

OBCIĄŻENIA DYNAMICZNE BELEK. BELKA TIMOSHENKI

KRZYSZTOF WILMAŃSKI (ŁÓDŹ)

Oznaczenia

A_i całkowity przekrój belki,
 A_s przekrój sprowadzony dla ścinania,
 J_e moment bezwładności przekroju dla zginania,
 J_i moment bezwładności przekroju dla bezwładności obrotowej,

$$c_1 = \sqrt{\frac{EJ_e}{\rho J_i}} \text{ szybkość fali podłużnej,}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{GA_s}{\rho A_i}} \text{ szybkość fali poprzecznej,}$$

$$K = \frac{\rho A_i}{EJ_e},$$

$$r = \sqrt{\frac{J_i}{A_i}} \text{ promień bezwładności przekroju,}$$

$$a = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2^2}$$

$$b = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_2^2},$$

l długość belki,

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l},$$

w ugięcie całkowite osi obojętnej zginania,

w_b ugięcie osi obojętnej, spowodowane momentem gnącym,

w_s ugięcie osi obojętnej, spowodowane siłami tnącymi,

\bar{w} transformata ugięcia w ,

x, t współrzędne miejsca i czasu,

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r} \text{ współrzędne bezwymiarowe miejsca i czasu,}$$

p parametr transformacji,

M moment gnący,

M_0 zewnętrzny moment obciążający,

Q siła poprzeczna

$q(x)$ zewnętrzne obciążenie ciągłe,

ω częstotliwość drgań belki,

ω_{n1}, ω_{n2} częstotliwość drgań belki pierwszego i drugiego rodzaju dla fal harmoniczných,

- $\eta(t)$ funkcja jednostkowa Heaviside'a,
 J_m, I_m funkcje Bessela pierwszego rodzaju rzędu m od argumentu, odpowiednio rzeczywistego i urojonego,
 E, G moduł Younga i moduł odkształcenia postaciowego.

1. Wstęp

Rozwój przemysłu oraz budowa urządzeń szczególnie narażonych na obciążenia dynamiczne wywołały konieczność uściślenia metod obliczeniowych, stosowanych w klasycznej wytrzymałości materiałów. W 1914 r. H. LAMB [34] zwrócił uwagę, że nawet w najprostszym przypadku belki obciążonej udarowo elementarne równanie drgań, podane przez BERNOULLIEGO i EULERA

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

nie jest prawdziwe. W powyższym równaniu EJ oznacza sztywność na zginanie, ρA masę belki na jednostkę długości, w ugięcie, x, t współrzędne odpowiednio miejsca i czasu.

Równanie to prowadzi do wyniku świadczącego, że wpływ nagle przyłożonego obciążenia rozchodzi się z szybkością nieskończoną. W celu wyeliminowania tego błędu nie zrezygnowano z metod wytrzymałościowych i zgodnie z propozycją S. P. TIMOSHENKI [47] wprowadzono do równania Bernoulliego-Eulera poprawki uwzględniające wpływ sił poprzecznych na ugięcie oraz siły bezwładności obrotowej (poprawka Rayleigha). Mimo że teoria równania Timoshenki jest znacznie bardziej skomplikowana od elementarnej, to jednak jest ona znacznie prostsza od rozwiązania trójwymiarowego układu równań liniowych teorii sprężystości.

2. Podstawowy układ równań

Niech $ABCD$ będzie elementem ograniczonym przez dwa przekroje belki pryzmatycznej, prostopadłe do nieodkształconej osi belki Ox , odległe od siebie o dx . Wtedy związki fizyczne (przy założeniu słuszności hipotezy płaskich przekrojów) mają postać:

$$(2.1) \quad M = -EJ_e \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2},$$

$$(2.2) \quad Q = GA_s \frac{\partial w_s}{\partial x},$$

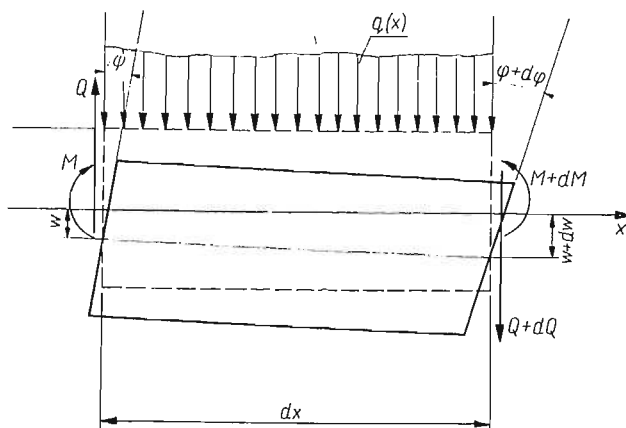
gdzie $w = w_b + w_s$ jest całkowitym ugięciem belki.

