

POWIERZCHNIOWE KONSTRUKCJE PRĘTOWE

WITOLD GUTKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie zastosowania rachunku różnicowego do badań analitycznych nad regularnymi, powierzchniowymi układami prętowymi. W rozważaniach ograniczono się jedynie do analizy statycznej, jakkolwiek większość zależności podanych w niniejszej pracy można zastosować do zagadnień dynamicznych.

Podstawą analizy jest geometria różnicowa powierzchniowej siatki punktów, której podstawy zostały podane przez autora w pracy [25].

Powierzchniowe konstrukcje prętowe w postaci rusztów, przekryć walcowych lub kulistych zaczęto stosować w połowie dziewiętnastego wieku, jednakże ze względu na poważne trudności w technice obliczeniowej oraz w wykonaniu konstrukcji metalowych z elementów powtarzalnych zaczęto je stosować na większą skalę dopiero w latach czterdziestych naszego stulecia.

Teoretyczne wyznaczanie sił i przemieszczeń w tego typu konstrukcjach (są to konstrukcje kratowe, ramowe i mieszane) nie przedstawia merytorycznych trudności. Literatura na ten temat jest bardzo obszerna; istnieje wiele monografii dotyczących tego zagadnienia, między innymi i w języku polskim [6, 9, 27, 32, 45]. O wiele uboższa jest literatura traktująca o ramach w zakresie plastycznym, ale i temu zagadnieniu poświęcone są niektóre monografie, jak np. książka P. G. HODGE'A [26].

Omawiane konstrukcje charakteryzuje duża liczba prętów i węzłów, sięgająca setek, a nawet tysięcy w jednym układzie. Fakt ten powoduje, że podstawowym problemem staje się technika obliczeniowa, natomiast na dalszy plan odsuwa się analizę teoretyczną zagadnienia, polegającą na badaniu zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a parametrami kształtu. Niekiedy nawet rezygnuje się z opracowania metody obliczeniowej, a przeprowadza się jedynie badania doświadczalne, jak miało to miejsce z dobrze znanymi na terenie USA konstrukcjami typu «Unistrut» [18]. Wspomniane trudności sprawiły, że badania nad konstrukcjami prętowymi szły w kierunku pewnych założeń upraszczających.

Pierwsze teoretyczne rozważania nad powierzchniowymi konstrukcjami prętowymi należy według S. P. TIMOSHENKI [40] przypisać A. FÖPPLOWI [17], który w r. 1892 podał statyczną analizę walcowego pokrycia prętowego z wykrzywianiami (później zwanego w literaturze przekryciem typu Föppla). Rozważania swoje oparł on na założeniach, że przekrycie jest kratowe, a więc że pręty połączone są między sobą przegubami kulistymi. Przy takim założeniu rozwiązanie sprowadzało

się do rozkładu konstrukcji na szereg płaskich kratownic obciążonych w swoich płaszczyznach. Schemat statyczny przyjęty przez Föppla daleko jednak odbiega od rzeczywistości, gdyż sztywne węzły układu mają znaczny wpływ na wartości sił w prętach. Założenia Föppla uściślili dopiero w latach pięćdziesiątych I. G. POPOW [34] i W. A. JERJAGINA [16] przyjmując, że węzły pomiędzy prętami leżącymi na łukach są sztywne. Ich uproszczenia obliczeniowe polegały na grupowaniu niewiadomych, a więc redukowaniu liczby równań i niewiadomych.

Poza wyżej wymienionymi autorami dość liczna grupa osób zajmowała się zagadnieniami kopuł ramowych, rusztów, regularnych ram itp. Z grupy tej należy wymienić przede wszystkim prace [7, 11, 36, 37, 38, 41, 43]. Obejmowały one zagadnienia statyki, stateczności i dynamiki kopuł ramowych i rusztów przy takich znacznie upraszczających analizie założeniach, jak pominięcie sztywności na rozciąganie, sztywności skręcania itp. Nawet przy takich założeniach badania sprowadzały się głównie do szukania uproszczeń w rozwiązywaniu układów równań. Treść tych prac wykazuje dobitnie, jak komplikuje się zagadnienie wobec braku odpowiedniego zapisu geometrii i konstrukcji.

Z chwilą szerszego zastosowania elektronowych maszyn liczących rozpowszechniły się metody oparte na rachunku macierzowym, który jest najkorzystniejszy przy programowaniu. Metody te doczekały się również wnikliwych opracowań, między innymi przez J. H. ARGYRYSA [1], S. O. ASPLUNDA [2] czy W. D. SZAJKOWICZA [39]. Metody te są dogodne przy stosowaniu maszyn liczących, niemniej jednak mają poważną wadę polegającą na tym, że uniemożliwiają w znacznym stopniu analizę teoretyczną konstrukcji.

Dalsza metoda polega na zastępowaniu regularnej konstrukcji prętowej odpowiednią konstrukcją ciągłą (płyty, powłoki). Sposób taki umożliwia korzystanie z gotowych, często zamkniętych wzorów. Metoda ta ma jednak tę wadę, że trudno jest ustalić sztywność zastępczej konstrukcji, co powoduje, że wyniki stosowania jej są często problematyczne. Przykładem zastosowania tej metody może być praca F. LADERERA [28].

Na osobną uwagę zasługuje praca Cz. WOŹNIAKA [47], który zaproponował ciekawą teorię ośrodków włóknistych. Jakkolwiek teoria ta dotyczy ośrodka ciągłego, a nie dyskretnego, to w przypadku niedużych wymiarów «oczek» siatki (w porównaniu z wymiarami całej konstrukcji) może dać zadowalające wyniki.

W niniejszej pracy zastosowano metodę badania powierzchniowych konstrukcji prętowych w oparciu o rachunek różnicowy.

Pierwsze ujęcie zagadnienia statyki konstrukcji w zapisie różnicowym należy przypisać K. CLAPEYRONOWI [10], który rozpatrując belkę na wielu równo oddalonych podporach wyprowadził, znane równanie trzech momentów. Szybki postęp techniki sprawił, że zastosowanie rachunku różnic poważnie rozwinęło się na początku XX wieku, w szczególności w pracach uczonych niemieckich. Poniżej ograniczymy się jedynie do wymienienia ważniejszych prac, które wniosły nowe elementy do tej dziedziny.

Jednym z pierwszych, który zastosował rachunek różnic do złożonych konstrukcji prętowych, był L. MANN [30]. Podał on rozwiązanie płaskiej ramy typu Vierendeel

oraz zbadał powtarzalny element konstrukcji i ze względu na jego skończone rozmiary podał wszystkie równania w zapisie różnicowym. Praca zawiera rozwiązania tych równań w zakresie statyki i stateczności dla szeregu rodzajów obciążeń.

