

PRZEGLĄD PRAC DOTYCZĄCYCH NOŚNOŚCI GRANICZNEJ  
ROZCIĄGANYCH ELEMENTÓW Z KARBEM

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

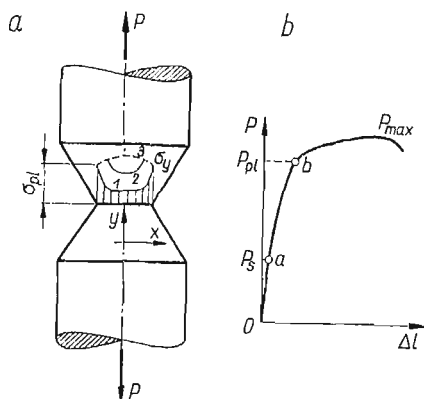
1. Wstęp

W stanie sprężystym nagłe zmiany przekroju poprzecznego wywołują znaczną nierównomierność rozkładu naprężeń. Maksymalne naprężenia w osłabionym przekroju mogą znacznie przewyższać naprężenia średnie obliczone jako iloraz siły przez pole przekroju. Tę koncentrację należy zawsze uwzględniać przy obliczaniu elementów obciążonych zmiennymi siłami, gdyż ona może być przyczyną powstania pęknięcia zmęczeniowego.

Istnieje jednak wiele praktycznie ważnych przypadków, gdy rozpatrywany element z karbem jest obciążony w sposób stały lub gdy liczba zmian obciążenia jest w całym okresie pracy elementu niewielka. Przy takim obciążeniu o zniszczeniu będą decydować bądź to odkształcenia plastyczne, bądź to kruche pęknięcie powstające przy pewnej granicznej wielkości obciążenia. To obciążenie nazywamy nośnością graniczną. Stosowane metale konstrukcyjne mają zwykle dobre własności plastyczne i pęknięcie powstaje w nich dopiero po rozwinięciu się dużych odkształceń plastycznych. Z tego względu analiza nośności granicznej oparta na założeniach teorii plastyczności ma duże znaczenie praktyczne.

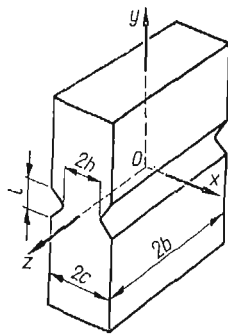
Przy niedużej wartości siły rozciągającej w pręcie istnieje sprężysty stan naprężenia, przy czym w miejscu zwężenia powstaje spiętrzenie naprężeń (krzywa 1 na rys. 1a). Gdy siła rozciągająca przekroczy pewną wielkość  $P_s$ , materiał w otoczeniu dna karbu osiąga stan plastyczny. Dalsze powiększanie siły powoduje powstawanie obszaru plastycznego (krzywa 2). Stanowi temu odpowiada na wykresie rozciągania (rys. 1b) odcinek  $ab$ . Wykres ten początkowo na odcinku  $Oa$  prostoliniowy ulega teraz zakrzywieniu, ale całkowite wydłużenie pręta jest w dalszym ciągu niewielkie, gdyż w środkowej części osłabionego przekroju materiał znajduje się w stanie sprężystym. W miarę wzrostu obciążenia obszar plastyczny rozszerza się i wreszcie dochodzi do osi przy sile równej  $P_{p1}$ . Od tej chwili cały przekrój poprzeczny znajduje się w stanie plastycznym i nawet stosunkowo niewielki przyrost obciążenia powoduje duże wydłużenie pręta. Rozkład naprężeń osiowych w najwęższym przekroju przedstawia krzywa 3 na rys. 1a. Dalszy wzrost siły rozciągającej możliwy jest tylko dzięki zjawisku wzmocnienia materiału, związanemu z dużym

mi odkształceniami. Po osiągnięciu przez siłę pewnej wielkości  $P_{max}$  następuje szybki proces prowadzący do zerwania pręta. Wartość siły  $P_{max}$  określa nośność graniczną pręta.



Rys. 1

Teoretyczne obliczenie nośności granicznej możliwe jest przy założeniu, że materiał pręta nie wykazuje wzmocnienia. Jeżeli w warunkach plastyczności przyjmiemy, że granica plastyczności ciała idealnie plastycznego pokrywa się z granicą plastyczności rzeczywistego materiału, to jako nośność graniczną otrzymamy wielkość siły  $P_{pl}$  (rys. 1). Do rzeczywistej wartości  $P_{max}$  możemy się zbliżyć zakładając odpowiednio wyższą granicę plastyczności. Zwracamy jednak uwagę, że dla  $P = P_{pl}$

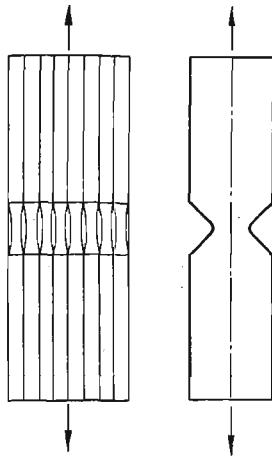


Rys. 2

pręt doznaje dużych odkształceń, a więc szczególnie w konstrukcjach maszynowych praktycznie traci wartość użytkową. Dla konstruktora wyznaczenie siły  $P_{pl}$  ma więc zasadnicze znaczenie i w stosunku do niej powinien obliczać zapas pewności.

Dla płaskich prętów osłabionych obustronnie karbami teoretyczna nośność graniczna może być wyznaczona w dwóch skrajnych przypadkach, mianowicie dla płaskiego stanu odkształcenia oraz dla płaskiego stanu naprężenia. Do warunków płaskiego stanu odkształcenia zbliżamy się, gdy szerokość  $2b$  (rys. 2) pręta jest dostatecznie duża w porównaniu z wymiarami miejsca osłabionego karbem. Przeciwnie, gdy szerokość  $2b$  jest mała, w przecie występują warunki płaskiego stanu

naprężenia. Istotnie bowiem, gdyby pręt składał się z szeregu cienkich płytek o łącznej grubości  $2b$ , to przy wspólnym rozciąganiu w każdej z płytek powstałoby w okolicy karbu znaczne zmniejszenie grubości (rys. 3). Jeżeli jednak pręt stanowi jedną całość, to powstanie takich lokalnych zwężeń jest niemożliwe. Dla  $b \gg h$  w przekrojach dostatecznie oddalonych od czołowych powierzchni  $z = \pm b$  odkształcenia w kierunku osi  $z$  są bardzo małe, rzędu sprężystych odkształceń przylegających grubszych części pręta. Można więc w przybliżeniu przyjąć, że przy znaczniejszych odkształceniach plastycznych mamy  $\varepsilon_z = 0$ . Przy dużym  $b$  w przeważającej części pręta panują warunki zbliżone do płaskiego stanu odkształcenia, co związane jest z występowaniem naprężenia normalnego  $\sigma_z = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$ . Na obu czołowych powierzchniach naprężenie to musi oczywiście zniknąć, a więc w sąsiadujących z nimi partiach materiału nie ma płaskiego stanu odkształcenia. Wpływ tego lokalnego zaburzenia maleje przy zwiększaniu szerokości  $2b$ . Na



Rys. 3

odwrot — przy małym  $b$  wpływ ten przeważa i dla  $b \ll h$  można przyjąć, że w całym materiale  $\sigma_z = 0$ , a więc panują warunki płaskiego stanu naprężenia. Niestety teoria nie jest obecnie w stanie dać odpowiedzi, jaka będzie nośność graniczna przy pośrednich szerokościach pręta. W § 4 omówiono wyniki doświadczalnej analizy tego zagadnienia.

Dla prętów osiowo-symetrycznych możliwe jest obliczenie nośności przy pewnych dodatkowych założeniach dotyczących stanu naprężenia. Obliczenia te są jednak bardzo żmudne, wobec czego celowe jest opracowanie w tym przypadku uproszczonych metod dających wystarczającą dla celów praktycznych dokładność. Zagadnieniu prętów z osiową symetrią poświęcono § 5.

Osobnym zagadnieniem jest analiza procesu rozwijania się obszarów plastycznych powstających u dna karbu. Pełne rozwiązanie tego problemu sprawia jeszcze ciągle duże trudności. Znane rozwiązania uzyskane przy szeregu założeń upraszczających dotyczą jedynie płaskiego stanu odkształcenia i płaskiego stanu naprężenia.

## 2. Płaski stan odkształcenia

W pierwszych dwu punktach tego paragrafu przedstawione zostaną dwie różne metody wyznaczania nośności granicznej pręta. Pierwsza metoda zakłada, że materiał jest sprężysto-plastyczny. Pozwala to prześledzić cały proces rozwijania się uplastycznionych obszarów aż do połączenia się na osi pręta, co uważane jest za osiągnięcie stanu granicznego. Obliczenia przeprowadza się numerycznie, co wymaga wielkiego nakładu pracy. W nowszych pracach tej grupy posługiwano się maszynami cyfrowymi. W drugiej metodzie opartej na przyjęciu modelu ciała sztywno-plastycznego obliczenia w większości przypadków są bardzo proste, a rozwiązania uzyskuje się w postaci zamkniętej. Jednakże rozwiązania te są słuszne jedynie dla dostatecznie głębokich korbów, a więc przy wystarczająco dużym stosunku wymiarów  $c/h$  (rys. 2). Zagadnienie to szerzej omówimy w p. 2.3 tego paragrafu.

**2.1. Rozwiązania sprężysto-plastyczne.** Wyznaczanie stanu naprężenia sprowadza się do rozwiązania zagadnień brzegowych dla obszaru sprężystego i plastycznego. Znaczną trudność stanowi tu nieznajomość granicy między tymi obszarami, która musi być wyznaczona jako jeden z elementów rozwiązania.