Równania równowagi elementu przedstawionego na rys. 1 prowadzą do zależności:

$$(2.3) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A_i \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x),$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q - \rho J_i \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2 \partial x}.$$

Układ równań (2.1)–(2.4) stanowi podstawowe wzory teorii Timoshenki. Są one cytowane w różnej postaci, jednak najczęściej spotykane jest równanie opisujące ugięcie w . Po wyeliminowaniu z wyżej przytoczonych równań w_b , w_s , M i Q otrzymujemy (postać jednorodna — $q(x) \equiv 0$) [31], [47]:



Rys. 1

$$(2.5) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + K \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Zastanowimy się obecnie nad sensem fizycznym współczynników c_1^2 i c_2^2 .

3. Dowód falowości równania Timoshenki

Charakter fizyczny równania (2.5) po raz pierwszy zbadali w 1942 r. J. PRESCOTT [43] i W. FLÜGGE [20]. Poniżej przytoczymy rozważania przeprowadzone przez J. S. UFLJANDA [49] w oparciu o metodę transformacji Laplace'a.

Załóżmy, że:

$$(3.1) \quad \bar{w}(x, p) = \int_0^{\infty} w(x, t) e^{-pt} dt,$$

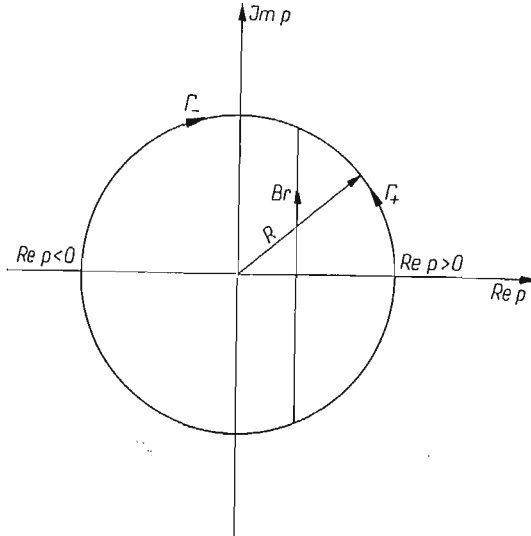
wtedy

$$(3.2) \quad w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \bar{w}(x, p) e^{pt} dp,$$

gdzie symbol (Br) oznacza kontur Bromwicha-Wagnera na płaszczyźnie zmiennej zespolonej p (rys. 2). Prosta określona symbolem (Br) ogranicza obszar wartości p , dla których transformata ugięcia $\bar{w}(x, p)$ jest analityczna. Wszystkie punkty osobliwe $\bar{w}(x, p)$ znajdują się po lewej stronie tej prostej.

Jeśli operację opisaną związkiem (3.1) wykonamy nad równaniem (2.5), to otrzymamy:

$$(3.3) \quad \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - p^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} + p^2 \left(\frac{p^2}{c_1^2 c_2^2} + K \right) \bar{w} = 0.$$



Rys. 2

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$(3.4) \quad \bar{w}(x, p) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{-n_i x}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$(3.5) \quad n_i = \pm M \sqrt{p} \sqrt{p \pm N \sqrt{p^2 - a}}, \quad A_i \text{ są stałymi całkowania.}$$

Transformatę odwrotną (3.2) określimy dla pręta półnieskończonego $x > 0$. Wtedy (3.4) przechodzi w związek:

$$(3.6) \quad \bar{w}(x, p) = A_1(p) e^{-n_1 x} + A_2(p) e^{-n_2 x},$$

gdzie $\text{Re } n_1 > 0$ i $\text{Re } n_2 > 0$.

Rozwiązaniem równania (2.6) dla tego przypadku jest funkcja:

$$(3.7) \quad w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} [A_1(p) e^{-n_1 x} + A_2(p) e^{-n_2 x}] e^{pt} dp.$$

Z twierdzenia Cauchy'ego i poczynionych powyżej [por. objaśnienie wzoru (3.2)] założeń odnośnie konturu wynika, że całki po prostej (Br) i po łuku Γ_+ są sobie równe. Zgodnie z (3.5) dla dużych $|p|$ mamy zależność:

$$n_1 \sim \frac{p}{c_1}, \quad n_2 \sim \frac{p}{c_2}$$

i dla dostatecznie dużego R można napisać:

$$(3.8) \quad w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} A_1(p) \exp p \left(t - \frac{x}{c_1} \right) \exp(\varepsilon_1 x) dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} A_2(p) \exp p \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \exp(\varepsilon_2 x) dp,$$

gdzie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0.$$

Gdy $\lim_{|p| \rightarrow \infty} A_1(p) = \lim_{|p| \rightarrow \infty} A_2(p) = 0$, to z twierdzenia Jordana otrzymujemy:

$$w_1 = 0 \quad \text{dla} \quad t < \frac{x}{c_1}, \quad w_2 = 0 \quad \text{dla} \quad t < \frac{x}{c_2}.$$

A więc efekt obciążenia rozprzestrzenia się w pręcie w postaci dwóch fal o szybkościach c_1 i c_2 . Charakter tego ruchu falowego zbadali: w 1947 r. J. L. B. COOPER [9], później H. SCHIRMER [46] oraz B. BUDIANSKY i R. W. LEONARD [7]. Ta ostatnia praca oparta jest na metodzie charakterystyk zastosowanej zarówno do belki nieskończonej, jak i skończonej.

