wchodzi w grę biegunowy moment bezwładności, zaś $c = C'/C''$ jest wtedy stosunkiem biegunowych momentów bezwładności przekroju poprzecznego w obiekcie i modelu. Dla przekroju kołowego jest wtedy

$$c = \frac{\pi D'^4}{32} \cdot \frac{32}{\pi D''^4} = \frac{\pi D'^2}{4} \cdot \frac{D'^2}{D''^2} = \frac{A'}{A''} \cdot \frac{D'^2}{D''^2}.$$

Jeżeli dla wszelkich wymiarów poprzecznych zastosujemy tę samą skalę długości, wtedy $D'^2/D''^2 = n^2$, więc $c = an^2$.

Gdy po uwzględnieniu wszystkich omówionych do tej pory wpływów stosunek odpowiadających sobie przemieszczeń na obiekcie i modelu wynosił fn/ae , to powinno być i obecnie tak samo, wobec czego musiałyby zachodzić równość

$$\frac{fn}{ae} = \frac{fn^3}{gc} = \frac{fn^3}{agn^2} = \frac{fn}{ag}.$$

Z ostatniego wzoru widoczne jest, iż musiałyby być wtedy także

$$e = g, \quad \text{czyli} \quad \frac{e}{g} = \frac{1 + \mu'}{1 + \mu''} = 1$$

i model musiałyby być sporządzony z tego samego materiału co obiekt rzeczywisty. Wówczas uwzględnienie siły poprzecznej przedstawiałoby się również bardzo prosto. Wystarczyłoby zachować podobieństwo przekroju rzeczywistego do przekroju modelowego, ażeby był spełniony warunek konieczny przy uwzględnianiu wpływu siły poprzecznej

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = k = 1,$$

gdyż dla obiektu rzeczywistego i modelu z tego samego materiału jest zawsze

$$\frac{g}{e} = \frac{1 + \mu''}{1 + \mu'} = 1,$$

a wartość tego stosunku, jak to uprzednio stwierdzono, jest także równa wartości k .

W postępowaniu laboratoryjnym niemożliwe jest jednak sporządzanie modelu z tego samego materiału, z którego ma się wykonać naturalny obiekt budowlany. Materiał nadający się do sporządzania modeli powinien być łatwy do obróbki, przecinania i ponownego sklejania. Może to być pleksiglas, celulooid, ostatecznie dobra tektura, ale nie np. kamień naturalny, beton lub stal. Widać z tego, że wykonanie modelu nadającego się do uwzględnienia wszystkich wpływów jest dosyć kłopotliwe.

Jednakże w badaniach modelowych, podobnie zresztą jak w analitycznych sposobach wyznaczania wielkości statycznych, niektóre wpływy uważamy za przeważające i te uwzględniamy, a inne jako mniej ważne pomijamy, wtedy zaś wymiarowanie modelu znacznie się upraszcza.

W dążeniu do uzyskania możliwie najogólniejszych warunków modelowania przestrzennych układów prętowych uwzględnijmy równoczesne działanie momentu skręcającego K oraz dwóch momentów zginających M i N , a inne wpływy na razie pomijamy. Model spełniać musi wtedy warunek

$$\frac{n^2}{gc} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z},$$

albo

$$(5.2) \quad gc = ei_y = ei_z.$$

W tym przypadku musi zachodzić równość $i_y = i_z$, czyli $I'_y/I''_y = I'_z/I''_z$ albo $r'_y{}^2/r''_y{}^2 = r'_z{}^2/r''_z{}^2$, to zaś daje znany już warunek (5.1) w postaci $r'_y/r''_y = r'_z/r''_z = \varrho$.