W swej klasycznej pracy D. N. ALLEN i R. SOUTHWELL [1] po wprowadzeniu funkcji naprężeń Airy'ego  $\varphi$  sprowadzili zagadnienie do całkowania równania biharmonicznego w obszarze sprężystym i równania

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4k^2$$

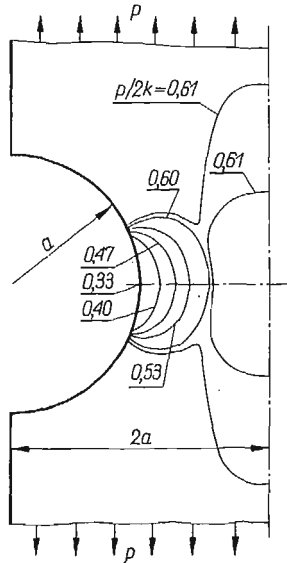
w obszarze plastycznym. Równanie to otrzymano przez podstawienie naprężeń określonych za pomocą funkcji  $\varphi$  do warunku plastyczności

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Całkowanie przeprowadza się numerycznie metodą relaksacji po zastąpieniu różniczek różnicami skończonymi. W całym badanym obszarze przyjmuje się odpowiednio gęstą kwadratową siatkę i wstępnie zakłada wartości funkcji  $\varphi$  w węzłowych punktach. Na całym brzegu obszaru funkcja  $\varphi$  jest znana. Rozwiązanie polega na obliczaniu kolejnych przybliżeń funkcji  $\varphi$  do chwili, gdy dwa następujące po sobie przybliżenia są wystarczająco bliskie. Procedura ta jest długotrwała i uciążliwa, ale stosując ją udało się rozwiązać szereg praktycznie ważnych przypadków.

Jednym z rozwiązanych w pracy [1] zagadnień jest rozciąganie pręta osłabionego dwoma półkolistymi wycięciami (rys. 4). Do chwili, gdy ciągle obciążenie na końcach pręta  $p \leq 0,33 \cdot 2k$ , cały materiał znajduje się w stanie sprężystym. Przy powiększaniu obciążenia powstają w najwęższym miejscu obustronne obszary plastyczne. Na rysunku zaznaczono położenie granic między obszarami plastycznymi a sprężystą częścią materiału dla różnych wielkości stosunku  $p/2k$ . Jak zwrócić uwagę R. HILL [2] dla wartości  $p/2k > 0,45$  granice te są dwukrotnie przecinane przez niektóre linie poślizgu. Zagadnienie przestaje być statycznie wyznaczalne i przy wyznaczaniu granicy między obszarem sprężystym i plastycznym należałoby uwzględnić również warunki dla prędkości płynięcia. Jednakże mimo tego braku

przebieg rozchodzenia się obszarów plastycznych znaleziony przez ALLENA i SOUTHWELLA z pewnością niewiele odbiega od rzeczywistości. Przy obciążeniu  $p = 0,60 \cdot 2k$  powstają dwa nowe plastyczne jądra na osi pręta w pewnej odległości od najwęższego przekroju. Te dwa nowe obszary rozszerzają się bardzo szybko i przy obciążeniu  $p = 0,61 \cdot 2k$  łączą się z obu poprzednimi obszarami. Od tej chwili zaczynają się duże odkształcenia plastyczne pręta. Nośność graniczna jest więc



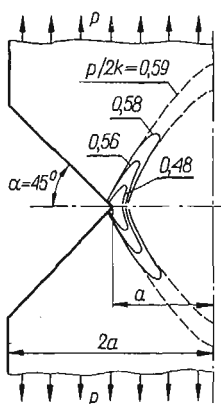
Rys. 4

określona wartością obciążenia  $p = 0,61 \cdot 2k$ . Średnie naprężenie osiowe w najwęższym przekroju równa się  $1,22 \cdot 2k$ , a więc jest znacznie większe od granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu, która w warunkach płaskiego stanu odkształcenia równa się  $2k$ .

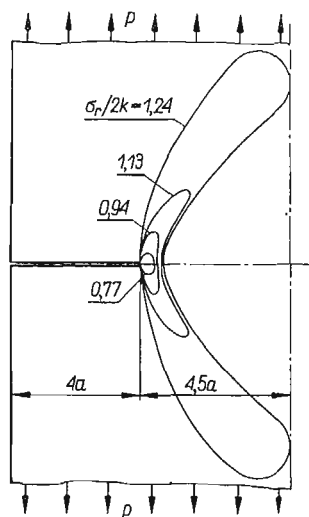
Innym przykładem podanym w pracy [1] jest rozciąganie pręta z ostrym karbem kątowym. Ten sam przypadek został przeliczony przez D. JURIŠICA [3] w inny sposób z uwzględnieniem warunku nierozdzielności również w obszarze plastycznym. Posługując się maszyną cyfrową rozwiązano od razu pełny układ równań różnicowych dla wszystkich węzłów przyjętej siatki. Rysunek 5 pokazuje rozchodzenie się obszarów plastycznych. Wynik ten niewiele odbiega od rozwiązania ALLENA i SOUTHWELLA. Obszary plastyczne mają kształt wąskich pasm i łączą się na osi pręta przy obciążeniu  $p = 0,59 \cdot 2k$ , pozostawiając w środku sprężyste jądro. Odpowiednia wartość otrzymana w pracy [1] wynosi  $p = 0,64 \cdot 2k$ , a więc niewiele więcej. Potwierdzenie istnienia sprężystego jądra otrzymał JURIŠIC metodą trawienia wzdłużnego przekroju odkształconego pręta. Średnie naprężenie w najwęższym przekroju równa się  $1,18 \cdot 2k$ .

W. ŻUKOWSKI [4] badał doświadczalnie proces odkształcenia w najwęższym przekroju pręta z karbem o zbliżonym kształcie wycięcia kąтового. Pomiarów odkształceń dokonywano na czołowych powierzchniach, nanosząc na nich za po-

mocą mikrotwardościomierza szereg gęsto rozmieszczonych punktów; odległość między punktami wynosiła 0,1 mm. W czasie rozciągania odczytywano za pomocą specjalnie dostosowanego mikroskopu o 100-krotnym powiększeniu zmianę odległości pomiędzy poszczególnymi punktami. Stwierdzono, że odkształcenia plastyczne obejmują jedynie mały odcinek najwęższego przekroju bezpośrednio sąsiadujący z dnem karbu. Wynik ten potwierdza istnienie jądra sprężystego, na które wskazują powyższe rozwiązania numeryczne. Pomiary Żukowskiego wykazują, że jądro to istnieje przez cały czas procesu odkształcenia, aż do rozdzielenia obu części pręta. Jednakże w innej pracy [11] dla karbu o innym kącie  $\alpha$  ta sama metoda pomiaru nie wykazała istnienia sprężystego jądra. Jest to związane z szerokością  $2c$



Rys. 5



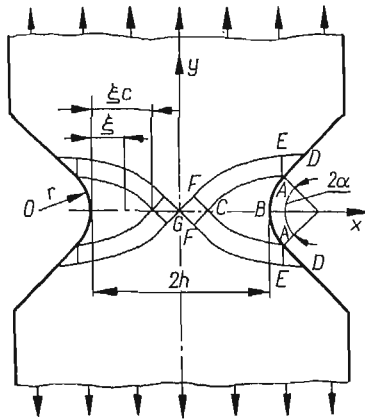
Rys. 6

części chwytowej (rys. 2), która, jak to zapewne uszło uwagi autora, była w pierwszym przypadku niedostateczna, a w drugim wystarczająco duża. Zagadnienie to omówimy w punkcie 2.3.

J. A. JACOBS [5] podał rozwiązanie dla pręta z obustronnym karbem w postaci wąskiej szczeliny, jaki otrzymuje się, gdy kąt wierzchołkowy  $\alpha$  karbu z rys. 5 równa się zero. Obliczenia przeprowadzono metodą relaksacji analogicznie jak w pracy [1]. Ten sam karb szczelinowy zbadali A. H. S. ANG i G. N. HARPER [6] metodą relaksacji, zaprogramowaną na maszynę cyfrową. Procedura obliczeń uwzględnia jednocześnie wyznaczenie naprężeń i odkształceń na podstawie związków Prandtla-Reussa. Na rysunku 6 pokazano granice obszarów plastycznych, odpowiadające różnym wartościom średniego naprężenia  $\sigma_r$  w najwęższym przekroju. Przy  $\sigma_r = 1,24 \cdot 2k$  obszary plastyczne łączą się na osi pręta.

W pracy Jacobsa [5] obliczenia wykonano przy różnych szerokościach części chwytowej, mianowicie dla  $c/h = 2; 4$  i  $8$ . We wszystkich przypadkach otrzymano sprężyste jądro, co jak wspomniano nie potwierdza się w doświadczeniach przy wystarczająco dużym  $c$ . Wyjaśnienie tej rozbieżności wymaga jeszcze dalszych badań.

**2.2. Rozwiązania sztywno-plastyczne.** W przypadku gdy karb jest dostatecznie głęboki można oczekiwać, że powstające u jego dna obszary plastyczne będą się obustronnie łączyły na osi najwęższego przekroju, a nie jak w rozpatrywanych poprzednio rozwiązaniach w pewnej odległości od tego przekroju pozostawiając sprężyste jądro. Można wtedy wyznaczyć rozkład naprężeń wykorzystując teorię płaskiego stanu odkształcenia ciała sztywno-plastycznego. Jak wiadomo, w stanie plastycznym stan naprężenia w sąsiedztwie brzegu jest zależny jedynie od istniejących na nim warunków. Kontur karbu jest brzegiem swobodnym, a więc warunki brzegowe są na nim jednoznacznie określone. Rozwiązując zagadnienie brzegowe typu Cau-



Rys. 7

chy'ego możemy wyznaczyć z obu stron symetryczne siatki linii poślizgu aż do spotkania na osi pręta. Metoda podana przez R. HILLA [7] pozwala obliczyć w sposób numeryczny rozkład naprężeń i nośność graniczną dla dowolnego kształtu karbu.

Jeżeli zarys karbu utworzony jest z dwu prostych połączonych na dnie łukiem koła (rys. 7), to nośność graniczna może być prosto określona w postaci zamkniętej [7]. Linie poślizgu w polu  $ABAC$  są spiralami logarytmicznymi, a naprężenie osiowe na odcinku  $BC$  równa się

$$\sigma_y = 2k \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{\xi}{r} \right) \right],$$

a więc rośnie od punktu  $B$  do  $C$ , przy czym  $\xi_c = h(e^\alpha - 1)$ .