4. Drgania własne belki

Największa liczba prac dotyczy rozwiązania równania Timoshenki dla przypadku drgań własnych. Różnią się one zarówno warunkami brzegowymi, jak i metodami rozwiązań. Pierwsze wyniki dotyczące belek nieskończonych zostały podane przez E. T. KRUSZEWSKIEGO [32] i R. A. ANDERSONA [1]. Prace radzieckie dotyczą głównie pojedynczych fal harmonicznyc [19, 29, 42]. Ocenę wpływu wprowadzonych poprawek na częstotliwość drgań przeprowadził po raz pierwszy TIMOSHENKO we wspomnianej pracy [47]. To samo zagadnienie rozpatrywali R. D. MINDLIN i H. DERESIEWICZ [39], V. PĚTROVSKY [40], T. C. HUANG [26]. Ten ostatni autor wprowadził do analizy drgań własnych metodę Galerkiną i związaną z nią metodę wariacyjną Ritza [27]. Przy pomocy numerycznej metody Myklestada-Thomsona, polegającej na podziale masy belki na n mas skupionych, T. C. HUANG i N. C. WU obliczyli drgania własne belki o zmiennym przekroju [25, 28]. Okazuje się, że wyniki różnią się w tym przypadku o 2-30% od rozwiązań wg teorii klasycznej. Rozbieżność jest tym większa, im wyższy jest numer rozpatrywanej harmoniki.

Wreszcie D. J. WEIDMANN [51] omówił przypadek belki o przekroju cienkościennego dwuteownika z dwoma osiami symetrii. Rozwiązań poszukiwał w postaci rozkładu zaburzeń na pojedyncze fale harmoniczne. Wyniki odbiegają od klasycznych nawet o 40%.

Poniżej przytoczymy analizę częstotliwości drgań w oparciu o rozwiązanie równania Timoshenki w postaci pojedynczej fali harmonicznyc. Dla belki

swobodnie podpartej układ równań (2.1)-(2.4) zapisujemy w następującej formie:

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \right) = c_2^2 K \frac{\partial}{\partial x} (w_b - w).$$

Szukamy rozwiązania w postaci

$$(4.2) \quad \left. \begin{aligned} w &= A \sin \alpha_n x \sin \omega t \\ \frac{\partial w_b}{\partial x} &= B \cos \alpha_n x \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie l jest długością belki. Po podstawieniu (4.2) do (4.1) otrzymujemy:

$$(4.3) \quad A \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 \right) + B \alpha_n = 0,$$

$$A \alpha_n c_2^2 K + B \left(-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} - c_2^2 K \right) = 0.$$

Układ równań jednorodnych (4.3) ma rozwiązanie nietrywialne, jeśli

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{c_2^2} - \alpha_n^2 & \alpha_n \\ \alpha_n c_2^2 K & \left(-\alpha_n^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} - c_2^2 K \right) \end{vmatrix} = 0,$$

co prowadzi do równania:

$$\frac{\omega^4}{c_1^2 c_2^2} - \left\{ \alpha_n^2 \left[\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right] + K \right\} \omega^2 + \alpha_n^4 = 0.$$

Rozwiązanie otrzymujemy w postaci:

$$(4.4.1) \quad \omega_{n1} = \frac{\alpha_n}{c_1 c_2 \sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right)^2 - \frac{4}{c_1^2 c_2^2}}};$$

$$(4.4.2) \quad \omega_{n2} = \frac{\alpha_n}{c_1 c_2 \sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{K}{\alpha_n^2} \right)^2 - \frac{4}{c_1^2 c_2^2}}};$$

łatwo wykazać (por. np. [42]), że częstotliwość ω_{n1} jest zawsze mniejsza od częstotliwości otrzymywanych wg teorii klasycznej. Obniżenie częstotliwości ω_{n1} w stosunku do wyników klasycznych okazuje się tym większe, im krótsze są fale odkształceń. Dla częstotliwości pierwszej fali wynosi ono np. 2%, ale już dla piątej harmoniki sięga 25%. Częstotliwość drugiego rodzaju ω_{n2} jest bardzo znaczna i jest porównywalna z ω_{n1} tylko dla bardzo krótkich fal (w porównaniu z wymiarami przekroju poprzecznego belki).