R. MISES i J. RATZERSDORFER [31] w r. 1925 podali teorię stateczności płaskiego słupa kratowego złożonego z jednakowych trójkątów. Rozwiązania zawarte w tej pracy oparte są na rachunku różnicowym, a otrzymane wyniki uzależnione są od liczby segmentów w słupie.

Na szczególną uwagę zasługuje książka F. BLEICHA i E. MELANA [5] wydana w r. 1926 i składająca się z dwóch zasadniczych części. Pierwsza z nich zawiera teorię różnic, sum i równań różnicowych zwyczajnych, liniowych o stałych i zmiennych współczynnikach. W ramach teorii równań różnicowych poruszone są takie zagadnienia, jak transformacje Laplace'a oraz obliczanie równań różnicowych za pomocą funkcji właściwych. Ostatnie rozdziały pierwszej części zawierają szereg uwag dotyczących równań różnicowych cząstkowych. Druga część książki obejmuje szereg ciekawych przykładów praktycznego zastosowania teorii wyłożonej w części pierwszej. W aspekcie niniejszej pracy na uwagę zasługują zwłaszcza zagadnienia płaskich i walcowych rusztów oraz płaskich tarcz ramowych, które autorzy rozwiązują za pomocą równań różnicowych. Zagadnienie te są stosunkowo proste, ponieważ rozpatrzono je przy pominięciu podatności osiowej i sztywności skręcania. Jedynym brakiem omawianej książki jest zbyt powierzchowne potraktowanie problemu warunków brzegowych. Niemniej jednak stanowi ona do dziś niezwykle cenną pozycję. F. BLEICH opublikował ponadto szereg prac przyczyniając się do dalszego rozwoju zastosowań rachunku różnicowego w statyce budowli. Należy wspomnieć tu choćby jego pracę na temat stateczności belki podpartej na podporach sprężystych [4].

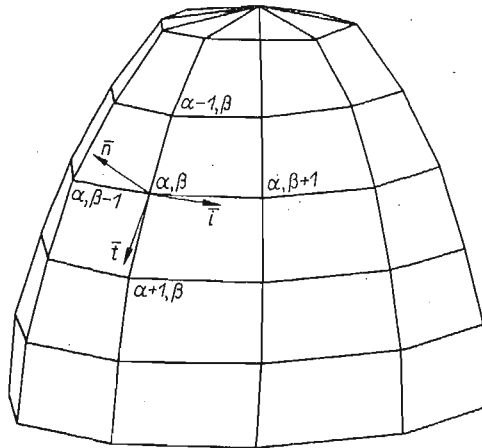
W ostatnich latach niezwykle szybko rozwinęło się budownictwo metalowe z elementów powtarzalnych. Szereg przykładów takich konstrukcji podaje w swych pracach Z. MAKOWSKI [29]. Duże zapotrzebowanie na tego rodzaju konstrukcje spowodowało, że zaczęto ponownie zajmować się szerzej stosowaniem rachunku różnicowego. Przede wszystkim należy wymienić tu książkę W. A. BOWINA [8] i prace D. L. DEAN'A [12, 13, 14, 15]. W. A. BOWIN w swojej książce pierwszy wprowadził rachunek różnicowy do zagadnień wariacyjnych w mechanice budowli. Podaje on przy tym szereg oryginalnych przykładów z zakresu dynamiki i stateczności konstrukcji.

D. L. DEAN w swej wcześniejszej pracy [12] podał rozwiązanie stożkowej siatki prętowej obciążonej osiowo-symetrycznie, jak i szereg innych regularnych konstrukcji powierzchniowych. W późniejszej pracy podał on interesujące rozwiązania różnego rodzaju siatek ciągnowych mających zastosowanie w konstrukcjach wiszących. We wszystkich swych pracach autor posługuje się rachunkiem różnicowym wprowadzając człony obrazujące obciążenia w postaci delty Kroneckera.

W latach 1959–60 I. BABUŠKA i E. VITAŠEK [3, 42] zaproponowali — w oparciu o teorię dystrybucji — transformację Fouriera w zastosowaniu do równań różnicowych. Na zakończenie swych prac podali oni proste przykłady rusztów i siatek prętowych.

W Polsce stosowanie rachunku różnicowego w mechanice budowli ma swój początek w pracy W. WIERZBICKIEGO [45]. Autor rozważył w niej ugięcie szeregu prętów sztywno ze sobą złączonych w węzłach i leżących w jednej płaszczyźnie. W. NOWACKI podał w swej książce rozwiązania szeregu jedno- i dwuwymiarowych zagadnień statyki budowli takich jak belka na sprężystych podporach czy ruszty regularne. Osobną grupę zagadnień stanowią publikacje autora niniejszej pracy. Obejmują one takie zagadnienia, jak stateczność przyrządkowanych powłok ramowokrataw przy różnych konfiguracjach prętów [19, 21], stateczność słupów kratowych [20], statykę przestrzennych rusztów kratowych [22]. Ostatnie prace obejmują już elementy geometrii różnicowej wykorzystanej w dalszych rozdziałach niniejszego opracowania [23, 24, 25].

Jak już wspomniano, powyższy przegląd nie jest pełnym odzwierciedleniem literatury dotyczącej omawianego tematu. W szczególności nie omówiliśmy tu prac typu konstrukcyjnego. Nie omówiliśmy również szeregu prac nie wnoszących w zasadzie nic nowego do zastosowań rachunku różnicowego w mechanice budowli.



Rys. 1

Wymienione prace, w których zastosowano rachunek różnic, wskazują wyraźnie na korzyści wynikające z jego zastosowania. Korzyści te przede wszystkim polegają na zwartości zapisu, co daje w konsekwencji:

- możliwości uproszczonej, a więc i tańszych obliczeń numerycznych zarówno «ręcznych» jak i maszynowych;
- możliwości analizy jakościowej i ilościowej poszczególnych układów.

Dlatego też poniżej podjęto próbę ujęcia regularnych, prętowych konstrukcji powierzchniowych wspólnym zapisem z możliwością przechodzenia w granicy do przypadków szczególnych, takich jak powłoki walcowe, ruszty, tarcze itp.

Ogólnie rzecz biorąc liczba rodzajów siatek prętowych jest nieograniczona, a my będziemy rozpatrywać jedną z nich podaną na rys. 1, niemniej jednak metoda poniższa mogłaby być z powodzeniem zastosowana i do innych siatek prętowych, na przykład trójkątnych czy sześciokątnych.