W kwadracie  $GFCF$  panuje jednorodny stan naprężenia, a siatka linii poślizgu składa się z dwóch rodzin prostych. Na odcinku  $CG$  naprężenie osiowe jest więc stałe i jak wynika z zależności, jakie muszą być spełnione wzdłuż linii poślizgu, ma ono wielkość  $\sigma_y = 2k(1+a)$ .

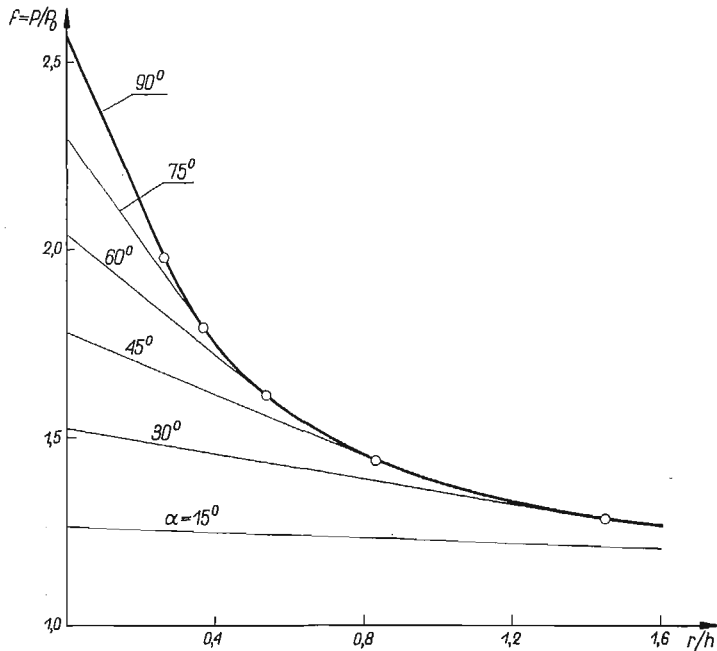
Po scałkowaniu naprężeń osiowych wzdłuż całej długości najwęższego przekroju  $BG$  otrzymujemy siłę graniczną

$$P = 4kh \left[ (1+a) - \frac{r}{h} (e^\alpha - 1 - a) \right], \quad \left[ \frac{r}{h} \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \right],$$

a więc większą od odpowiedniej siły  $P_0 = 4kh$  dla pręta bez karbu o szerokości  $2h$ . Współczynnik zwiększenia siły dla pręta z karbem

$$f_{\text{teor}} = \frac{P}{P_0} = (1+a) - \frac{r}{h}(e^\alpha - 1 - a)$$

dla różnych kątów  $\alpha$  przedstawiono na rys. 8 w zależności od stosunku  $r/h$ . Poszczególne proste dla różnych  $\alpha$  mają wspólną obwiednią. Punkt styczności każdej prostej z obwiednią odpowiada stosunkowi  $r/h$ , przy którym punkt  $C$  na rys. 7



Rys. 8

pokrywa się z punktem  $G$  środka pręta. Dla jeszcze większych wartości stosunku  $r/h$  krańcowe spirale wychodzące z punktu  $G$  przecinają łuk  $ABA$  w pewnej odległości od jego końcowych punktów  $A$ . Siła graniczna równa się wtedy

$$P = 4kh \left(1 + \frac{r}{h}\right) \ln \left(1 + \frac{h}{r}\right).$$

Wyrażenie na współczynnik nośności

$$f_{\text{teor}} = \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{r}{h}\right) \ln \left(1 + \frac{h}{r}\right)$$

jest jednocześnie równaniem obwiedni z rys. 8.

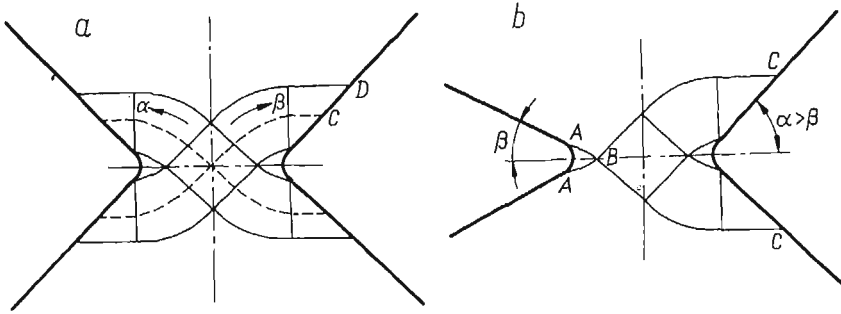
Drugi skrajny przypadek karbu z rys. 7 otrzymujemy dla  $r \rightarrow 0$ , gdy karb przybiera formę ostrego kąтового wycięcia. Rozkład naprężeń osiowych w najwęższym przekroju jest równomierny, a współczynnik zwiększenia nośności równa się  $P/P_0 = 1 + (\pi/2) - a$  i osiąga największą możliwą we wszystkich wartości  $f_{\text{max}} = 1 + \pi/2 = 2,571$  dla karbu szczelinowego ( $\alpha = 0$ ).



To znaczne zwiększenie nośności granicznej pręta z karbem w stosunku do pręta bez wycięć o szerokości równej  $2h$  tłumaczy się tym, że sprężyste partie materiału w sąsiedztwie karbu krępują swobodę odkształcania poprzecznego (zweźniania) materiału w najwęższej części pręta. Powstają wskutek tego poprzeczne naprężenia rozciągające  $\sigma_x$ , dzięki którym materiał przechodzi w stan plastyczny dopiero przy naprężeniach  $\sigma_y$  większych od  $2k$ .

Łatwo sprawdzić [7], że siatka linii poślizgu z rys. 7 jest kinematycznie dopuszczalna. Jeżeli przyjmiemy, że sztywne części pręta oddalają się z jednakową prędkością  $v_0$ , to wzdłuż zewnętrznych linii poślizgu  $DEFG$  możemy wyznaczyć normalną do nich składową prędkości. Pozwala to wyznaczyć prędkości w całym polu siatki linii poślizgu. Składowe styczne prędkości po obu stronach linii  $DEFG$  będą oczywiście różne, gdyż od strony obszaru plastycznego określają je równania Geiringer, a od strony zewnętrznej ruch obszaru sztywnego jako całości. Linie  $DEFG$  są więc liniami nieciągłości prędkości. Nieciągłość ta kończy się w punktach  $D$  na swobodnej powierzchni, co jest kinematycznie dopuszczalne.

Możliwe jest również rozwiązanie bez linii nieciągłości [8], pokazane na rys. 9a. Na odcinku  $CD$  swobodnej krawędzi prędkości mogą być dane dowolnie. Ażeby nie było nieciągłości w prędkościach, można na przykład przyjąć, że na odcinku  $CD$

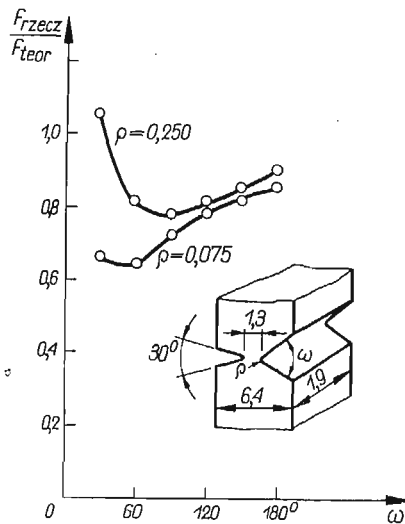


Rys. 9

skierowane wzdłuż linii poślizgu  $\beta$  składowe prędkości płynięcia rosną liniowo od zera w punkcie  $D$  w kierunku punktu  $C$  przy założeniu, że górna część pręta jest nieruchoma. Pewne uwagi na temat możliwych rozkładów prędkości w podobnym przypadku występującym przy wciskaniu stempla podał G. J. BYKOWCEW [9]. Ta niejednoznaczność pola prędkości jest typowa dla teorii płaskiego stanu odkształcenia ośrodka sztywno-plastycznego. Rozstrzygnięcie, które z nieskończonej liczby możliwych rozwiązań dla prędkości zachodzi w pręcie z rzeczywistego materiału, możliwe jest obecnie, jak się wydaje, jedynie na drodze doświadczalnej. Ścisła analiza bowiem, uwzględniająca wszystkie mogące mieć wpływ na przebieg procesu odkształcenia zjawiska, jak sprężystość materiału, wzmocnienie, ściśliwość a nawet struktura krystaliczna metalu jest w obecnym stanie wiedzy nieosiągalna.

Ciekawe jest, że w przypadku karbu niesymetrycznego (rys. 9b) pole prędkości jest określone jednoznacznie [8]. Zewnętrzne linie poślizgu  $ABC$  są liniami nieciągłości prędkości.