5. Drgania wymuszone

Wyznaczenie ugięć, kątów obrotów stycznych, sił uogólnionych oraz częstości w przypadku obciążenia belki czynnikami wymuszającymi drgania sprowadza się do rozwiązania pewnego zagadnienia granicznego dla równań Timoshenki. Metody rozwiązań są różne w zależności od typu zadania. Wszystkie rozwiązania ściśle otrzymano dotąd w oparciu o metodę transformacji całkowych. Ze względu na trudności matematyczne większość prac dotyczy belek nieskończonych i półnieskończonych.

Ponieważ w zagadnieniu obok zmiennej miejsca występuje czas t , więc często stosowaną jest transformacja Laplace'a. Omówimy pokrótce przypadek belki półnieskończonej, obciążonej na końcu swobodnie podpartym momentem Heaviside'a $M(0, t) = M_0 \gamma(t)$. Zagadnienie to zostało rozwiązane przez FLÜGGEGO i ZAJACA [21]. Podstawowe równania Timoshenki (2.1)-(2.4) po przetransformowaniu i uwzględnieniu warunków granicznych prowadzą do następujących związków:

$$(5.1) \quad \bar{M}(\xi, p) = \bar{M}_1(\xi, p) + \bar{M}_2(\xi, p),$$

$$(5.2) \quad \bar{M}_1(\xi, p) = \frac{M_0}{2p} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp(-n_1 \xi),$$

$$(5.3) \quad \bar{M}_2(\xi, p) = \frac{M_0}{2p} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp(-n_2 \xi),$$

gdzie

$$(5.4) \quad \bar{M}(\xi, p) = \int_0^\infty M(\xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad \xi = \frac{x}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r},$$

$$n_{1,2} = [ap^2 \mp p(b^2 p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]^{\pm} \quad a = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_2^2}, \quad b = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_2^2}.$$

Można wykazać (por. p. 3), że $M_1(\xi, \tau) = 0$, gdy $\tau < \xi$, oraz $M_2(\xi, \tau) = 0$, gdy $\tau < \xi(c_1/c_2)$. A więc moment gnący rozchodzi się w postaci dwóch fal o różnych szybkościach frontów. Poszukiwanie transformat odwrotnych $\bar{M}_i(\xi, p)$ w pracy [21] przeprowadzono w oparciu o rozkład funkcji w szereg potęgowy.

Przedstawimy $\bar{M}_i(\xi, p)$ w postaci rozkładu w szereg względem $1/b^2 p^2$. Otrzymamy:

$$(5.5) \quad \bar{M}_1\left(\frac{\xi}{b}, bp\right) = e^{-p\xi} \bar{G}_1\left(\frac{1}{bp}\right), \quad \bar{M}_2\left(\frac{\xi}{b}, bp\right) = e^{-p\xi} \bar{G}_2\left(\frac{1}{bp}\right),$$

gdzie

$$\bar{G}_1\left(\frac{1}{bp}\right) = \frac{M_0 b}{2} \left\{ \frac{1}{bp} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \exp \left[-\frac{\xi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1}{bp} \right)^{2n-1} \right] \right\},$$

$$\bar{G}_2\left(\frac{1}{bp}\right) = \frac{M_0 b}{2} \left\{ \frac{1}{bp} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \exp \left[-\frac{\xi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_2^{(n)}(0)}{n!} \left(\frac{1}{bp} \right)^{2n-1} \right] \right\},$$

oraz

$$g_i \left(\frac{1}{b^2 p^2} \right) = \left[a \mp b \left(1 - \frac{1}{b^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2.$$

Wykorzystując twierdzenia

- 1) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \overline{F} \left(\frac{\xi}{b}, bp \right) \right\} = \frac{1}{b} F \left(\frac{\xi}{b}, \frac{\tau}{b} \right),$
- 2) $\mathcal{L}^{-1} \{ e^{-pk} \overline{F}(p) \} = F(\tau - k) \eta(\tau - k),$

otrzymujemy

$$M_1(\xi, \tau) = \frac{1}{b} G_1 \left(\frac{\tau - \xi}{b} \right) \eta(\tau - \xi),$$

$$M_2(\xi, \tau) = \frac{1}{b} G_2 \left(\frac{\tau - \xi \frac{c_1}{c_2}}{b} \right) \eta \left(\tau - \xi \frac{c_1}{c_2} \right).$$

Pozostają do określenia transformaty odwrotne \overline{G}_1 i \overline{G}_2 . Zostały one uzyskane przez FLÜGGEGO i ZAJACA na drodze numerycznej. Dla małych czasów t i dla dużych ξ , a więc w otoczeniu frontów fal rozwiązanie można przedstawić w postaci szeregów szybkobieżnych:

$$M(\xi, \tau) = \frac{M_0}{2} \left\{ \eta(\tau_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi/b)^n}{n!} \sum_{m=3n}^{\infty} C_{m,n} \left(\frac{4\tau_1}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} J_m(\sqrt{\xi\tau_1}) \right.$$

$$\left. + \eta(\tau_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi/b)^n}{n!} \sum_{m=3n+2}^{\infty} D_{m,n} \left(\frac{4\tau_2 \frac{c_1}{c_2}}{\xi} \right)^{\frac{m}{2}} I_m \left(\sqrt{\xi \frac{c_2}{c_1} \tau_2} \right) \right\},$$

gdzie dla $\tau = \text{const } \tau_1$ jest miarą odległości od frontu fali zginającej, a τ_2 od frontu fali poprzecznej.