2. Założenia i oznaczenia

Przez «powierzchniową konstrukcję prętową» będziemy rozumieli ramę lub kratę o prętach prostych, której węzły leżą na dowolnej powierzchni. Układy o co najmniej jednej krzywiznie różnej od zera nazwano często powłokami przez analogię do powłok w rozumieniu klasycznym. Dlatego też przyjęto z teorii powłok [33, 46] takie pojęcia, jak wycinek powłoki, grubość powłoki, powierzchnia środkowa itp. W pracy niniejszej będziemy rozpatrywać jedynie konstrukcje przy następujących założeniach:

- a) przemieszczenia węzłów są małe w stosunku do wymiarów poprzecznych prętów, a odkształcenia tych ostatnich mieszczą się w ramach prawa Hooke'a,
- b) obciążenia zewnętrzne nie zmieniają się ani co do wartości, ani co do kierunku wskutek odkształceń konstrukcji,
- c) pręty są proste, pryzmatyczne i mają skończone sztywności rozciągania, zginania i skręcania oraz nieskończoną sztywność ścinania (hipoteza płaskich przekrojów),
- d) pręty spotykające się w jednym węźle oddziałują na siebie dowolnym wektorem siły i dowolnym wektorem momentu.
- e) pręty w siatce są tak umieszczone, że ich osie geometryczne przecinają się w geometrycznych węzłach siatki. Kierunki głównych osi bezwładności przekrojów prętów pokrywają się z kierunkami stycznej i normalnej do siatki w punkcie będącym geometrycznym środkiem pręta.

Zapis rachunku różnicowego przyjęliśmy według różnic centralnych stosując oznaczenia

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right), \\ \nabla u(x) &= u\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) + u\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

oraz

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= v(x), & Sv(x) &= u(x) + \sigma, \\ \nabla v(x) &= u(x), & \bar{S}u(x) &= v(x) + \tau, \\ \Delta v(x) &= \nabla u(x), & Su(x) &= v(x) + \sigma, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie

$$\sigma(x + \omega) = \sigma(x), \quad \tau(x + \omega) = -\tau(x). \tag{2.3}$$

W całej pracy wprowadziliśmy następujące podstawowe oznaczenia:

- n, m — liczby naturalne,
- α, β — liczby całkowite, współrzędne zbioru,

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha w &= w_{\alpha + \frac{1}{2}} - w_{\alpha - \frac{1}{2}}, & \Delta_{\alpha \pm \frac{1}{2}} w &= \pm w_{\alpha \pm 1} \mp w_\alpha, \\ \nabla_\alpha w &= w_{\alpha + \frac{1}{2}} + w_{\alpha - \frac{1}{2}}, & \nabla_{\alpha \pm \frac{1}{2}} w &= w_{\alpha \pm 1} + w_\alpha, \\ \Delta_\alpha^2 w &= \Delta_\alpha(\Delta_\alpha w), & \nabla_\alpha^2 w &= \nabla_\alpha(\nabla_\alpha w), \\ \Delta_{2\alpha} w &= \nabla_\alpha(\Delta_\alpha w) = \Delta_\alpha(\nabla_\alpha w) = w_{\alpha+1} - w_{\alpha-1}, \\ D_\alpha w &= w_{\alpha+1} + 4w_\alpha + w_{\alpha-1}; & H_\alpha w &= w_{\alpha+1} - 4w_\alpha + w_{\alpha-1} \end{aligned}$$

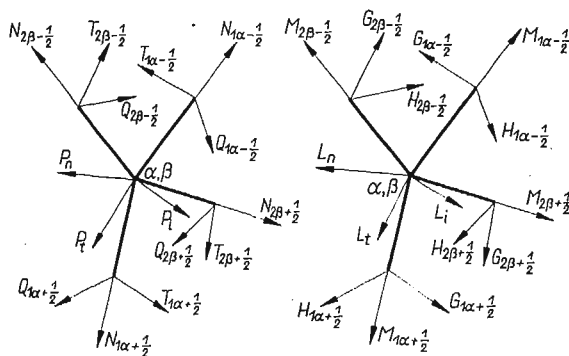
| | |
|--|---|
| h_1, h_2 | odległości pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami siatki przy ustalonym jednym argumente, |
| $\mathbf{t}, \mathbf{i}, \mathbf{n}$, | wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe, |
| R_1, R_2 | promienie krzywizny, |
| A_1, A_2, B_1, B_2 | współczynniki form kwadratowych, |
| χ_1, χ_2 | kąty środkowe w kołach krzywiznowych, |
| u, v, w | składowe wektora przemieszczenia, |
| $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega_1, \omega_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ | odkształcenia liniowe siatki, |
| φ, ψ, γ | składowe kąta obrotu węzła siatki odkształconej, |
| p, q, s | odkształcenia kątowe węzłów, |
| N_1, N_2 | siły osiowe, |
| T_1, T_2, Q_1, Q_2 | siły poprzeczne, |
| M_1, M_2 | momenty skręcające, |
| H_1, H_2, G_1, G_2 | momenty zginające, |
| $E_1 I_{1n}; E_2 I_{2t}$ | sztwywności zginania, |
| GI_0 | sztwywności skręcania, |
| $E, F_1; E_2 F_2$ | sztwywności rozciągania, |

$$\kappa = \frac{EI}{h^4}; \quad \mu = \frac{EF}{h^2}; \quad \nu = \frac{GI_0}{h^4}.$$

3. Równania równowagi

Wytnijmy powtarzalny element α, β powłoki dokonując cięć w płaszczyznach normalnych do powłoki w punktach $\alpha + \frac{1}{2}, \beta; \alpha - \frac{1}{2}, \beta; \alpha, \beta + \frac{1}{2}; \alpha, \beta - \frac{1}{2}$ (rys. 2).