Wiadomo, że $c = C'/C''$, jednakże dla przekrojów niekołowych C nie jest biegunowym momentem bezwładności, lecz pewną wartością zastępczą o tym samym wymiarze (według Saint-Venanta), mianowicie

$$C = \frac{A^4}{4\pi^3 J_0} = \frac{A^4}{4\pi^2 (I_y + I_z)} = \frac{A^3}{4\pi (r_y^2 + r_z^2)}.$$

W takim razie

$$c = \frac{A'^3}{A''^3} \frac{r_y''^2 + r_z''^2}{r_y'^2 + r_z'^2} = a^3 \frac{r_y''^2 + r_z''^2}{\varrho^2 (r_y'^2 + r_z'^2)} = \frac{a^3}{\varrho^2}.$$

Wstawiając ostatnią wartość do równania (5.2) i uwzględniając, że $i_y = i_z = a\varrho^2$, otrzymamy $gc = ga^3/\varrho^2 = ea\varrho^2$, a stąd $a = \varrho^2 \sqrt{e/\varrho}$, czyli

$$(5.3) \quad a = \varrho^2 \sqrt{\frac{1+\mu'}{1+\mu''}}.$$

Gdy model czyni zadość warunkom (5.1) i (5.3), wtedy zachodzi równość (5.2), natomiast

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn^3}{ae\varrho^2} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{fn^2}{ae\varrho^2} = \frac{1}{n} a.$$

W ostatnim rozważaniu charakterystyczne jest to, że dla uwzględnienia momentu skręcającego łącznie z dwoma momentami zginającymi należy zastosować specjalną podziałkę pól, zależną od materiału obiektu i modelu.

Gdyby chodziło o równoczesne uwzględnienie jeszcze wpływu siły podłużnej, to zgodnie z poprzednią uwagą musiałyby być

$$\varrho = n, \quad \text{czyli} \quad a = n^2 \sqrt{\frac{1+\mu'}{1+\mu''}},$$

wobec czego

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a, \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a.$$

Ażeby, na koniec, łącznie z wymienionymi wpływami mógł być jeszcze uwzględniony wpływ siły poprzecznej, powinien spełniać się dodatkowo znany już zresztą warunek

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = \frac{g}{e} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'},$$

co z powodu $\mu' \neq \mu''$ realizujemy przez odpowiednią korektę kształtu przekroju poprzecznego w modelu.

W celu wyznaczenia zatem pewnej wielkości statycznej za pomocą badań modelowych dla jakiegoś przestrzennego układu prętowego, podlegającego uogólnionemu prawu Hooke'a, przy uwzględnieniu wszystkich wpływów wewnętrznych, jak siły podłużnej, momentu skręcającego, dwóch momentów zginających i dwóch sił poprzecznych, należy wykonać model, który powinien wykazywać następujące własności:

Skala pól przekroju poprzecznego modelu określona jest stosunkiem

$$a = n^2 \sqrt{\frac{1+\mu'}{1+\mu''}},$$

gdzie n oznacza dowolnie przyjętą skalę długości, μ' jest współczynnikiem zwięzienia poprzecznego dla materiału, z którego ma być wykonany obiekt rzeczywisty, a μ'' współczynnikiem dla materiału, z którego ma być sporządzony model.

Stosunki głównych centralnych ramion bezwładności przekroju poprzecznego w obiekcie rzeczywistym i modelu powinny czynić zadość równaniu

$$\frac{r'_y}{r''_y} = \frac{r'_z}{r''_z} = \varrho = n.$$

Kształt przekroju poprzecznego w modelu ma być tak dobrany, aby zachodziła równość

$$\frac{\kappa'_y}{\kappa''_y} = \frac{\kappa'_z}{\kappa''_z} = \frac{g}{e} = \frac{1+\mu''}{1+\mu'},$$

gdzie κ'_y i κ''_y oznaczają tzw. «współczynniki kształtu», wynikające z uwzględnienia siły poprzecznej Q (rys. 1), zaś κ'_z i κ''_z są takimi współczynnikami dla siły poprzecznej T . Wszelkie zmiany kształtu przekroju poprzecznego w modelu, dokonywane ze względu na zachowanie ostatniego warunku, nie mogą spowodować zmiany wartości $\varrho = n$, albowiem obecnie musi być koniecznie przestrzegana wyżej określona skala pól a .