Inną metodę odwracania transformacji Laplace'a przedstawili B. A. BOLEY i C. G. CHAO [5]. Znaleźli oni rozwiązania dla czterech przypadków obciążeń belki półnieskończonej poprzez obliczenie całek po konturze. Wadą tego rozwiązania jest niedostatecznie szybka zbieżność otrzymanych całek oznaczonych zmiennej rzeczywistej przy obliczaniu numerycznym.

Oprócz transformacji Laplace'a szerokie zastosowanie w zagadnieniu belki Timoshenki znalazła całkowita transformacja Fouriera.

Transformację wykładniczą zastosował do belki nieskończonej R. P. N. JONES [30], oraz FLÜGGE i ZAJAC we wspomnianej powyżej pracy. JONES jako pierwszy wprowadził do omawianego zagadnienia asymptotyczną metodę poszukiwania transformat odwrotnych, nazywaną «metodą okresu stacjonarnego», lub «metodą Kelvina». Wykorzystali ją również FLÜGGE i ZAJAC. Poniżej przytaczamy schemat rozwiązania zagadnienia tym sposobem, oparty na pracy Jonesa.

Rozpatrzmy belkę nieskończoną, obciążoną impulsową siłą skupioną $P\delta(\xi)\eta(\tau)$. Skorzystamy z równań (4.1), na których wykonamy wykładniczą transformację Fouriera. Jeśli przejdziemy do współrzędnych bezwymiarowych za pomocą związków (5.4) to przetransformowane równania przyjmą postać:

$$(5.6) \quad \bar{w}_s = \frac{Pr^3}{EJ_e p^4} [1 + A_1(p) \cos(\omega_1 \tau) + A_2(p) \cos(\omega_2 \tau)],$$

$$(5.7) \quad \bar{w}_b = \frac{\alpha Pr^3}{EJ_e p^4} [1 + B_1(p) \cos(\omega_1 \tau) + B_2(p) \cos(\omega_2 \tau)],$$

gdzie

$$\bar{w}(\xi, p) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, \tau) e^{ip\tau} d\tau,$$

$$A_1(p) = -\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad B_2(p) = \frac{\alpha \omega_1^2 - p^2}{\alpha(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$B_1(p) = \frac{p^2 - \alpha \omega_2^2}{\alpha(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad A_2(p) = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \alpha = \frac{c_1^2}{c_2^2};$$

ω_1, ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) są dodatnimi pierwiastkami równania

$$(5.8) \quad (\alpha \omega^2 - p^2)(\omega^2 - p^2) - \omega^2 = 0.$$

Pozostaje do określenia transformacja odwrotna. Wykorzystamy do tego asymptotyczną metodę okresu stacjonarnego. Dla przykładu wyznaczmy momenty zginające stosując wzór (2.1):

$$(5.9) \quad M = \frac{Pr}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + A_1(p) \cos(\omega_1 \tau) + A_2(p) \cos(\omega_2 \tau)] e^{-ip\tau} \frac{dp}{p^2}.$$

Metoda Kelvina pozwala obliczać całki typu

$$(5.10) \quad \Phi = \int_a^b \varphi(\xi) \exp [if(\xi)] d\xi.$$

Zakłada się, że funkcja trygonometryczna jest funkcją szybko oscylującą w przedziale całkowania, gdy funkcja $\varphi(\xi)$ zmienia się stosunkowo nieznacznie. Prócz tego musi być spełniony warunek:

$$(5.11) \quad \frac{f'''(\xi_0)}{[|f''(\xi_0)|]^2} \ll 1,$$

gdzie ξ_0 jest punktem stacjonarnym.

Zgodnie z dowodem przeprowadzonym przez STOKESA największą część swej wartości całka przyjmuje wtedy w otoczeniu punktów stacjonarnych, tzn. takich, w których $df(\xi)/d\xi = 0$.

Gdy istnieje jeden punkt stacjonarny $\xi = \xi_0$ to:

$$(5.12) \quad \Phi \sim \varphi(\xi_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(\xi_0)|}} \exp i \left\{ f(\xi_0) \pm \frac{\pi}{4} \right\}.$$

W wykładniku bierzemy znak górny, jeśli $f''(\xi_0) > 0$ i dolny, jeśli $f''(\xi_0) < 0$.