Przyjmijmy, że w dowolnym przekroju działa nieznaną wektor siły wewnętrznej \mathbf{N} jak i nieznaną wektor momentu wewnętrznego \mathbf{M} (rys. 2, dla jasności podano



Rys. 2

na rysunku osobno siły i momenty). Oznaczmy następujące składowe wektora siły rozłożonego na kierunki $\mathbf{t}, \mathbf{i}, \mathbf{n}$:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= N_1 \cdot \mathbf{t} + T_1 \cdot \mathbf{i} + Q_1 \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{N}_2 &= T_2 \cdot \mathbf{t} + N_2 \cdot \mathbf{i} + Q_2 \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Indeksy 1 i 2 odnoszą się odpowiednio do zmiennych α i β . Przyjmijmy ponadto te składowe sił i momentów za dodatnie, które mają zwroty zgodne z wektorami

jednostkowymi \mathbf{t} , \mathbf{i} , \mathbf{n} przy kierunku zewnętrznej normalnej do przekroju ze wzrastającym α (lub odpowiednio β). W przypadku gdy wspomniana normalna ma kierunek malejących wartości α (względnie β), za dodatnie przyjmiemy te składowe, które mają zwroty przeciwne do zwrotów jednostkowych. Tak więc w dowolnym przekroju mamy trzy nie znane składowe sił i trzy nie znane składowe momentów, przy czym wszystkie sześć wielkości są odpowiednio funkcjami α i β . W dalszym ciągu przyjmujemy założenie, że wyżej wymienione siły i momenty są statycznie równoważne działającym w omawianych przekrojach naprężeniom, zgodnym z hipotezą płaskich przekrojów w teorii prętów cienkich.

Rozpatrzmy obecnie warunki równowagi wspomnianego elementu, obciążonego siłami wewnętrznymi i zewnętrznymi. Siły zewnętrzne w najogólniejszym przypadku można sprowadzić do trzech skupionych sił i trzech skupionych momentów działających w węźle elementu, a mających odpowiednio kierunki trzech wektorów jednostkowych \mathbf{t} , \mathbf{i} , \mathbf{n} . Oznaczmy je kolejno P_t , P_i , P_n , L_t , L_i , L_n . W przekroju o współrzędnych $\alpha+1/2$, β przyłożmy wektor siły

$$(3.2) \quad \mathbf{N}_{1\alpha+\frac{1}{2}} = N_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha+\frac{1}{2}} + T_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha+\frac{1}{2}} + Q_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha+\frac{1}{2}}$$

i momentu

$$(3.3) \quad \mathbf{M}_{1\alpha+\frac{1}{2}} = M_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha+\frac{1}{2}} + G_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha+\frac{1}{2}} + H_{1\alpha+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

W przekrojach o współrzędnych $\alpha-1/2$, β przyłożmy wektor siły

$$(3.4) \quad -\mathbf{N}_{1\alpha-\frac{1}{2}} = -(N_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha-\frac{1}{2}} + T_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha-\frac{1}{2}} + Q_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha-\frac{1}{2}})$$

i momentu

$$(3.5) \quad -\mathbf{M}_{1\alpha-\frac{1}{2}} = -(M_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\alpha-\frac{1}{2}} + G_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\alpha-\frac{1}{2}} + H_{1\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\alpha-\frac{1}{2}}).$$

Odpowiednio przy zmiennym β będziemy mieli w punkcie α , $\beta+1/2$ siłę

$$(3.6) \quad \mathbf{N}_{2\beta+\frac{1}{2}} = T_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta+\frac{1}{2}} + N_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta+\frac{1}{2}} + Q_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta+\frac{1}{2}}$$

i moment

$$(3.7) \quad \mathbf{M}_{2\beta+\frac{1}{2}} = G_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta+\frac{1}{2}} + M_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta+\frac{1}{2}} + H_{2\beta+\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta+\frac{1}{2}},$$

a w punkcie o współrzędnych α , $\beta-1/2$, siłę

$$(3.8) \quad -\mathbf{N}_{2\beta-\frac{1}{2}} = -(T_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta-\frac{1}{2}} + N_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta-\frac{1}{2}} + Q_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta-\frac{1}{2}})$$

i moment

$$(3.9) \quad -\mathbf{M}_{2\beta-\frac{1}{2}} = -(G_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_{\beta-\frac{1}{2}} + M_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{i}_{\beta-\frac{1}{2}} + Q_{2\beta-\frac{1}{2}} \mathbf{n}_{\beta-\frac{1}{2}}).$$

Ponadto w węźle elementu działają siły zewnętrzne o składowych

$$(3.10) \quad \mathbf{P} = P_t \cdot \mathbf{t} + P_i \cdot \mathbf{i} + P_n \cdot \mathbf{n}.$$

i momenty zewnętrzne

$$(3.11) \quad \mathbf{L} = L_t \cdot \mathbf{t} + L_i \cdot \mathbf{i} + L_n \cdot \mathbf{n}.$$

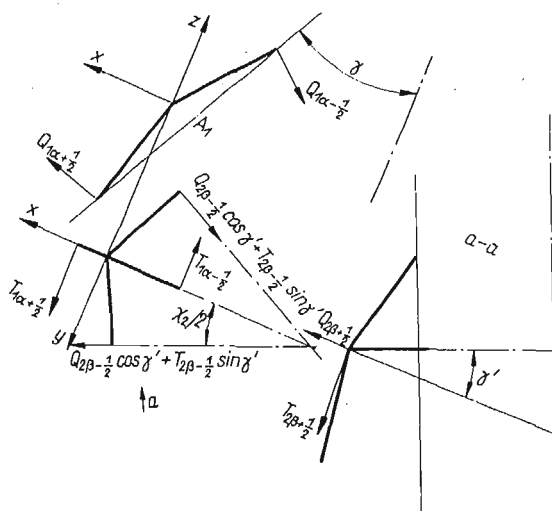
Pamiętając, że na przeciwległych przekrojach siły i momenty wewnętrzne mają zwroty dodatnie przeciwne, napiszemy wektorowe równanie równowagi sił rozważanego elementu

$$(3.12) \quad \Delta_\alpha \mathbf{N}_1 + \Delta_\beta \mathbf{N}_2 + P_t \cdot \mathbf{t} + P_i \cdot \mathbf{i} + P_n \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Podstawiając za N zależność (3.1) i korzystając ze związków dotyczących działań na wektorach jednostkowych podanych w [25] otrzymamy trzy równania równowagi wynikające z przyrównania do zera trzech składowych wypadkowego wektora sił działającego na rozpatrywany element

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha N_1 + \frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha Q_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{2A_1} \nabla_\beta N_2 + \frac{\nabla_\beta A_1}{2A_1} \Delta_\beta T_2 + P_i = 0, \\ & \Delta_\alpha T_1 + \frac{A_2}{h_2} \Delta_\beta N_2 + 2 \frac{B_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta Q_2 + \frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \cdot \nabla_\beta T_2 + P_i = 0, \\ & -\frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha N_1 + \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha Q_1 - \frac{B_2}{h_2} \nabla_\beta N_2 - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 + \frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \cdot \Delta_\beta Q_2 + P_n = 0. \end{aligned}$$

Obecnie zbadajmy warunki równowagi rozpatrywanego elementu pod działaniem wypadkowego wektora momentu. Rozpocznijmy od wyznaczenia sumy momentów wewnętrznych. Sumę tę możemy uzyskać zastępując w równaniach równowagi sił wielkości tych ostatnich — wielkościami odpowiednio skierowanych momentów



Rys. 3

wewnętrznych. Jednakże w tym przypadku sumy rzutów na odpowiednie osie nie będą równe zero, a to dlatego, że na wypadkowy wektor momentu składają się również momenty odpowiednich sił wewnętrznych. Obliczmy więc sumy momentów sił poprzecznych względem trzech osi: równoległych do stycznych i normalnej i przechodzących przez węzeł elementu.