Badania doświadczalne wykazują, że rzeczywista wielkość  $f_{rzecz}$  współczynnika nośności pręta z karbem dobrze zgadza się z teoretyczną wartością  $f_{teor}$ . W. ŻUKOWSKI [10, 11] badał pręty z karbem o kształcie kąтового wycięcia z zaokrągleniem na dnie dla dwóch wartości całkowitego kąta wycięcia  $2\alpha = 47^\circ$  i  $102^\circ$ . Pręty wykonane były ze średniowęglowej stali. Dla prętów z karbem o kącie  $102^\circ$  uzyskano [11] stosunek  $f_{rzecz}/f_{teor} = 0,95$ , przy czym współczynniki wyznaczano dla stosunku sił zrywających. Dla karbu o kącie  $47^\circ$  zgodność ta była znacznie gorsza, ale nie zwrócono uwagi na to, że w tym przypadku szerokość  $2c$  części chwytowej pręta była zbyt mała. Zagadnienie to omówimy w p. 2.2. W pracy [12] stwierdzono dla karbu pokazanego na rys. 14 dla początku dużych odkształceń plastycznych  $f_{rzecz}/f_{teor} = 1,05$ , a dla sił zrywających  $f_{rzecz}/f_{teor} = 0,88$ . Materiałem badanych prętów było aluminium. Podobne wyniki otrzymano dla nieco innego kształtu karbu dla prętów z miękkiej stali. Należy jednak wyraźnie podkreślić, że wielkość



Rys. 10

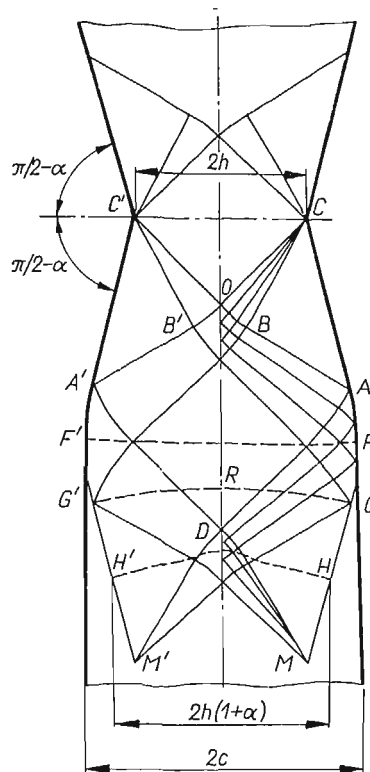
współczynnika  $f_{rzecz}$  zależy od czułości materiału na działanie karbu. Szczególnie dotyczy to siły zrywającej. Jak pokazał F. A. MCCLINTOCK [8] siła ta zależy również znacznie od wielkości próbki (efekt skali).

W pracy [8] badano również pręty osłabione karbem w sposób niesymetryczny. Na rysunku 10 pokazano wyniki badania próbek ze stopu aluminium, osłabionych niesymetrycznie wycięciami kątowymi zaokrąglonymi na dnie. Pręty z niesymetrycznymi karbami mają mniejszy rzeczywisty współczynnik nośności od próbek osłabionych symetrycznie, chociaż współczynniki teoretyczne mają jednakowe. Badanie doświadczalne próbek z niesymetrycznymi karbami ma więc istotne znaczenie dla określenia czułości materiału na działanie karbu.

**2.3. Wpływ szerokości części chwytowych pręta.** Osobnym zagadnieniem jest ustalenie minimalnej szerokości  $2c$  części pręta poza karbem. W przekrojach znacznie odległych od karbu, w których można przyjąć, że panuje stan zwykłego rozciągania,

szerokość ta wynika z prostego warunku, że naprężenie rozciągające nie może przekroczyć wartości  $2k$ . Mamy więc  $c/h = P/P_0$ . Jednakże tak obliczona szerokość  $2c$  jest z pewnością zbyt mała dla przekrojów niezbyt odległych od karbu. Całkowitą pewnością, że w przekrojach tych maksymalna siła określona nośnością graniczną karbu może być przeniesiona bez przekroczenia warunku plastyczności, możemy uzyskać budując przedłużenie stanu naprężenia w karbie na przylegające do niego obszary. Gdyby bowiem warunek plastyczności został w którymkolwiek punkcie przekroczony, znaczyłoby to, że materiał później osiągnie stan plastyczny w karbie niż w jego sąsiedztwie, a więc nośność graniczną całości określałaby nośność najsłabszego miejsca poza karbem. Taka sytuacja miała miejsce w jednym z badań W. Żukowskiego, omówionych w poprzednim punkcie.

Sposób zbudowania przedłużenia siatki linii poślizgu podał J. F. W. BISHOP [13]. Jest on oparty na jednym z podstawowych twierdzeń granicznych teorii ośrodka sztywno-plastycznego, z którego wynika wniosek, że nośność graniczna określona

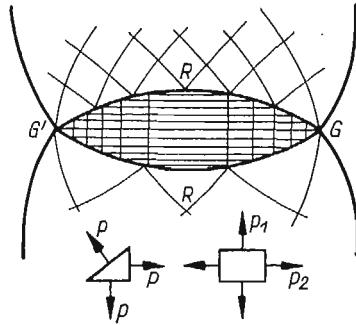


Rys. 11

z dowolnego rozkładu naprężeń, spełniającego równania równowagi i warunki brzegowe dla naprężeń oraz nigdzie nie przekraczającego warunku plastyczności, nie będzie większa od rzeczywistej nośności granicznej. Taki dowolny stan naprężenia nie musi spełniać warunków kinematycznych zagadnienia i nazywany jest statycznie dopuszczalnym. Z wniosku tego bezpośrednio wynika również zasada, że

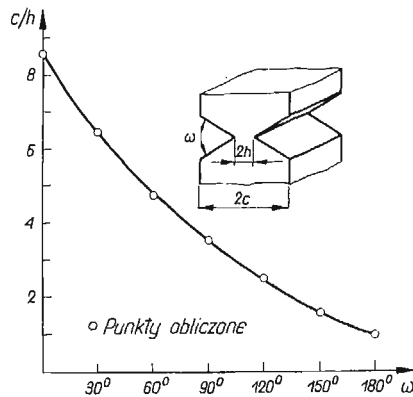
dodanie materiału nie może obniżyć nośności granicznej elementu. W dodanych partiach materiału możemy bowiem zawsze założyć zerowy stan naprężenia.

Sposób wyznaczania bezpiecznej szerokości  $2c$  części chwytowych pręta wyjaśnimy na przykładzie pręta z ostrymi wycięciami o kącie  $\pi - 2\alpha$  (rys. 11). Przedłużenie siatki linii poślizgu w karbie, ograniczonej skrajnymi liniami  $ABOC'$  i  $A'B'OC$ ,



Dys. 12

rozpocznijmy od rozwiązania zagadnienia charakterystycznego, określonego danymi wzdłuż odcinków linii poślizgu  $OBA$  i  $OB'A'$ . Dane te jednoznacznie określają stan naprężenia w czworokącie krzywoliniowym  $OADA'$ . Następnie należy rozwiązać zagadnienie odwrotne do zagadnienia brzegowego Cauchy'ego. Znając mianowicie przebieg linii poślizgu  $AD$  należy wyznaczyć kształt swobodnego brzegu  $AGM$ . Brzeg ten jest określony jednoznacznie. Dalsze przedłużanie siatki poza

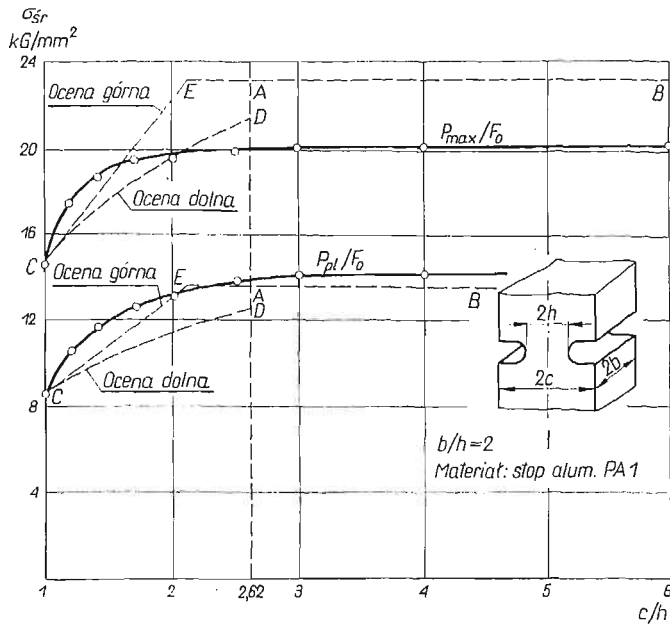


Rys. 13

linię  $DM$  możliwe jest po wprowadzeniu pewnej statycznie dopuszczalnej nieciągłości naprężeń.

Poprowadźmy trajektorię naprężeń głównych  $GRG'$  przez dowolny punkt  $G$  krawędzi poniżej najszerszego przekroju  $FF'$ . Zbudujmy następnie lustrzane odbicie tej trajektorii i znajdujące się nad nią siatki linii poślizgu (rys. 12). Podzielmy obydwie trajektorie na skończoną liczbę małych odcinków, na których naprężenie

normalne jest w przybliżeniu stałe. Pole zawarte pomiędzy trajektoriami podzielmy na szereg prostokątnych i trójkątnych elementów za pomocą prostych przechodzących przez punkty podziału trajektorii. W elementach trójkątnych panuje hydrostatyczny stan naprężenia, a w prostokątnych stan dwuosiowego rozciągania, przy czym oba naprężenia główne są równe naprężeniom normalnym przekazywanym w poprzek linii  $G'G'$  odpowiednio na pionowy i poziomy pasek, których przecięcie tworzy dany prostokąt. Zagęszczając siatkę pasków otrzymujemy w granicy statycznie dopuszczalne ciągłe pole naprężeń. Obie linie graniczne  $GRG'$  są liniami nieciągłości naprężeń typu statycznie dopuszczalnego. Można wykazać, że w żadnym punkcie tego pola warunek plastyczności nie będzie przekroczony. Jeżeli więc założymy, że kontur pręta ma kształt linii  $CAFG$  i jej zwierciadlanego odbicia względem poziomej linii  $GG'$ , to nośność graniczna tej części pręta nie będzie niższa



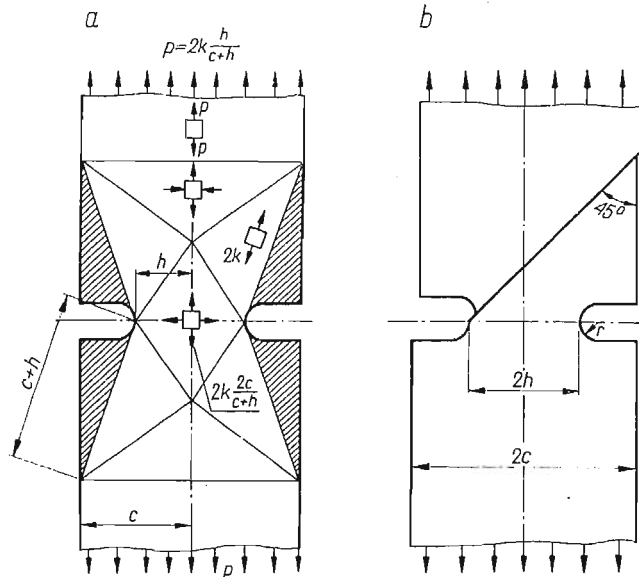
Rys. 14

niż przekroju  $CC'$  w karbie. Można jednak z łatwością wykazać, że część konturu pręta poniżej punktów  $G$  i  $G'$  mogą tworzyć również dwie proste równoległe do osi pręta. W tym przypadku linią nieciągłości naprężeń będzie również pozioma prosta  $GG'$ . W prostokątnej części poniżej niej panuje stan jednoosiowego rozciągania. Jak powiedziano punkty  $G$  i  $G'$  zostały wybrane dowolnie. Jeżeli jednak część pręta poniżej nich mają ograniczać proste równoległe do osi, to skrajne położenie punktu  $G$  i  $G'$  określają punkty  $H$  i  $H'$ , dające minimalną dopuszczalną szerokość części chwytowych pręta, równą  $2h(1+a)$ . Ta część pręta będzie wtedy rozciągana równomiernie rozłożonym naprężeniem równym  $2k$ . Jeżeli kontur pręta zostanie utworzony przez poprowadzenie prostych pionowych z punktów  $F$  i  $F'$  w najszerszym miejscu, to z pewnością nośność graniczna części pręta poza karbem

nie będzie mniejsza niż przekroju w karbie. Kontur ten zawiera bowiem wewnątrz poprzednie wystarczająco mocne kontury, a dodanie materiału nie może zmniejszyć nośności granicznej.