Z chwilą spełnienia wymienionych warunków stosunek przemieszczeń rzeczywistych do modelowych wyraża się znanym już związkiem

$$\frac{p'_{iK}}{p''_{iK}} = \frac{fn}{ae} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{\varphi'_{iK}}{\varphi''_{iK}} = \frac{1}{n} a,$$

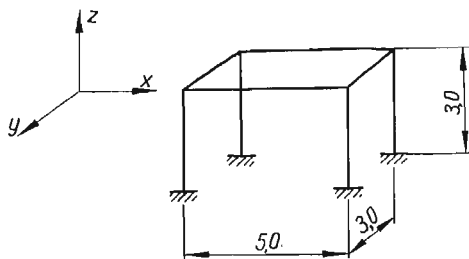
w którym f jest dowolnie przyjętą podziałką sił, zaś e podziałką stałych sprężystości podłużnej, określoną materiałem obiektu rzeczywistego i modelu, a związaną ze skalą stałych sprężystości poprzecznej równaniem

$$\frac{e}{g} = \frac{1 + \mu'}{1 + \mu''}.$$

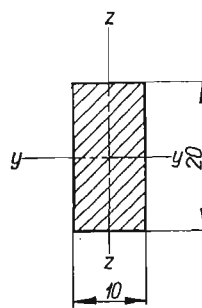
W ten sposób ustalono warunki modelowe dla najogólniejszego przypadku przestrzennego układu prętowego.

6. Przykłady liczbowe

Przykład 1. Zaprojektować model dla jednokomorowej ramy o węzłach przesuwnych, podanej na rys. 4. Przekrój prętów poziomych ma wymiary 10×25 cm z bokiem dłuższym równoległym do osi z . Przekrój słupów ma wymiary 10×20 cm i bok dłuższy równoległy do osi x .



Rys. 4



Rys. 5

W tym przypadku przy projektowaniu modelu wystarczy uwzględnić wyłącznie wpływ momentu zginającego, gdyż jest to wpływ dominujący. Jak wiadomo, wpływ ten będzie uwzględniony, gdy spełniać się będzie warunek $i_y = i_z$, tzn. gdy podziałki głównych centralnych momentów bezwładności przekroju dla obiektu rzeczywistego i modelu będą sobie równe.

a) Słupy. Dla obiektu:
moment bezwładności względem osi y

$$I'_y = \frac{10 \times 20^3}{12} = 6600 \text{ cm}^4,$$

moment bezwładności względem osi z

$$I'_z = \frac{20 \times 10^3}{12} = 1666 \text{ cm}^4.$$

Przyjęto przekrój słupa w modelu o wymiarach $0,4 \times 0,8$ cm. Wobec tego

$$I_y'' = \frac{0,4 \cdot 0,8^3}{12} = 0,017067 \text{ cm}^4, \quad I_z'' = \frac{0,8 \cdot 0,4^3}{12} = 0,004267 \text{ cm}^4.$$

Podziałki modelowe dla momentów bezwładności w słupach mają wobec tego wartości:

$$i_y = \frac{I_y'}{I_y''} = \frac{6600}{0,0171} = 390\,625, \quad i_z = \frac{I_z'}{I_z''} = \frac{1666}{0,00426} = 390\,625.$$

Wymagany zatem warunek modelowy dla słupów jest spełniony.

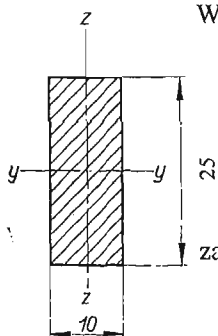
b) Pręty poziome:

Momenty bezwładności w obiekcie rzeczywistym

$$I_y' = \frac{10 \cdot 25^3}{12} = 13\,000 \text{ cm}^4, \quad I_z' = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2082 \text{ cm}^4.$$

Przyjęto przekrój prętów poziomych w modelu $0,4 \times 1,0$ cm, zatem

$$I_y'' = \frac{0,4 \times 1^3}{12} = \frac{1}{30} \text{ cm}^4, \quad I_z'' = \frac{1 \times 0,4^3}{12} = \frac{16}{3000} \text{ cm}^4,$$



Rys. 6

natomiast

$$i_y = \frac{I_y'}{I_y''} = \frac{13\,000}{0,0334} = 390\,625, \quad i_z = \frac{I_z'}{I_z''} = \frac{2082}{0,00534} = 390\,625,$$

czyli $i_y = i_z$.

Przy sposobności należy wyjaśnić, że warunek $i_y = i_z$ musi się spełniać dla wszystkich prętów układu nie tylko w ten sposób, że wielkości te będą jednakowe dla poszczególnych prętów z osobna, ale również wartości liczbowe stosunków $i_y = I_y'/I_y''$, $i_z = I_z'/I_z''$ muszą być sobie równe i jednakowe dla wszystkich prętów.