Wprowadźmy w tym celu pomocniczy, prostokątny układ współrzędnych x, y, z , z początkiem w węźle elementu i osią y równoległą do wektora t a osią z — równoległą do osi symetrii powłoki (rys. 3). Zrzućmy teraz siły $Q_{2\beta \pm \frac{1}{2}}$ i $T_{2\beta \pm \frac{1}{2}}$

na poszczególne osie pomocniczego układu i wyznaczmy współrzędne ich punktów zaczepienia. Wielkości te można odczytać bezpośrednio z rys. 3

$$\begin{aligned}
 r_{x\beta\pm\frac{1}{2}} &= -\frac{h_2}{2} \sin^2 \frac{\chi_2}{2}, & r_{y\beta\pm\frac{1}{2}} &= \pm \frac{h_2}{2} \cos \frac{\chi_2}{2}, & r_z &= 0, \\
 P_{x\beta\pm\frac{1}{2}} &= \pm Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \gamma' \cos \frac{\chi_2}{2} \pm T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \gamma' \cos \frac{\chi_2}{2}, \\
 P_{y\beta\pm\frac{1}{2}} &= Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \gamma' \sin \frac{\chi_2}{2} + T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \gamma' \sin \frac{\chi_2}{2}, \\
 P_{z\beta\pm\frac{1}{2}} &= \mp T_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \cos \gamma' \pm Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}} \sin \gamma'.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Z tego samego rysunku można również odczytać wartości ramion sił Q względem osi t i siły T_1 względem osi n . Są one równe odpowiednio

$$h_1/2 \text{ oraz } A_1/2.
 \tag{3.15}$$

Momenty sił $Q_{2\beta\pm\frac{1}{2}}$ i $T_{2\beta\pm\frac{1}{2}}$ względem wspomnianych osi obliczymy jako rzut iloczynu wektorowego $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$ na te osie, a więc jako iloczyn skalarowy

$$M_i = i_x(r_y P_z - r_z P_y) + i_y(r_z P_x - r_x P_z) + i_z(r_x P_y - r_y P_x),
 \tag{3.16}$$

gdzie i_x, i_y, i_z , są kosinusami kierunkowymi zestawionymi poniżej w tabeli.

$$\tag{3.17}$$

| | | | |
|-------|----------------|-----|---------------|
| | t | i | n |
| i_x | $\sin \gamma$ | 0 | $\cos \gamma$ |
| i_y | 0 | 1 | 0 |
| i_z | $-\cos \gamma$ | 0 | $\sin \gamma$ |

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymamy ostatecznie trzy równania równowagi momentów działających na element powłoki

$$\begin{aligned}
 \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha M_1 + \frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha H_1 - \frac{\Delta_\alpha h_2}{A_1} \nabla_\beta M_2 + \Delta_\alpha T_1 \frac{h_1^2}{4R_1^2} + \\
 \frac{\nabla_\beta A_1}{2A_1} \Delta_\beta G_2 + \nabla_\beta Q_2 \frac{h_2 \nabla_\beta A_1}{4A_1} + L_i = 0, \\
 \Delta_\alpha G_1 + \frac{A_2}{h_2} \Delta_\beta M_2 + 2 \frac{B_2}{h_2} \frac{A_1}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta H_2 + \frac{\Delta_\alpha A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta G_2 + \\
 - \frac{h_1}{2} \nabla_\alpha Q_2 - \frac{h_2^2 A_1}{2R_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta T_2 + \frac{\Delta_\alpha h_2 \cdot A_2}{2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta Q_2 + L_i = 0, \\
 \frac{B_1}{h_1} \nabla_\alpha M_1 + \frac{A_1}{h_1} \Delta_\alpha H_1 - \frac{B_2}{h_2} \nabla_\beta M_2 - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_\beta G_2 + \frac{A_1}{2} \nabla_\alpha T_1 + \\
 \frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_\beta H_2 - \frac{A_1 A_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_\beta T_2 - \frac{h_2^2 \Delta_\alpha h_2}{4R_2 \nabla_\beta A_1} + L_n = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Równania (3.13) i (3.18) stanowią układ równań równowagi rozpatrywanego elementu. Układ ten zawiera sześć niewiadomych sił i sześć niewiadomych momentów wewnętrznych, a więc o dwie niewiadome więcej niż ma analogiczny układ równań nieskończenie małego wycinka cienkiej powłoki i tyle samo co element ośrodka włóknistego [47]. Różnica polega na tym, że w klasycznej teorii powłok nie występują momenty o wektorach mających kierunek normalnej. Poza tym powyższe równania przy przejściu do granicy z wielkościami h_1 i h_2 przechodzą w równanie równowagi wspomnianej, klasycznej teorii powłok, oczywiście po odrzuceniu momentów działających w kierunku normalnej. Zbadajmy przykładowo przejście do granicy równania równowagi rzutów sił na oś t , pamiętając, że siły w równaniach klasycznej teorii powłok odniesione są do jednostki długości.

Przyjmując oznaczenia W. W. Nowożyłowa [33] mamy

$$\begin{aligned} N_1 &= T_1 A_2 da_2, & Q_1 &= N_1 A_2 da_2, & N_2 &= T_2 A_1 da_1, \\ T_2 &= T_{21} A_1 da_1, & P_1 &= q_1 A_1 A_2 da_1 da_2, \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu powyższych uwag otrzymamy

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 T_1}{\partial a_1} - \frac{\partial A_2}{\partial a_1} T_2 + \frac{\partial A_1 T_{21}}{\partial a_2} \right) + \frac{N_1}{R_1} + q_1 = 0,$$

co pokrywa się z odpowiednim równaniem klasycznej teorii powłok obrotowych [33].