Aby określić całkę (5.9) powyższą metodą, rozłożymy całkę na sumę dwu wyrazów o postaci

$$(5.13) \quad M_1 = \frac{Pr}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 + A_1(p) \cos(\omega_1 \tau)] e^{-ip\xi} \frac{dp}{p^2},$$

$$(5.14) \quad M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Pr}{2\pi} [A_2(p) \cos(\omega_2 \tau)] e^{-ip\xi} \frac{dp}{p^2},$$

$$(5.15) \quad M = M_1 + M_2.$$

Jeśli we wzorze (5.10) podstawimy $f(\xi) = \omega_1 \tau - p\xi$, to przybliżenie uzyskane wyżej omówioną metodą dla (5.13) i (5.14) będzie miało postać:

$$(5.16) \quad M_1 \sim \frac{Pr}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{A_1(p)}{p^2} \left\{ \left| \frac{d^2\omega_1}{dp^2} \right| \right\}^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\omega_1 \tau - p\xi \pm \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ dla } p = p_1,$$

$$(5.17) \quad M_2 \sim \frac{Pr}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{A_2(p)}{p^2} \left\{ \left| \frac{d^2\omega_2}{dp^2} \right| \right\}^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\omega_2 \tau - p\xi \pm \frac{\pi}{4} \right) \right] \text{ dla } p = p_2.$$

Związki (5.16)-(5.17) są dostatecznie ścisłe, o ile spełniony jest warunek (5.11), tzn.:

$$(5.18) \quad \left| \frac{d^3\omega_1}{dp^3} \right|_{p=p_1} \ll \sqrt{\tau} \left\{ \left| \frac{d^2\omega_1}{dp^2} \right| \right\}_{p=p_1}^{\frac{3}{2}}.$$

W powyższych wzorach p_1 i p_2 są pierwiastkami równań:

$$(5.19) \quad \frac{d\omega_1}{dp} = \frac{\xi}{\tau}, \quad \frac{d\omega_2}{dp} = \frac{\xi}{\tau}.$$

W pracy [30] JONES przeprowadził szczegółową analizę związków otrzymanych powyższą metodą i wykonał specjalne przybliżenia dla tych zbiorów wartości (ξ, τ) , gdzie ogólna metoda jest zbyt mało dokładna.

Wreszcie sinusowa i kosinusowa transformacja Fouriera została wykorzystana w pracy BOLEYA [4] do belki półnieskończonej obciążonej momentem Heaviside'a.

Omówione metody transformacyjne nie wyczerpują poszukiwanych dróg rozwiązania zagadnienia Timoshenki. B. A. BOLEY zastosował [3] do równania ugięcia metodę analizy energetycznej, tzn. sprowadził zagadnienie do poszukiwania wartości minimalnej pewnej całki.

Na zakończenie należy wspomnieć o pracach A. I. CIEJTLINA [8] i S. H. CRANDALLA [10] dotyczących belek na sprężystym podłożu. Przyjęli oni w równaniach dodatkowy wyraz (kw) określający odpór podłoża Winklera o podatności k na skutek występującego po obciążeniu ugięcia belki. CIEJTLIN otrzymał rozwiązanie za pomocą kosinusowej transformacji Fouriera dla siły $P\delta(t)$ w postaci całek oznaczonych i omówił możliwość uogólnienia rozwiązania na

obciążenia trwające w czasie za pomocą całki Duhamela. CRANDALL zajął się w pierwszym rzędzie określeniem okresów drgań własnych i wymuszonych siłą pulsującą $P e^{i\omega t}$ i ruchomą. Ta ostatnia przesuwa się po belce ze stałą szybkością v . Wyznaczono krytyczne prędkości ruchu siły. Praca zawiera obszerną analizę numeryczną.

Warto tu jeszcze wspomnieć o uogólnieniu metody Timoshenki na zagadnienie zginania dynamicznego płyt. Pierwsza próba należy do UFLJANDA [49]. Następnie zajęli się tym zagadnieniem R. D. MINDLIN [38] i H. ZORSKI [52, 53]. Ten ostatni omówił zagadnienie Cauchy'ego dla bifalowego równania Timoshenki. Jego rozwiązanie otrzymał za pomocą odpowiedniej tożsamości całkowej. Do rozwiązań osobliwych dla obciążeń skupionych zastosował całkową transformację Laplace'a. Zostały również omówione charakterystyki rozpatrywanego równania.

6. Zakończenie

Jak widać z powyższych rozważań, wprowadzone poprawki spowodowały w równaniu drgań belki istotną zmianę jakościową. Udało się uchwycić, potwierdzony doświadczalnie, falowy charakter zjawiska oraz z dostateczną dokładnością można było przedyskutować wyniki w otoczeniu frontów fal.