W powyższy sposób w pracy [8] wyznaczono bezpieczną szerokość części chwytowych dla pręta z karbem kątowym (rys. 13).

Na rysunku 14 linią ciągłą przedstawiono wyniki doświadczalnej weryfikacji wpływu szerokości  $2c$  na nośność pręta z karbem półkolistym [12]. Z przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny wynika teoretyczny stosunek  $(c/h_{\text{teor}} = 2,62$ . Dla  $c/h \geq 2,62$  teoretyczny współczynnik nośności, wynikający z rys. 8, równa się  $f_{\text{teor}} = 1,57$ . Dwie proste przerywane  $AB$  na rys. 14 podają odpowiednio teoretyczne wartości umownych naprężeń zrywających i początku plastycznego płynięcia,



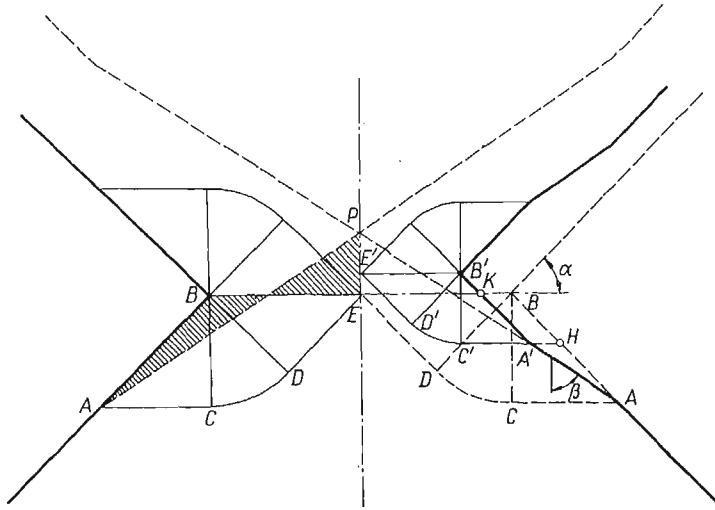
Rys. 15

obliczone przez pomnożenie odpowiednich naprężeń dla pręta bez karbu ( $c/h = 1$ ) przez  $f_{\text{teor}}$ . Na odcinku  $AE$  rozwiązanie z rys. 7 i 8 może być uważane za górną ocenę rzeczywistej nośności, gdyż jest jedynie kinematycznie dopuszczalne. Górną ocenę na odcinku  $CE$  otrzymano z kinematycznie dopuszczalnego schematu odkształcenia pokazanego na rys. 15b, a dolną ocenę na odcinku  $CD$  ze statycznie dopuszczalnego nieciągłego pola naprężeń (rys. 15a). Obydwa pola zostały podane przez W. PRAGERA i P. G. HODGE'A [29]. Krzywe doświadczalne dla małych  $c/h$  leżą powyżej górnej oceny, ale na ogół zgodność jest dość dobra.

**2.4. Teoretyczna analiza procesu odkształcenia pręta z karbem.** Przyjmując jedno z kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości, wyznaczonych w sposób podany w punkcie 2.2, można zbadać cały proces odkształcenia w karbie aż do rozdzielenia obu części pręta. E. H. LEE [14] zbadał odkształcenie karbu kąтового o kącie  $2\alpha = 90^\circ$ , przyjmując pole prędkości z linią nieciągłości między obszarem sztywnym i plastycznym. Załóżmy, że dolna część pręta jest nieruchoma, a górna porusza się

z prędkością równą 2. Linia  $BE$  (rys. 16) ma prędkość równą jedności, skierowaną ku górze. Po lewej stronie rysunku pokazano siatkę linii poślizgu w chwili początkowej. Materiał poniżej skrajnej linii  $ACDE$  znajduje się w spoczynku. Prędkość wzdłuż  $ACDE$  i wszystkich linii należących do tej samej rodziny jest stała i równa się  $\sqrt{2}$ . Wzdłuż linii drugiej rodziny prostopadłych do  $ACDE$  prędkość równa się zeru.

Początkowym odkształceniem krawędzi  $AB$  będzie mały uskoki w punkcie  $A$ , gdyż odcinek  $AB$  porusza się poziomo. Po prawej stronie rysunku przedstawiono pole linii poślizgu w zaawansowanym stanie procesu. Plastyczne płynięcie jest teraz ograniczone do znacznie zmniejszonego obszaru  $A'C'D'E'B'$ . Odcinek  $AH$  początkowej krawędzi  $AB$  zajął nowe położenie  $AA'$ , a odcinek  $BH$  przesunął się



Rys. 16

równoległe w położenie  $KA'$ . Materiał znajdujący się poniżej chwilowej granicy  $A'C'D'E'$ , ale powyżej początkowej granicy  $ACDE$ , został odciążony i przeszedł w stan sztywny, ale uprzednio doznał dużych odkształceń plastycznych. Stan naprężenia w poszczególnych obszarach chwilowej siatki linii poślizgu jest taki sam, jak w odpowiednich obszarach początkowej siatki. Wielkość naprężenia osiowego w najwęższym miejscu karbu jest stała i równa się  $\sigma_y = 2k(1 + \pi/2 - \alpha)$ . Siła rozciągająca maleje w ciągu całego procesu.

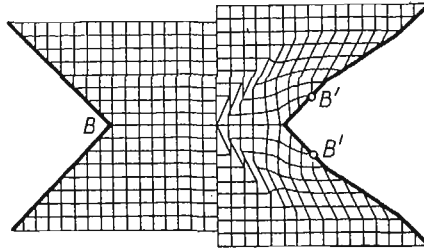
Prostoliniowość nowej krawędzi  $AA'$  wynika stąd, że prędkość na chwilowej granicy sztywno-plastycznej  $A'C'$  jest stała w czasie całego procesu. Położenie krawędzi można określić z warunku stałej objętości materiału. Przy końcu procesu szerokość w miejscu karbu zaniknie do zera, a nowe krawędzie przetną się w punkcie  $P$ . Warunek stałej objętości, wymagający aby zakreskowane pola były równe, daje związek

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha (2 + \cos \alpha)},$$

określający położenie zdeformowanej krawędzi.

Znając prędkości płynięcia w dowolnej chwili możemy prześledzić drogę każdej cząstki materiału i wyznaczyć odkształcenie kwadratowej siatki pomyślanej w materiale. Sposób odkształcenia komplikuje zmieniający się kierunek ruchu cząstek. Trudność tę pokonano dzieląc cały okres aż do rozdzielania pręta na 8 jednakowych odcinków czasu  $\Delta t$ . Ruch badanej cząstki materiału w okresie każdego z tych przyrostów określano jako średnią z prędkości wyznaczonych na początku i końcu rozpatrywanego odcinka czasu  $\Delta t$ .

Na rysunku 17 pokazano po lewej stronie siatkę początkową kwadratową ( $t = 0$ ), a po prawej stronie siatkę po dużym odkształceniu ( $t = 3\Delta t$ ), gdy redukcja szerokości w najwęższym miejscu wynosi 37,5%. Charakterystyczne jest rozdzielanie



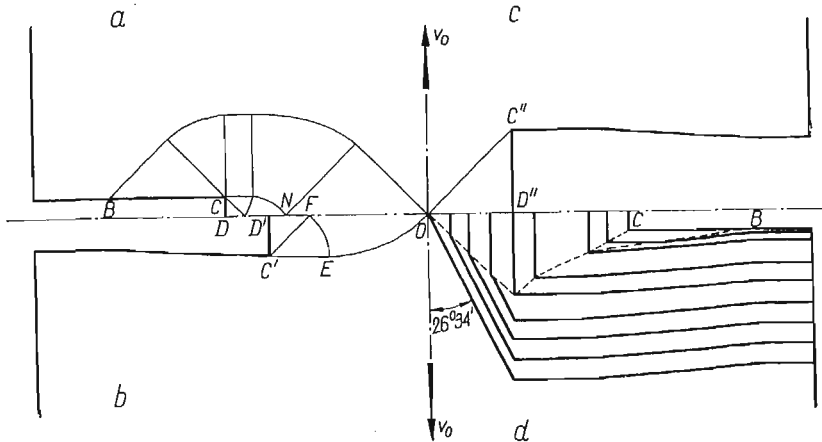
Rys. 17

materiału na dnie karbu, co łatwo zauważyć z końcowego położenia  $B'$  cząstek znajdujących się początkowo w najbliższym sąsiedztwie punktu  $B$ . Różni się to od zwykle spotykanego typu kruchego pęknięcia, przy którym oprócz energii lokalnego płynięcia plastycznego musi być również dostarczana z zewnątrz znaczna energia związana z powstawaniem nowej powierzchni. Ta część energii jest jednak w naszym przypadku bardzo mała i może być pominięta w porównaniu z energią odkształcenia plastycznego. Zagadnienie to zostało przedyskutowane przez M. E. MERCHANTA [15] w związku z procesem tworzenia się wióra przy skrawaniu metali. Podobne rozdzielanie materiału obserwuje się również przy wciskaniu klina w ośrodek plastyczny [16], ale w obydwu tych przypadkach jest ono wywołane wciskaniem sztywnego zaostrego elementu między rozdzielane części materiału. W naszym przypadku materiał jest rozdzielany rozciąganiem dzięki szczególnemu kształtowi powierzchni. Dalej zobaczymy, że w rozwiązaniu tego samego problemu przy granicznym przejściu od karbu z zaokrąglonym dnem do karbu ostrego takie rozdzielanie nie występuje. Innym przeciwnym argumentem jest, że rozdzielanie powoduje bardzo duże lokalne odkształcenia plastyczne, a więc na rzeczywisty charakter płynięcia w tym obszarze może mieć znaczny wpływ wzmocnienie materiału.