4. Związki pomiędzy siłami i momentami wewnętrznymi a odkształceniami i przemieszczeniami powierzchni środkowej

Jak już wspomnieliśmy w poprzednim punkcie, siły wewnętrzne w określonych przekrojach są statycznie równoważne naprężeniom wyznaczonym zgodnie z hipotezą płaskich przekrojów. Przy tych założeniach związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami możemy wyznaczyć na podstawie powszechnie znanych zależności teorii zginania prętów cienkich.

Rozpatrzmy w tym celu pręt układu odkształconego (rys. 4) przyjmując chwilowo oznaczenia pomocnicze

δ_1, δ_2 przemieszczenia liniowe węzłów 1 i 2 prostopadłe do osi pręta,

Ω_1, Ω_2 bezwzględne kąty obrotów węzłów 1 i 2, względem osi prostopadłych do rysunku,

τ_1, τ_2 względne kąty obrotów węzłów 1 i 2 względem osi prostopadłych do rysunku.

Pomiędzy tymi wielkościami zachodzą związki

$$(4.1) \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \tau_1 = \Omega_1, \quad \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \tau_2 = \Omega_2.$$

Wykorzystując znane związki pomiędzy względnymi kątami ugięcia a siłami i momentami na końcach pręta otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} - \frac{Mh}{2EI} - \frac{Th^2}{12EI} &= \Omega_1, \\ \frac{\delta_2 - \delta_1}{h} + \frac{Mh}{2EI} - \frac{Th^2}{12EI} &= \Omega_2, \end{aligned}$$

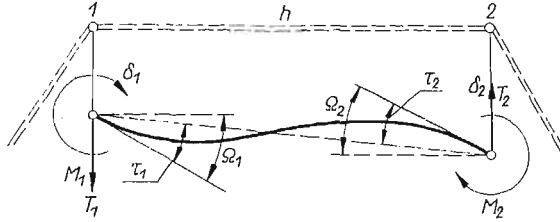
a po przekształceniach

$$(4.2) \quad T = \left[\frac{\delta_2 - \delta_1}{h} - \frac{1}{2} (\Omega_1 + \Omega_2) h \right] h \kappa,$$

$$M = \kappa h^3 (\Omega_2 - \Omega_1),$$

gdzie $\kappa = Ef/h^4$.

Uwzględniając fakt, że w geometrii powierzchniowej siatki punktów wyznaczyliśmy dla poszczególnych prętów wielkości $(\delta_2 - \delta_1)$, $(\Omega_2 - \Omega_1)$, $(\Omega_1 + \Omega_2)$, będące składowymi wektora odkształcenia liniowego i kąтового (por. praca autora [25])



Rys. 4

w funkcji przemieszczeń u , v , w i biorąc pod uwagę znaki poszczególnych sił wewnętrznych (rys. 4), otrzymamy następujące zależności określające cztery siły poprzeczne i cztery momenty zginające:

$$(4.3) \quad Q_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12h_1^2 \kappa_{1n} \left[-\vartheta_{1\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} q_{1\alpha+\frac{1}{2}} \right] = 12h_1 \kappa_{1n} \left[-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{R_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 w) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \psi h_1 \right],$$

$$Q_{2\beta+\frac{1}{2}} = 12h_2^2 \kappa_{2n} \left[\vartheta_{2\beta+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q_{2\beta+\frac{1}{2}} \right] = 12h_2^2 \kappa_{2n} \left[\frac{2A_1}{h_2 \nabla_{\beta} A_1} \left(-\frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} w \right) - \frac{\nabla_{\beta} A_1}{4A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \varphi + \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{2 \nabla_{\beta} A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \psi - \right. \\ \left. - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_{\alpha} h_2}{2 \nabla_{\beta} A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma \right];$$

$$T_{1\alpha+\frac{1}{2}} = 12h_1^2 \kappa_{1t} \left[\omega_{1\alpha+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} s_{1\alpha+\frac{1}{2}} \right] = 12h_1^2 \kappa_{1t} \left[\frac{\Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} v}{h_1} + \frac{1}{4} h_1 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi}{R_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2h_1} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 \gamma) \right],$$

$$T_{2\beta+\frac{1}{2}} = 12h_2^2 \kappa_{2t} \left[\omega_{2\beta+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} s_{2\beta+\frac{1}{2}} \right] = \frac{12h_2^2 \kappa_{2t}}{A_1 h_2 \nabla_{\beta} A_1} \left[\frac{1}{2} (\nabla_{\beta} A_1)^2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} u - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} A_2 \Delta_{\alpha} h_2 \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} v - B_2 \Delta_{\alpha} h_2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} w + B_2 A_1^2 \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \psi + A_2 A_1^2 \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma \right],$$

$$\begin{aligned}
 G_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \kappa_{1n} h_1^3 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \psi, \\
 (4.3) \quad G_{2\beta+\frac{1}{2}} &= \kappa_{2n} h_2^3 \left[\frac{1}{2} \frac{\nabla_\beta A_1}{A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \varphi - \frac{A_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \psi - \frac{B_2}{h_2} \frac{\Delta_\alpha h_2}{\nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma \right]; \\
 H_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \kappa_{1t} h_1^3 s_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \kappa_{1t} h_1^3 \left[-\frac{h_1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi}{R_1} \right) + \frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 \gamma) \right], \\
 H_{2\beta+\frac{1}{2}} &= \kappa_{2t} h_2^3 s_{2\beta+\frac{1}{2}} = \kappa_{2t} h_2^3 \left[\frac{2A_1 A_2}{h_2 \nabla_\beta A_1} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} \gamma - \frac{h_2 A_1}{R_2 \nabla_\beta A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} \psi \right],
 \end{aligned}$$

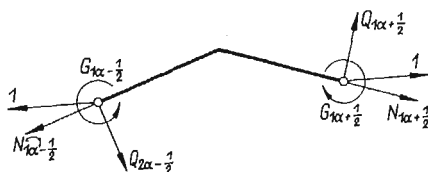
gdzie:

$$\kappa_{1n} = \frac{E_1 I_{1n}}{h_1^4}, \quad \kappa_{2n} = \frac{E_2 I_{2n}}{h_2^4}, \quad \kappa_{1t} = \frac{E_1 I_{1t}}{h_1^4}, \quad \kappa_{2t} = \frac{E_2 I_{2t}}{h_2^4}.$$

Związki określające siły normalne i momenty skręcające w funkcji przemieszczeń i odkształceń nie wymagają szczegółowego omówienia.