Jednak w rozważaniach belek obciążonych dynamicznie występuje poważna luka. Nie udało się mianowicie uzyskać dotąd przejrzystej metody rozwiązania dla belki skończonej. Prócz metody charakterystyk, ilustrującej interferencję fal odkształceń wskutek odbicia tych fal od granic ośrodków w belkach skończonych, żaden inny sposób nie doprowadził do efektywnych wyników. Dalsze rozważania teoretyczne powinny być zwrócone chyba przede wszystkim w tym kierunku.

Również zbyt skąpy materiał doświadczalny nie pozwala korygować ilościowych rozważań teoretycznych w zestawieniu ze stanem rzeczywistym. I to byłby drugi, podstawowy kierunek rozwoju tej dziedziny dynamiki ciała stałego.

Literatura cytowana w tekście

- [1] R. A. ANDERSON, *Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory* J. Appl. Mech., Dezember 1953 (vol. 20).
- [2] D. BANCROFT, *The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars*, Physical Review, 59 (1941).
- [3] B. A. BOLEY, *An approximate theory of lateral impact on beams*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [4] B. A. BOLEY, *On the use of sine transforms in Timoshenko — beam impact problems*, J. Appl. Mech., 24 (1957).
- [5] B. A. BOLEY, C. G. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko — beam equations*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [6] B. A. BOLEY, R. E. HENINGER, V. P. ZIMNOCH, *An energy theory of transverse impact on beams*, ONR Report, Project NR — 064 — 355, January 1952.

- [7] B. BUDIANSKY, R. W. LEONARD, *On traveling waves in beams*, Report 1173, NACA TN 2874, 1953.
- [8] А.И. ЦЕЙТЛИН „О влиянии сдвига и инерции вращения при колебаниях балки на упругом основании”, Изд. АН. СССР, ПИММ, 25 (1961).
- [9] J. L. B. COOPER, *The propagation of elastic waves in a rod*, Phil. Mag. ser 7, 31 (1947).
- [10] S. H. CRANDALL, *The Timoshenko beam on an elastic foundation* J. Engin. Mech. Div., October 1962.
- [11] S. H. CRANDALL, A. YILDIZ, *Random vibration of beams*, J. Appl. Mech. June 1962 (vol. 29).
- [12] DANA YOUNG, R. P. FELGAR, *Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam*, The University of Texas Publ. Nr 4913.
- [13] J. F. DAVIDSON, *Impact buckling of deep beams in pure bending* Quart. J. Mech. Appl. Math., 8 (1955).
- [14] T. DAVIDSON, J. H. MEIER, *Impact a prismatical bars*, Proc. of the SESA, 4 (1946).
- [15] M. A. DENGLE, M. GOLAND, *Transverse impact of long beams, including rotatory inertia and shear effects*, Proc. of the First US National Congress of Applied Mechanics 1951.
- [16] M. A. DENGLE, M. GOLAND, P. D. WIKERSHAM, *Propagation of elastic impact in beams in bending*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [17] C. L. DOLPH *On the Timoshenko beam vibration*, Quart. of Appl. Math. 12 (1954).
- [18] J. DORR, *Der unendliche, federnd gebettete Balken unter dem Einfluss einer gleichförmig bewegten Last*, Ing. — Archiv, 14 (1943).
- [19] М.Ш. ФЛЕКСЕР, *Об учете влияния инерции вращения и перерезывающих сил на поперечные колебания стержня конечной длины*, Инженерный сборник, 23 (1956).
- [20] W. FLÜGGE *Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben*, ZAMM, 22 (1942).
- [21] W. FLÜGGE, E. E. ZAJAC, *Bending impact waves in beams*, Ing.-Archiv, 1959.
- [22] G. HERRMANN, *Forced motions of Timoshenko beams*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
- [23] G. W. HOUSNER, W. K. TSO, *Dynamic Behavior of Supercritically Loaded Struts*, J. Engin. Mech. Div., October 1962.
- [24] C. HOWE, R. HOWE, L. RAUCH, *Application of the electric differential analyzer to the oscillation of beams, including shear and rotatory inertia*, Ext. Memo. UMM — 79, University of Michigan Research.
- [25] T. C. HUANG, *Application of variational methods to the vibration of plates including rotatory inertia and shear*, Proc. of the Seventh Midwestern Mechanics Conference, September 1961, North-Holland Publishing Company — Amsterdam.
- [26] T. C. HUANG *The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions*, J. Appl. Mech., 28 (1961).
- [27] T. C. HUANG, *Effect of rotatory inertia and shear on the vibration of beams treated by the approximate methods of Ritz and Galerkin*, Proc. of the 3d US National Congress of Applied Mechanics, 1958.
- [28] T. C. HUANG, N. C. WU, *Approximate analysis of flexural vibrations of beams*, Proc. of the Seventh Midwestern Mechanics Conference, September 1961, North-Holland Publishing Company — Amsterdam.
- [29] М.В. ХВИНГИЯ, *Влияние сдвигов и инерции вращения на частоту изгибных колебаний упругих стержней*, Инженерный журнал, 4, 3 (1963).
- [30] R. P. JONES, *Transient flexural stresses in an infinite beam*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1955.
- [31] H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Oxford 1953.
- [32] E. T. KRUSZEWSKI, *Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam*, NACA TN 1909; 1949.
- [33] Е.Л. КУДРЯВЦЕВ, *Об учете сдвигов и инерции вращения на изгибные колебания упругих балок*, Мех. и Машин., 5, 1960.
- [34] H. LAMB; Proc. Roy. Soc. ser. A93 (1917).
- [35] H. L. MASON, *Impact on beams*, J. Appl. Mech., 58 (1936)