Podobną analizę przeprowadził E. H. LEE [17] również dla karbu w postaci wąskiego wycięcia prostokątnego. Na rysunku 18a pokazano siatkę linii poślizgu w początkowej chwili procesu płynięcia. Z rozwiązania dla prędkości wynika, że odcinek  $BC$  krawędzi przesuwa się w sposób sztywny, zachowując poziome położenie. Odcinek  $CD$  przesuwa się w kierunku osi pręta zachowując położenie pionowe. Znając prędkości tych odcinków możemy znaleźć ich nowe położenie po upływie



krótkiego czasu  $\Delta t$ . Między przesuniętymi odcinkami krawędzi powstanie w krawędzi luka, gdyż części krawędzi przylegające do narożnego punktu  $C$  mają różnie skierowane prędkości odpowiednio od strony odcinka poziomego i pionowego. Luka ta wypełniana jest przez materiał napływający z wnętrza pręta. Jeżeli przyjąć, że cząstki tworzące nowy odcinek krawędzi zachowują w rozpatrywanym przedziale czasu  $\Delta t$  początkową prędkość płynięcia, to powstałoby zaokrąglone naroże na dnie karbu. W omawianej pracy przyjęto, że nowy odcinek krawędzi tworzą dwie prostoliniowe części, stanowiące przedłużenie przesuniętych odcinków  $BC$  oraz  $CD$  i tworzących ostre prostokątne naroże. Taki schemat odkształcenia jest kine-



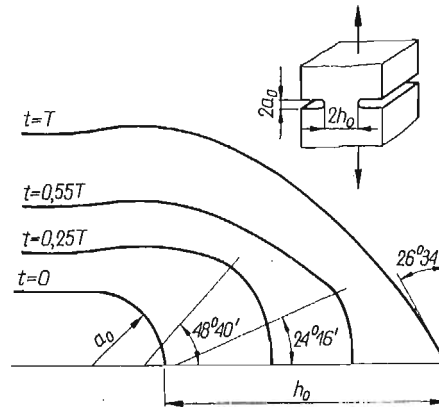
Rys. 18

matycznie dopuszczalny. Budując następnie siatkę linii poślizgu dla nowej konfiguracji karbu można wyznaczyć kolejne położenie krawędzi, odpowiadające nowemu przyrostowi czasu  $\Delta t$ . W ten sposób dochodzimy do momentu, gdy punkt  $N$  kolejnej siatki wypadnie na osi pręta (rys. 18b). Od tej chwili obszar plastyczny nie obejmuje już poziomych odcinków krawędzi, a cały materiał na zewnątrz skrajnej linii poślizgu  $C'EO$  porusza się jak sztywna całość. Pionowy odcinek  $C'D'$  przesuwa się w dalszym ciągu w kierunku osi. Ostatnia faza procesu zaczyna się w chwili, gdy punkt  $F$  siatki dojdzie do osi (rys. 18c). Siatkę linii poślizgu tworzy od tej chwili pole jednorodnego stanu naprężenia  $C''D''O$ , a pionowy odcinek krawędzi  $C'D''$  przesuwa się w kierunku osi z prędkością  $v = v_0$ , a więc równą prędkości obu sztywnych części pręta. Zmniejsza on przy tym swą długość. Tworzące się przy tym nowe odcinki krawędzi są prostoliniowe i nachylone względem osi pod kątem  $26^\circ 34'$ . Na rysunku 18d pokazano kształt krawędzi w różnych stadiach procesu aż do rozdzielenia obu części pręta.

Jeżeli karb nie ma ostrego załamania, to prędkość płynięcia każdego punktu jest określona jednoznacznie. A. J. WANG [18] zbadał przypadek karbu półkolistego stosując analogiczną jak w powyższych pracach metodę postępowania, polegającą na podziale czasu przebiegu całego procesu  $T$  na szereg krótkich odcinków czasu, w których prędkości można uważać za stałe. Na rysunku 19 pokazano kształt kra-

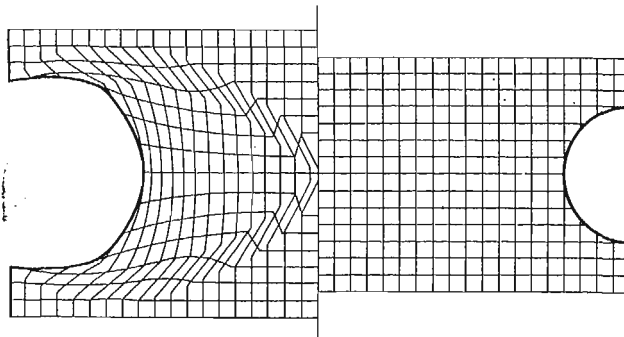
wędzi karbu w kilku fazach procesu. W pracy [19] (por. również [20]) zbadano odkształcenie kwadratowej siatki dla tego samego karbu (rys. 20). Nie ma tu zjawiska rozdzielania materiału na dnie karbu, jakie charakteryzowało rozwiązanie z rys. 17 dla pręta z ostrym karbem.

E. H. LEE i A. J. WANG [21] rozwiązali zagadnienie przebiegu procesu odkształcania pręta z ostrym karbem kątowym oraz z karbem prostokątnym w odmienny



Rys. 19

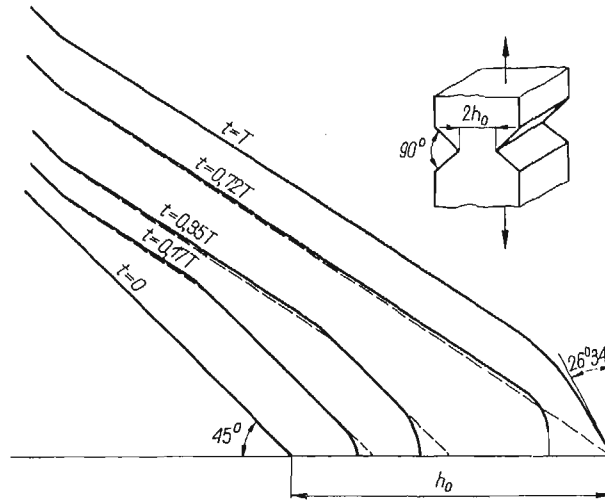
sposób niż w pracach [14] i [17]. Rozwiązanie uzyskano jako przejście graniczne od rozwiązania dla karbów z zaokrąglonymi narożami przy malejącym do zera promieniu zaokrąglenia. Podejście takie usuwa niejednoznaczność kierunku płynięcia w narożach. W obu poprzednich rozwiązaniach niejednoznaczność tę wykorzystano dla przyjęcia najdogodniejszego dla obliczeń schematu odkształcenia. Zastosowana teraz metoda przejścia granicznego daje w wyniku powstanie za-



Rys. 20

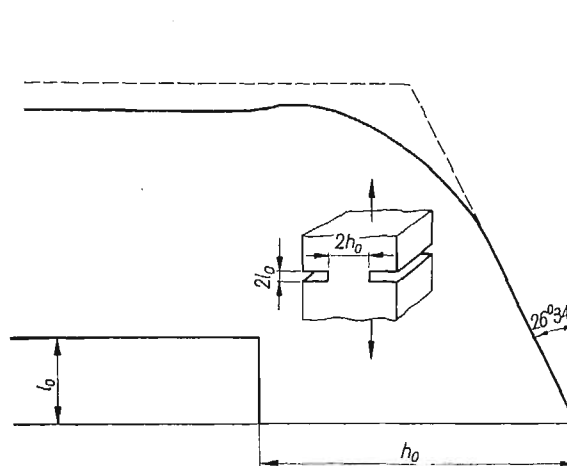
okrąglenia krawędzi w narożu natychmiast po rozpoczęciu procesu odkształcania. Na rysunku 21 pokazano liniami ciągłymi kształt krawędzi karbu kąowego w różnych fazach odkształcania. Dla porównania liniami przerywanymi zaznaczono postacie krawędzi w tych samych chwilach, otrzymane w poprzednio omawianej

pracy [14]. W początkowej fazie obydwu rozwiązań są bardzo zbliżone. Końcowa faza procesu różni się jednak znacznie. Moment rozdzielenia obu części pręta następuje w obecnym rozwiązaniu później niż w poprzednim. Podobnie dla karbu



Rys. 21

prostokątnego (rys. 22) od razu tworzy się zaokrąglenie w narożu. Metoda rozwiązania, polegająca na traktowaniu ostrego załamania krawędzi jako granicznego przypadku naroża zaokrąglonego, bardziej odpowiada warunkom rzeczywistym,



Rys. 22

gdyż w praktyce niemożliwe jest wykonanie idealnie ostrego naroża, odpowiadającego matematycznie pojętej osobliwości.