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad N_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \mu_1 h_1^2 \varepsilon_{1\alpha+\frac{1}{2}} = \mu_1 h_1^2 \left[\frac{1}{h_1^2} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (A_1 u) + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{w}{R_1} \right) \right], \\
 N_{2\beta+\frac{1}{2}} &= \mu_2 h_2^2 \varepsilon_{2\beta+\frac{1}{2}} = \mu_2 h_2^2 \left[\frac{\Delta_\alpha h_2}{2A_1} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} u + \frac{A_2}{h_2} \Delta_{\beta+\frac{1}{2}} v + \frac{B_2}{h_2} \nabla_{\beta+\frac{1}{2}} w \right], \\
 M_{1\alpha+\frac{1}{2}} &= \nu_1 h_1^2 p_{1\alpha+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{h_1} \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} (\varphi A_1) + h_1 \Delta_{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma}{R_1} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Powyższy sposób nie jest jedynym sposobem wyznaczenia związków pomiędzy siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami. Zależności te można wyznaczyć również dla punktów przy argumentach całkowitych. Jednakże droga ta prowadzi do wzo-



Rys. 5

rów dość złożonych i nie mających, jak się zdaje, większego znaczenia praktycznego. Dla zilustrowania tego sposobu rozpatrzmy zależność pomiędzy wydłużeniem względnym ε_1 i siłami wewnętrznymi. Związek ten otrzymamy wyznaczając odkształcenie elementu powłoki w kierunku t (rys. 5). Po przekształceniach otrzymamy

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2A_1 \kappa_{1n}} \left[\frac{1}{24R_1} \Delta_\alpha Q_1 - \frac{1}{4h_1 R_1} \nabla_\alpha M_1 + \frac{\kappa_{1n} A_1}{h_1^2 \mu_1} \nabla_\alpha N_1 \right]$$

Jak widać, powyższa zależność przedstawia sobą związek w postaci liniowej kombinacji sum i przyrostów kilku funkcji sił wewnętrznych, co poważnie utrudnia jej stosowanie.

Na zakończenie rozważań nad siłami wewnętrznymi należy zwrócić uwagę na to, że tylko zależności określające siły normalne (N_1 , N_2) przechodzą w granicy w od-

powiednie wyrażenia w teorii powłok cienkich, oczywiście przy współczynniku Poissona równym zeru. Pozostałe siły i momenty wewnętrzne mają granice różne od odpowiednich wielkości w powłokach cienkich. Wynika to stąd, że zostały one wyznaczone z ugięć pręta prostego, który w granicy nie osiąga wycinka powłoki ogólnie biorąc o dwu krzywiznach różnych od zera.

5. Warunki brzegowe

Wszystkie otrzymane w p. 3 równania równowagi w liczbie sześciu są pierwszego rzędu i to w odniesieniu do każdej z nie znanych funkcji sił wewnętrznych. W punkcie 4 wyznaczyliśmy z kolei każdą z dwunastu funkcji sił wewnętrznych przez równania pierwszego rzędu w odniesieniu do każdego z sześciu przemieszczeń liniowych i kątowych. Jeżeli teraz podstawimy do równań równowagi siły wyrażone przez przemieszczenia, to otrzymamy sześć równań drugiego rzędu względem przemieszczeń. Łącznie otrzymamy więc układ równań równoważny jednemu równaniu dwunastego rzędu względem nie znanej funkcji rozwiązującej.

Przyjmijmy, że linie konturu ograniczające naszą powłokę leżą w płaszczyznach wyznaczonych punktami o współrzędnych $\alpha = \text{const}$ lub $\beta = \text{const}$. W takich przypadkach rozwiązanie wspomnianego układu równań wymaga znajomości sześciu warunków brzegowych na każdej z krawędzi wycinka powłoki. Poniżej zajmiemy się warunkami brzegowymi dla kilku najczęściej spotykanych przypadków ograniczając się jedynie do brzegu $\alpha = \alpha_0$. Warunki dla brzegów $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$ i $\beta = 0$ mają postać analogiczną.

Brzeg powłoki swobodny. Wszystkie sześć składowych sił i momentów równe są zeru,

$$(5.1) \quad N_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = Q_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = T_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0, \quad M_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = H_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = G_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0.$$

Brzeg podparty przegubowo nieprzesuwnie (przeguby kuliste)

$$(5.2) \quad w_{\alpha_0} = v_{\alpha_0} = u_{\alpha_0} = 0, \quad Q_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_2}{2} + G_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$T_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} \cdot \frac{h_2}{2} - H_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0, \quad M_{1\alpha_0+\frac{1}{2}} = 0.$$

Brzeg całkowicie utwierdzony

$$(5.3) \quad u_{\alpha_0} = v_{\alpha_0} = w_{\alpha_0} = 0, \quad \varphi_{\alpha_0} = \psi_{\alpha_0} = \gamma_{\alpha_0} = 0.$$

Powłoka zamknięta w kierunku α . Jeżeli będziemy zmieniali α przy ustalonym β , to zawsze będziemy wracać do tego samego punktu otrzymując te same wartości przemieszczeń i sił wewnętrznych. Tak więc w przypadku powłoki zamkniętej warunki brzegowe zamieniają się w warunki okresowości.

Powłoka podparta na brzegach przeciwległych przegubowo z możliwością przesuwu w kierunku α . W takim przypadku, jeżeli stosujemy rozwiązania w postaci okresowych szeregów półzakre-

sowych jak np. $\sin(n\pi a/\alpha_0)$, gdzie n jest liczbą całkowitą, to warunki brzegowe również sprowadzają się do warunków okresowości w postaci

$$(5.4) \quad f(-a) = -f(a).$$

Rozpatrując zagadnienia brzegowe dla równań różnicowych musimy pamiętać o różnicach, jakie tu występują w porównaniu z zagadnieniami brzegowymi dla równań różniczkowych. W tych ostatnich tak funkcja jak i jej dowolna pochodna określone są w jednym i tym samym punkcie. Natomiast w równaniach różnicowych n -tego rzędu (n — liczba parzysta) przyrost lub suma określone są, ogólnie rzecz biorąc, wartościami funkcji w $n+1$ sąsiednich punktach. Jeżeli więc rozpatrujemy w obszarze α_0 punktów równanie różnicowe zwyczajne n -tego rzędu, to ma ono sens tylko w $(\alpha_0 - n)$ punktach. W punktach brzegowych w liczbie $n/2$ na jednym brzegu i $n/2$ na drugim brzegu nasze równanie traci sens. Punktom brzegowym odpowiadają bowiem równania zbudowane z uwzględnieniem wyżej wymienionych warunków brzegowych.