- [36] J. MIKLOWITZ, *Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of bending*, J. Appl. Mech., Dezember 1953.
- [37] J. MIKLOWITZ, *On the use of approximate theories of an elastic rod in problems of longitudinal impact*, J. Appl. Mech., 25 (1958).
- [38] R. D. MINDLIN, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates*, J. Appl. Mech., 18 (1951).
- [39] R. D. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, *Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams*, Proc. of the 2nd US National Congress of Applied Mechanics 1954.
- [40] V. PĚTROVSKY, *Vliv smiku a setrovačnych momentu na vlastní kmitočet prismatických nosníku*, Stroivenství, nr 6, 1960.
- [41] H. J. PLASS, C. C. STEYER, *Studies on Longitudinal and Bending Waves in long Elastic Rods*, The University of Texas, Report CM-860, 1956.
- [42] С.Д. ПИНОМАРЕВ и другие, *Расчеты на прочность в машиностроении*, Машгиз, т. 3, Москва 1959.
- [43] J. PRESCOTT, *Elastic waves and vibrations of thin rods*, Phil. Mag., ser. 7, 33 (1942).
- [44] A. ROBINSON, *Shock transmission in beams*, Aeronautical Research Council Technical Report N. 2265, Ministry of Supply, London 1950.
- [45] E. A. RIPPERGER, H. N. ABRAMSON, *A Study of the propagation of flexural waves in elastic beams*, J. Appl. Mech., 24 (1957).
- [46] H. SCHIRMER, *Über Biegewellen in Stäben*, Ing.-Archiv, 20 (1952).
- [47] S. P. TIMOSHENKO, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic Bars*, in Collected Papers, 1922.
- [48] R. W. TRAILL-NASH, A. R. COLLAR, *The effect of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams*, Quart. J. Mech. Appl., Math., 2, 6 (1953).
- [49] Я.С. УФЛЯНД, *Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин*, Прикл. Мат. Мех., 12 (1948).
- [50] I. VIGNES, *Transverse waves in beams*, Proc. of the Society for Experimental Stress Analysis, 8 (1951).
- [51] DEENE J. WEIDMAN, *The effects of shear deformations and cross-sectional distortion on the natural frequencies of wide — flanged beams*, Proc. of the Seventh. Midwestern Mechanics Conference, September 1961; North-Holland Publishing Company, — Amsterdam.
- [52] H. ZORSKI, *Zagadnienie Cauchy'ego i drgania nieograniczonej płyty cienkiej*, Cz. I, Biuletyn WAT, 1, 72, 1957.
- [53] H. ZORSKI, *Zagadnienie Cauchy'ego i drgania nieograniczonej płyty cienkiej*, cz. II, Biuletyn WAT, 4, 75, 1957.

Р е з ю м е

ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА БАЛОК. БАЛКА ТИМОШЕНКИ

Работа является обзором решений уравнений Тимошенко, описывающих прогиб балки при динамических нагрузках. В п. 3, основываясь на работе Уфлянда [49] доказывается волновой характер явления, если в уравнение прогиба Бернулли-Эйлера ввести поправку на инерцию вращения и силы сдвига.

В п. 4 представлен обзор работ, касающихся собственными колебаниями в случае когда исходной точкой является уравнение Тимошенко (2.5).

В п. 5 даются схемы решений вопроса вынужденных колебаний с помощью интегральных преобразований. В качестве основных приняты здесь работы Флогге и Заяца [21] и Джонса [30].

В заключение в п. 6 указываются дальнейшие направления развития этого отдела соприкосновения материалов.

S u m m a r y

DYNAMICAL LOADINGS OF BEAMS—TIMOSHENKO BEAM

The paper gives a survey of the solutions of the Timoshenko equations describing dynamic beam deflections. In Section 3 the wave character of the phenomenon has been proved on the basis of Ufland's article [49] if corrections of rotary inertia and shear forces are introduced into Bernoulli-Euler deflection equation. Section 4 gives a survey of the papers dealing with self vibrations in the case when Timoshenko's Eq (2.5) is a point of departure.

Finally, Section 5 contains the solutions of the forced vibration problem by means of the integral transforms. The papers by Flügge and Zajac [21] and Jones [30] have been assumed as fundamental. The trends of the development of this branch of strength of materials are discussed in Section 6.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1964 r.