Wszystkie powyższe rozwiązania oparto na założeniu, że linie poślizgu przecinające się w środku najwęższego przekroju są liniami nieciągłości prędkości. Jak

już poprzednio wspomniano rozkład prędkości jest niejednoznaczny, wobec czego założenie to jest dość dowolne. W rzeczywistych metalach wykazujących wzmocnienie płynięcie obejmie znacznie większy obszar. Jeżeli bowiem przyjmujemy, że pierwszy poślizg nastąpił wzdłuż wspomnianej linii nieciągłości, to materiał ulegnie tu natychmiast wzmocnieniu. Nieciągłość prędkości przeniesie się w słabszą część materiału na zewnątrz linii początkowej itd. Słuszność tego rozumowania potwierdzają doświadczalnie otrzymane metodą trawienia linie poślizgu w stalowym pręcie z karbem [22].

Tą samą metodą można rozwiązać zagadnienie przebiegu odkształcania przy założeniu każdego innego nieciągłego lub ciągłego pola prędkości spełniającego warunki kinematyczne. Jednak jak się wydaje, nikt jeszcze nie podjął takiej próby.

### 3. Płaski stan naprężenia

Jak wspomniano na wstępie, w uplastycznionej części pręta panują warunki zbliżone do płaskiego stanu naprężenia, jeżeli wymiar  $b$  jest dużo mniejszy od wymiaru  $a$ . Podobnie jak dla płaskiego stanu odkształcania można posługując się modelem ciała sprężysto-plastycznego zbadać rozchodzenie się obszarów plastycznych. Wyniki prac poświęconych temu zagadnieniu oraz ich doświadczalną weryfikację omówimy w punkcie 3.1. Znacznie prościej można wyznaczyć nośność graniczną przyjmując model ciała sztywno-plastycznego. Zagadnieniu temu poświęcono punkt 3.2.

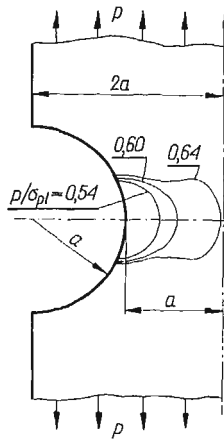
**3.1. Rozwiązania sprężysto-plastyczne.** Wyznaczanie granic obszarów plastycznych polega na numerycznym rozwiązaniu jednocześnie równań dla obszarów sprężystych i plastycznych [1]. W tych ostatnich warunkach plastyczności HUBERA-MISESA ma teraz postać

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 3k^2.$$

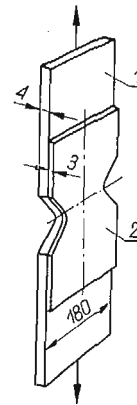
Pozostałe równania są takie same, jak dla płaskiego stanu odkształcania. ALLEN i SOUTHWELL [1] rozwiązyli przypadek pręta z półkolistymi wycięciami i ostrym karbem kątowym o kącie  $2\alpha = 90^\circ$ . Na rysunku 23 przedstawiono kolejne fazy rozwijania się obszarów plastycznych w płytce z karbem półkolistym. Proces ten jest w końcowej fazie odmienny niż dla tego samego kształtu karbu w warunkach płaskiego stanu odkształcania. Połączenie postępujących z obu stron obszarów plastycznych następuje teraz w środku najwęższego przekroju, a nie w znacznej od niego odległości, jak to pokazywał rys. 4. Wartość średniego naprężenia osiowego w najwęższym przekroju w chwili łączenia się obszarów plastycznych wynosi  $\sigma_{ym} = 1,12\sigma_{p1}$ . Dla karbu kąтового połączenie obszarów plastycznych następuje w pewnej odległości od najwęższego przekroju. Wątpliwości budzi jednak otrzymana średnia wartość naprężeń osiowych w najwęższym przekroju  $\sigma_{ym} = 1,24\sigma_{p1}$ , przewyższająca największą możliwą wartość  $\sigma_{max} = 1,15\sigma_{p1}$ , jaką może osiągnąć naprężenie normalne zgodnie z powyższym warunkiem plastyczności.

W pracy [23] wyznaczono teoretyczny przebieg rozchodzenia się obszarów plastycznych w rozciąganej cienkiej płytce osłabionej symetrycznie korbami szczelinowymi.

P. S. THEOCARIS i E. MARKETOS [24, 25] uzyskali doświadczalne potwierdzenie kształtu obszarów plastycznych i przebiegu procesu ich rozwijania się, wyznaczonych teoretycznie przez ALLENA i SOUTHWELLA. W obydwu pracach badana próbka 1 z karbami (rys. 24) wykonana była ze stali o wysokiej granicy plastyczności, powyżej której krzywa rozciągania przebiega płasko aż do odkształcenia około 2,5%. Materiał ten można więc w przybliżeniu traktować jako sprężysto-plastyczny bez

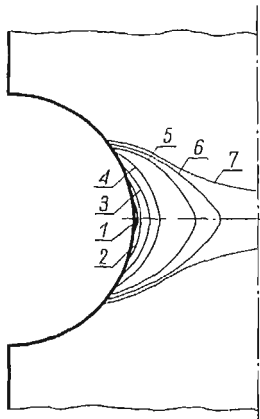


Rys. 23



Rys. 24

wzmocnienia. Do polerowanej powierzchni próbki przyklejano przezroczystą płytkę 2 o grubości 3 mm wykonaną z materiału czułego elastooptycznie. W czasie obciążania płytka 2 dzięki małemu modułowi Younga cały czas znajduje się w stanie sprężystym, mimo tego że w próbce 1 pojawiają się obszary plastyczne. Obserwując



Rys. 25

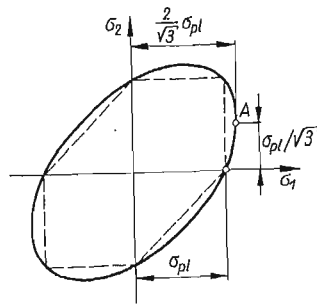
płytkę 2 w spolaryzowanym świetle można wyznaczyć w każdej chwili panujący w niej stan odkształcenia. Odkształcenia te są oczywiście takie same jak w metalowej próbce, gdyż obie płytki są sztywno połączone warstwą kleju. Następnie przyjmując odpowiednie zależności między przyrostami odkształceń a naprężeniami można

obliczyć naprężenia i określić granicę obszaru plastycznego. Na rysunku 25 przedstawiono otrzymane w ten sposób [24] granice w różnych fazach rozciągania płytki z korbami o takim samym kształcie jak na rys. 23. Jak widać, rozwiązanie numeryczne daje ten sam charakter rozszerzania się obszarów plastycznych, jaki otrzymuje się z badań doświadczalnych. Podobna analiza doświadczalna przeprowadzona w pracy [25] dla karbu o kształcie zbliżonym do ostrego kąтового wycięcia również wykazuje dużą zgodność obrazu postępujących granic sprężysto-plastycznych z teoretycznymi wynikami Allena i Southwella.

Ta sama metoda doświadczalna została zastosowana przez R. T. AULTA i J. W. SPRETNAKA [26] do analizy rozwijania się obszarów plastycznych w molybdenowych cienkich próbkach osłabionych korbami.

**3.2. Rozwiązania sztywno-plastyczne.** Z wyżej przedstawionych teoretycznych rozwiązań sprężysto-plastycznych i badań doświadczalnych wynika, że połączenie obszarów plastycznych następuje w najwęższym przekroju. Należy więc oczekiwać, że w przeciwieństwie do przypadku płaskiego stanu odkształcenia rozwiązania te powinny dawać wyniki bliskie rozwiązaniom sztywno-plastycznym.

Oczywiste jest, że w najwęższym przekroju obydwa naprężenia normalne, zarówno równoległe jak i prostopadłe do osi pręta, są rozciągające. Wynika stąd wniosek, że jeżeli przyjmiemy warunek plastyczności Treski, przedstawiony liniami prze-



Rys. 26

rywanymi na rys. 26, to współczynnik zwiększenia siły granicznej  $P$  w stosunku do siły granicznej  $P_0$  dla pręta bez karbu musi być równy jedności, a więc  $f = P/P_0 = 1$ . Zniszczenie pręta nastąpi przez poślizg wzdłuż płaszczyzn nachylonych pod kątem  $45^\circ$  do obu powierzchni blachy.

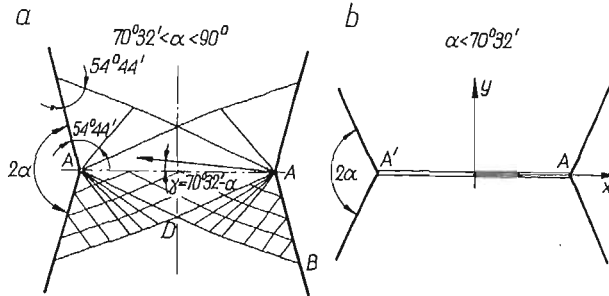
W przypadku warunku Hubera-Misesa, przedstawionego elipsą na rys. 26, naprężenie osiowe może osiągnąć maksymalną wartość  $\sigma = 1,15\sigma_{pl}$ . Wynika stąd, że współczynnik  $f$  może być zawarty jedynie w granicach  $1 \leq f \leq 1,15$ . Dokładne wyznaczenie jego wartości możliwe jest w wielu przypadkach przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego Cauchy'ego dla naprężeń w sposób podobny jak dla płaskiego stanu odkształcenia. Jednakże jak wykazał R. HILL [27] przy pewnej konfiguracji karbu zniszczenie pręta następuje przez utworzenie się w najwęższym przekroju lokalnego pocienienia blachy, zwanego szyjką.