Podziałkę długości przyjęto $n = 12,5$, model wykonano z celuloиду o stałej sprężystości podłużnej $E'' = 18\,000$ kG/cm². Jeżeli przyjmiemy $E' = 2\,100\,000$ kG/cm², to podziałka $e = E'/E'' = 116,6$. Zakładając ponadto skalę sił $f = 1000$, otrzymamy następującą podziałkę przemieszczeń modelowych

$$\alpha = \frac{fn^3}{ei_y} = \frac{1000 \times 12,5^3}{116,6 \times 390\,625} = 0,00365.$$

Przykład 2. Wyznaczyć podziałkę przemieszczeń modelowych dla kratownicy przestrzennej z węzłami sztywnymi jak na rys. 7.

Wymiarowanie modelu kratownicy musi się odbyć z uwzględnieniem momentu zginającego, albowiem kratownica ma węzły sztywne, a także z uwzględnieniem siły podłużnej, gdyż ta ma poważny wpływ w prętach kratownicy.

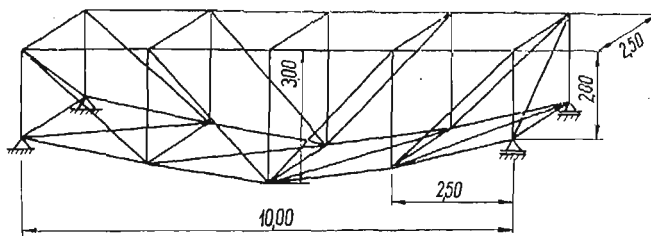
Spełniony zatem musi być warunek $fn/ae = fn^3/ei' = fn^3/ei''$, co zajdzie, gdy $i_y = i_z$ a ponadto, gdy $r_y'/r_y'' = r_z'/r_z'' = \varrho = n$, tzn. gdy wartości liczbowe stosunków

głównych centralnych ramion bezwładności przekroju w obiekcie rzeczywistym i modelu będą sobie równe i równe skali długości. Ten ostatni warunek spełni się, jeżeli do wymiarów przekroju modelowego zastosujemy skalę długości. Wtedy będzie

$$a = n^2 \quad \text{oraz} \quad i_y = i_z = n^4,$$

zatem

$$fn/n^2e = fn^3/n^4e = f/ne = a.$$



Rys. 7

Przyjmując $f = 1000$, $n = 50$, $e = 116,6$ otrzymamy

$$\alpha = \frac{1000}{50 \times 116,6} = 0,17.$$

Ostatnie przykłady liczbowe przytoczono z pracy T. KOLENDOWICZA [4].

7. Obliczanie wielkości statycznych. Zakończenie

Głównym celem niniejszej pracy było wykazanie przydatności zasady wzajemności przemieszczeń Bettiego do wyprowadzenia odpowiedniości modelowej, a następnie podanie warunków, którym model musi czynić zadość, ażeby w ogóle nadawał się do modelowego wyznaczania wielkości statycznych. Jak już wspomniano w p. 2, ograniczono się z góry do takiego zakresu pracy, a pominięto rozumowania prowadzące do wzorów służących do modelowego ustalania samych wielkości statycznych. Jednakże dla tym lepszej ilustracji podanych warunków modelowych przejdziemy obliczanie wielkości wewnętrznych w oparciu o gotowe wzory, omówione dokładnie w pracy [1].

Mózna udowodnić również za pomocą zasady Bettiego, że moment zginający M , siłę poprzeczną T i siłę podłużną S można wyznaczyć za pomocą badań modelowych według wzorów:

$$M = P \frac{m}{\beta}, \quad T = P \frac{t}{w}, \quad S = P \frac{s}{u}.$$

Wzory te wynikają z tzw. metody przemieszczeń wymuszonych (por. [1]). We wzorach tych P jest siłą wywołującą poszukiwane wielkości statyczne, zaś m , t i s są to przemieszczenia odpowiadające sile P , a wywołane w modelowym układzie pomocniczym wskutek wymuszenia specjalnymi deformatoremami przemieszczeń β , w i u jako odpowiadających poszukiwanym wielkościom statycznym.