Przykłady zastosowań powyższych równań będą tematem osobnej publikacji w jednym z kolejnych numerów *Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej*.

Literatura cytowana w tekście

1. J. H. ARGYRIS, *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, 1964.
2. S. O. ASPLUND, *Structural Mechanics*, I, II, Göteborg 1963.
3. I. BABUŠKA, *The Fourier transform in the theory of differences equations and its applications* Arch. Mech. Stos., 4, 11 (1959).
4. F. BLEICH, H. BLEICH, *Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes*, Der Stahlbau, 10 (1937), 7.
5. F. BLEICH, E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, Berlin 1927.
6. S. BŁASZKOWIAK, Z. KAŹKOWSKI, *Metoda Crossa*, Warszawa 1959.
7. М. Я. БОРОДЯНСКИЙ, *Устойчивость рамных куполов*, Расчет пространственных конструкций, Москва 1958.
8. В. А. БОВИН, *Разностно-вариационные методы строительной механики*, Киев 1963.
9. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, PWN, Warszawa 1961.
10. K. CLAPEYRON, *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*, Comptes rendus hebdomadaires de séances de l'Académie des Sciences de Paris, 26, 45 (1857).
11. В. Г. ЧУДНОВСКИЙ, *Свободные колебания и устойчивость циклических симметрических пространственных рам*, Расчет пространственных конструкций, II, 1951.
12. D. L. DEAN, *Analysis of Curved Lattices with Generalized Joint Loadings*, 20 Publications IABSA, 1960.
13. D. L. DEAN, C. P. UGARTE, *Analysis of Structural Nets*, 23 Publications IABSA, 1960.
14. D. L. DEAN, *Lamella beams and grids*, J. Eng. Mech. Div., 2, 90 (1964).
15. D. L. DEAN, S. TAUBER, *Solutions for one-dimensional structural lattices*, J. Eng. Mech. Div. A.S.C.E., 1959.
16. В. А. ЭРЯГИНА, *Устойчивость цилиндрических стержневых систем*, Изв. Высш. учебн. заведения, Стр.-во и арх-ра, 226, 1963.
17. A. FÖPPL, *Das Fachwerk im Raum*, Leipzig 1892.
18. G. GEIZENDORFER, L. LEGATSKI, *Unistrut space-frame system*, Univ. of Michigan Press, 1955.

19. W. GUTKOWSKI, *Statics and stability of prismatic frame-lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., 5, 9 (1961).
20. W. GUTKOWSKI, *The stability of lattice struts*, Z.A.M.M., 6, 43 (1963).
21. W. GUTKOWSKI, *Stateczność pozornie nieszttywnej powłoki ramowo-kratowej ściśkanej siłą osiową*, Rozpr. Inżyn., 3, 11 (1963).
22. W. GUTKOWSKI, *Unistrut plates*, Bull. Acad. Polon. Sci., 3, 12 (1964).
23. W. GUTKOWSKI, *Plane polygonal bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., 9, 12 (1964).
24. W. GUTKOWSKI, *Cylindrical grid shell*, Arch. Mech. Stos., 3, 17 (1965).
25. W. GUTKOWSKI, *Geometria różnicowa powierzchniowej siatki punktów*, Mech. Teor. i Stos., 2, 3 (1965).
26. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw — Hill, 1959.
27. P. JASTRZĘBSKI, R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Kratownice — obliczenia statyczne*, Arkady 1959.
28. F. LADERER, *Grid shells composed of steel tubes*, Proc. Symp. on Shell Research, Delft, Aug. 30 — Sept. 2, 1961.
29. Z. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Düsseldorf 1963.
30. L. MANN, *Die Berechnung steifer Vierecknetze*, Zeitschr. Bauwesen, 59, 1909.
31. R. MISES, J. RATZERSDORFER, *Die Knicksicherheit von Fachwerken*, Z.A.M.M., 5, 1925.
32. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, I, II, Warszawa 1960.
33. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек*, Ленинград 1962.
34. И. Г. ПОПОВ, *Цилиндрические стержневые системы*, Москва 1952.
35. П. К. РАШЕВСКИЙ, *Курс дифференциальной геометрии*, Москва 1956.
36. А. Н. СЕГАЛЬ, *Высотные сооружения. Расчет на прочность, жесткость и устойчивость*, Госстройиздат, 1949.
37. А. Н. СЕГАЛЬ, *О расчете несимметричной циклической стержневой системы*, Расчет постр. конст., 2, 1951.
38. Л. Н. СТАВРАКИ, *Устойчивость пространственных каркасов из тонкостенных открытых, симметричных профилей*, Сборник трудов Института Стр. Мех., 12, 1950.
39. В. Д. ШАПКОВИЧ, *Матричный метод расчета регулярных стержневых систем*, Расчет постр. констр., 4, 1958.
40. S. P. TIMOSHENKO, *History of Strength of Materials*, London 1953.
41. А. А. УШАНСКИЙ, *Пространственные системы*, Москва 1948.
42. E. VITÁSEK, *The n-dimensional transform in the theory of difference equations*, Arch. Mech. Stos., 2, 12 (1960).
43. Д. В. ВАЙНБЕРГ, В. Г. ЧУДНОВСКИЙ, *Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений*, Киев 1948.
44. W. WIERZBIŃSKI, *Mechanika budowli*, Warszawa 1946.
45. W. WIERZBIŃSKI, *Zastosowanie różnic skończonych do obliczania dźwigarów zalamanych w płanie*, Przegląd Techniczny, 1930.
46. В. З. ВЛАСОВ, *Избранные труды*, т. I, Москва 1962.
47. С. WOŹNIAK, *Fibrous media as continuous models of frames and lattices*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. IV, 7 (1964).

Резюме

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Даются разностные уравнения стержневых конструкций с сеткой, приведенной на рис. 1. Рассматриваются последовательно уравнения равновесия, зависимости между силами и перемещениями, а также краевые условия. Обсуждаемые зависимости получены, на основе разностной геометрии [25], и рассуждений аналогичных, проводящимся в классической теории оболочек.

S u m m a r y

TWO-DIMENSIONAL GRID STRUCTURES

The present paper deals with finite differences equations of regular grid structures shown in Fig. 1. The equations of equilibrium, the force displacement relations and the corresponding boundary conditions have been considered. These relations are based on finite differences geometry described in paper [25], and the general way of reasoning coincides with that of the classical shell theory.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1965 r.