Wielkości statyczne, wyrażone przytoczonymi przykładowo wzorami, można odnieść do rzeczywistego obiektu budowlanego; będą to wielkości rzeczywiste. Można je odnieść także do modelu, wówczas będą to wielkości modelowe. Dla zaznaczenia tej różnicy wyrazimy wielkości rzeczywiste wzorami

$$M' = P' \frac{m'}{\beta'}, \quad T' = P' \frac{t'}{w'}, \quad S' = P' \frac{s'}{u'},$$

a modelowe

$$M'' = P'' \frac{m''}{\beta''}, \quad T'' = P'' \frac{t''}{w''}, \quad S'' = P'' \frac{s''}{u''}.$$

W praktyce chodzi tylko o wielkości rzeczywiste, a do ich obliczenia znamy jedynie obciążenie rzeczywiste P' . Potrzebne natomiast przemieszczenia rzeczywiste otrzymamy mnożąc pomierzone przemieszczenia modelowe przez odpowiedni współczynnik a , gdy mamy na myśli przesunięcia, oraz przez a/n , jeśli mamy na myśli obroty. Wobec tego można napisać.

$$M' = P' \frac{am''}{\frac{a}{n}\beta''} = P' \frac{m''}{\beta''} n, \quad T' = P' \frac{at''}{aw''} = P' \frac{t''}{w''}, \quad S' = P' \frac{as''}{au''} = P' \frac{s''}{u''}.$$

Moment zginający rzeczywisty obliczamy mnożąc siłę rzeczywistą P' przez $m''n/\beta''$, gdzie m'' i β'' są przemieszczeniami pomierzonymi na modelu, n zaś jest skalą długości modelu. Liczba $m''n/\beta''$ ma wymiar długości.

Podobnie postępujemy przy obliczaniu drugiego momentu zginającego i momentu skręcającego w układzie przestrzennym.

Siłę poprzeczną lub podłużną obliczamy mnożąc siłę rzeczywistą P' przez t''/w'' albo przez s''/u'' , gdzie t'' , w'' , s'' i u'' są znanymi przemieszczeniami modelowymi. Wielkości t''/w'' i s''/u'' są niemianowane.

Wynika stąd, że jedynie podziałka długości n wchodzi bezpośrednio do obliczania wielkości statycznych. Wpływ innych podziałek jest pośredni i kryje się w warunkach modelowych. Nie należy jednak sądzić, że stosunek $e = E'/E''$ albo $g = G'/G''$ jest tu w ogóle bez znaczenia. Gdyby chodziło o uwzględnienie wpływu momentu skręcającego lub siły poprzecznej, to należałoby właściwie wykonać model z tego samego materiału co obiekt rzeczywisty, gdyż potrzebna wówczas równość $e = g$ zachodziłaby dla $\mu' = \mu''$. Ponieważ w praktyce laboratoryjnej jest to niemożliwe, przeto wykonując model z innego materiału musimy zmienić kształt przekroju poprzecznego w modelu w ten sposób, aby spełniła się równość $\kappa'_y/\kappa''_y = \kappa'_z/\kappa''_z = g/e = (1+\mu'')/(1+\mu')$, a zmiana ta zależy zarówno od e jak i g .

W ten sam sposób obliczalbymy wielkości statyczne i w oparciu o tak samo zbudowaną odpowiedniość modelową stosując jakąkolwiek inną metodę badań modelowych, np. metodę przegubową (por. praca 1), byle tylko poszukiwane wielkości statyczne wyrażane były za pomocą przemieszczeń mierzonych na modelu obiektu rzeczywistego.

Przedstawiona metoda modelowego obliczania wielkości statycznych dla układów prętowych może być rozszerzona na układy płytowe i powierzchniowe. Pozytywne wyniki w tym zakresie ma również T. KOLENDOWICZ.

Badania modelowe obejmować mogą zarówno układy obciążone siłami uogólnionymi, jak i narażone na działanie wpływów niemechanicznych, np. na wpływ zmiany temperatury, osiadania podpór, skurczu betonu itp. Stronę praktyczną tych badań modelowych opracował O. MICHEJDA [5] projektując specjalne i precyzyjne przyrządy. O. MICHEJDA ograniczył się jednak w swojej pracy tylko do układów płaskich. Badania modelowe wpływów niemechanicznych na układy przestrzenne w realizacji praktycznej oczekują jeszcze na wszechstronne opracowanie. Strona teoretyczna tychże badań w oparciu o zasadę Bettiego została podana w pracy [1].

Wymienić można wiele jeszcze innych zagadnień z zakresu badań modelowych wymagających praktycznego i laboratoryjnego opracowania. Do nich należy np. bardzo ciekawa metoda przegubowa. Niejeden temat pracy doktorskiej i habilitacyjnej może dotyczyć tej problematyki. Tematów tych unika się niestety u nas głównie ze względu na to, że wymagają one dużego nakładu pracy i są kosztowne. Wynikają stąd oczywiste szkody, gdyż badania na modelach zezwalają na bardziej wnikliwy wgląd w pracę konstrukcji (szczególnie budowlanych), co z kolei rzeczy mogłoby wpłynąć na bardziej ekonomiczne projektowanie, zgodne z istotnym postępem technicznym.

Do sporządzania modeli najlepiej nadaje się celuloid. Jest to materiał wystarczająco izotropowy, o granicy sprężystości około 250 kG/cm^2 , płynności 400 kG/cm^2 , doraźnej wytrzymałości $25\,000 \text{ kG/cm}^2$, współczynnik Poissona wynosi 0,42. Celuloid daje się łatwo obrabiać piłką i nożem, a skleja się łatwo acetonem. Jest to materiał krajowy, a więc dostępny.

Literatura cytowana w tekście

[1] M. JANUSZ, *Teoria badań modelowych ustrojów statycznie niewyznaczalnych*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1952.

[2] M. JANUSZ, *Z teorii modelowych badań wpływów niemechanicznych w układach prętowych*, Księga Jubileuszowa dla uczczenia zasług naukowych prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950.

[3] O. DĄBROWSKI, *Statyka modelowa pełnościennych płaskich układów prętowych*, praca doktorska, nieopublikowana, Wrocław 1958.

[4] T. KOLENDOWICZ, *Statyka modelowa układów prętowych przestrzennych*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1963.

[5] O. MICHEJDA, *Badania modelowe wpływów niemechanicznych w ustrojach prętowych*, praca doktorska, nieopublikowana, Częstochowa 1960.

Резюме

ПРИНЦИП БЕТТИ В КАЧЕСТВЕ ОСНОВЫ ДЛЯ УСЛОВИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью модельного определения статических величин, выступающих в стержневой линейно-упругой системе, изготовляем модель действительного объекта. Эта модель должна иметь осевое начертание геометрически подобное с действительным, а все размеры модели

должны быть так подобраны, чтобы отношение соответствующих перемещений объекта и модели выражалось тем же числом, независимо от места этих перемещений и положения сил. Численное значение этого отношения зависит исключительно от принятых масштабов и учитываемых обобщенных внутренних величин, как влияющих на искомые статические величины.

Тогда тоже значение должны иметь и отношения отдельных слагаемых в выражении на перемещения в действительном объекте и модели. Это касается так перемещений как и углов поворота при деформации.

Выражение для упомянутого перемещения в действительном объекте и модели получено на основе известного принципа взаимности перемещений Бетти.

Отношение соответствующих углов поворота в объекте и модели, в n раз меньше отношения перемещений, где n — масштаб длины осевого начертания модели.

S u m m a r y

BETTI'S PRINCIPLE AS A BASIS OF MODEL CONDITIONS

To determine static quantities of a linear elastic bar system, we make a model of an actual structure. This model must have an axial outline geometrically similar to that of the actual structure and all its dimensions must be so determined that the ratio of the corresponding displacements of the actual structure and the model are the same, independent of the place of those displacements and the position of forces.

This ratio depends on the accepted scale and the generalized static quantities only and should equal the ratio of corresponding quantities of the actual structure and the model. This applies both to the deformations of translations and the rotations.

The expression for the displacement of the actual structure and the model has been obtained on the ground of the well known Betti reciprocal theorem for displacements.

The ratio of the corresponding rotation angles of the actual structure and the model is n times smaller than the ratio of translations where n is the scale of the linear scale of the model.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 maja 1964 r.