W przypadku karbu kąтового (rys. 27a) siatkę charakterystyk (nie będących teraz liniami poślizgu) wyznacza się rozpoczynając od swobodnej krawędzi  $AB$ ,

na której znamy obydwa naprężenia główne  $\sigma_1 = \sigma_{p1}$ ,  $\sigma_2 = 0$ . Współczynnik  $f$  jest określony zależnością

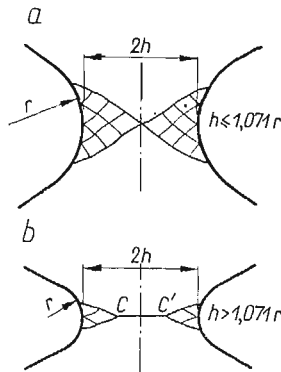
$$f = P/P_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{1 + 3\sin^2\gamma} + 3\cos\gamma).$$

Rozwiązanie to jest słuszne jedynie dla  $70^\circ 32' < \alpha < 90^\circ$ . Dla  $\alpha = 70^\circ 32'$  charakterystyka  $AD$  pokrywa się z prostą  $AA'$ , a cała siatka charakterystyk redukuje się do jednej charakterystyki  $AA'$  (rys. 27b). Współczynnik  $f$  osiąga swą największą możliwą wartość,  $f = 2/\sqrt{3} = 1,15$ . Plastyczne płynięcie sprowadza się jedynie do



Rys. 27

lokalnych odkształceń w szyjce tworzącej się wzdłuż  $AA'$ . Stan naprężeń w szyjce jest stały i określony wartościami naprężeń  $\sigma_y = 2k$ ,  $\sigma_x = k$  (punkt  $A$  na rys. 26), gdzie  $k = \sigma_{p1}/\sqrt{3}$ . Taki sam stan naprężenia w szyjce istnieje i dla kątów  $\alpha < 70^\circ 32'$ , gdyż dodanie materiału nie zmniejsza nośności granicznej.



Rys. 28

Taka sama szyjka tworzy się również na środkowym odcinku  $CC'$  (rys. 28) w blachach osłabionych karbami zaokrąglonymi, jeżeli  $h > 1,071r$ .

Zagadnienie wyznaczenia dostatecznej szerokości pręta w przekrojach oddalonych od karbu zostało zbadane w pracy [13] również dla omawianych tu cienkich prętów. Metoda jest analogiczna do omówionego w p. 2.3 przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Wykazano, że dla karbu kąтового zawsze możliwe jest zbudowanie przedłużenia pola naprężeń w obszar sztywny.

H. FORD i G. LIANIS [28] dla oceny dolnej granicy nośności pręta z karbem zastosowali metodę budowy statycznie dopuszczalnych pól naprężeń, podobnie jak to poprzednio przedstawiono dla płaskiego stanu odkształcenia.

#### 4. Pręty o pośredniej szerokości

W wielu rzeczywistych konstrukcjach wymiar  $2b$  pręta nie jest ani na tyle mały, aby powstał płaski stan naprężenia, ani dostatecznie duży, aby wytworzył się płaski stan odkształcenia. Powstaje wobec tego ważny problem, kiedy teoretyczne schematy płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia stanowią mogą dobre przybliżenie rzeczywistych warunków. Teoretyczną próbę analizy tego zagadnienia podjął D. C. DRUCKER [30] w oparciu o graniczne twierdzenia teorii plastyczności. Analiza taka, polegająca na doborze odpowiednich pól kinematycznie lub statycznie dopuszczalnych, może dać jedynie bardzo przybliżoną ocenę wielkości  $2b$ , niezbędnej dla powstania stanu zbliżonego do płaskiego stanu odkształcenia. Całkowicie pewne informacje mogą być uzyskane jedynie w sposób doświadczalny.

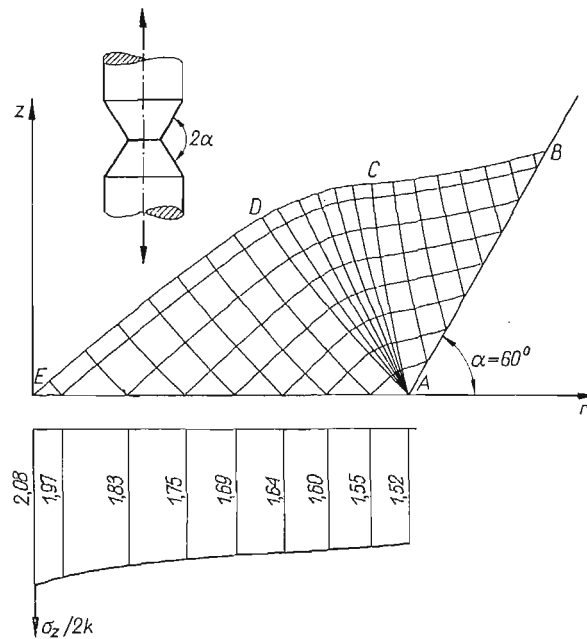
W. ŻUKOWSKI badał wpływ grubości  $2b$  na nośność pręta z ostrym karbem kątowym. W pracy [11] wykazano, że wielkość siły zrywającej, odniesionej do jednostki długości w kierunku wymiaru  $2b$ , ma już praktycznie stałą wartość dla  $b/h > 4$ . W pracy [10] badano zmianę wielkości siły, przy której zaczynają się duże odkształcenia plastyczne w zależności od wartości stosunku  $b/h$ . Również i ta siła odniesiona do jednostki długości jest prawie stała dla  $b/h > 4$ .

W pracy [12] otrzymano, że dla karbu z łagodnie zaokrąglonymi narożami już dla  $b/h > 2$  wielkość siły jednostkowej jest prawie stała.

#### 5. Pręty o symetrii obrotowej

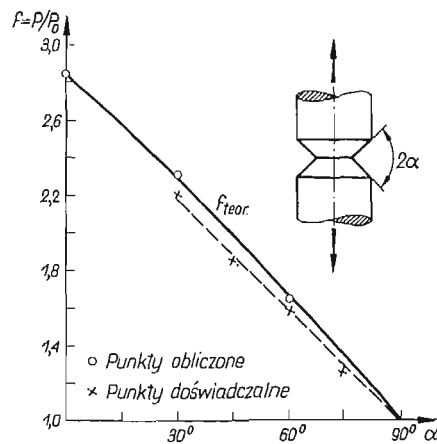
Jak wiadomo, rozwiązanie osiowo-symetrycznego zagadnienia teorii plastyczności ciągle jeszcze sprawia duże trudności. Dla warunku plastyczności Hubera-Misesa i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia Lévy'ego-Misesa podstawowy układ równań nie jest typu hiperbolicznego [2], wobec czego nie może być do jego rozwiązania zastosowana najbardziej efektywna w teorii plastyczności metoda charakterystyk. Zagadnienie będzie jednak typu hiperbolicznego, jeżeli przyjąć warunek plastyczności Treski, a ponadto założyć, że stan naprężenia reprezentowany jest w przestrzeni naprężeń głównych wyłącznie przez punkty leżące na jednej z krawędzi sześciokątnej pryzmy odwzorowującej warunek Treski. Założenie to odpowiada tak zwanemu warunkowi pełnej plastyczności Haara-Kármána i w przypadku osiowo-symetrycznego zagadnienia prowadzi do rozprężenia równań dla naprężeń i prędkości. Po wyznaczeniu naprężeń można obliczyć obydwie składowe prędkości płynięcia: promieniową  $v_r$  i osiową  $v_z$ , rozwiązując układ składający się z warunku izotropii i warunku nieściśliwości. R. T. SHIELD [31] wykazał, że charakterystyki dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń, podobnie jak w płaskich zagadnieniach teorii plastyczności.





Rys. 29

W pracy [31] SHIELD podał rozwiązanie problemu wciskania osiowo-symetrycznego sztywnego stempla w półprzestrzeń z materiału idealnie plastycznego. Rozwiązanie to po zmianie znaków naprężeń jest oczywiście również rozwiązaniem dla



Rys. 30

rozciąganego osiowo-symetrycznego pręta z karbem szczelinowym. Wyznaczone zostało przedłużenie pola naprężeń w obszar sztywny, pozwalające określić niezbędną średnicę części chwytowych pręta oraz rozwiązanie dla prędkości płynięcia materiału.

W pracy [32] podano przy tych samych założeniach jak w [31] rozwiązania dla karbu kąтового o różnych kątach oraz dla karbów z dnem zaokrąglonym. Na rysunku 29 pokazano siatkę charakterystyk, stanowiących jednocześnie linie poślizgu dla karbu kąтового o kącie  $\alpha = 60^\circ$ . Otrzymano ją przez kolejne rozwiązywanie zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych charakterystyk. W przeciwieństwie do płaskiego stanu odkształcenia zewnętrzna linia poślizgu  $BCDE$  nie może być teraz linią nieciągłości prędkości. Linia ciągła na rys. 30 pokazuje, jak zmienia się współczynnik nośności  $f_{\text{teor}}$  w zależności od kąta  $\alpha$  karbu. Linią przerywaną przedstawiono wyniki weryfikacji doświadczalnej na prętach z miękkiego aluminium. W omawianej pracy przeprowadzono również doświadczalną analizę wpływu średnicy części chwytowych pręta na jego nośność. Jest godne podkreślenia, że współczynnik nośności obliczony w opisany sposób dla prętów osiowo-symetrycznych niewiele różni się od współczynnika dla prętów, w których mamy płaski stan odkształcenia, jeżeli kształt karbu jest taki sam.

Wymienimy tu jeszcze pracę E. LEVINA [33], w której podano kinematycznie dopuszczalne pole prędkości dla zagadnienia wciskania walcowego stempla. Pole to pozwala ocenić od góry nośność graniczną pręta z karbem szczelinowym. Ocena ta daje wartość  $f = 2,92$  wobec wartości  $f' = 2,85$  otrzymanej przez SHIELDA [31].

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. N. ALLEN and R. SOUTHWELL, *Relaxation methods applied to engineering problems*. XIV. *Plastic straining in two-dimensional stress-system*, Phil. Trans. Roy. Soc., A, No. 850, **242** (1950), 379–414.
2. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1956.
3. D. JURŠIČ, *Two-dimensional elastic-plastic stress and strain analysis*, Inst. Met. Konstr., Univers. Ljubljana, Rep. P-1698.
4. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *Распределение деформаций и напряжений в плоских надрезанных стержнях в связи с объемом напряженного состояния*, АН СССР, Проблемы прочности в машиностроении, Вып. 2, Москва 1959.
5. J. A. JACOBS, *Relaxation methods applied to problems of plastic flow*. I. *Notched bar under tension*, Phil. Mag., **41** (1950), 349–361.
6. A. H. S. ANG and G. N. HARPER, *Analysis of contained plastic flow in plane solids*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Division, **30** (1964), no. EM5, 397–418.
7. R. HILL, *The plastic yielding of notched bars under tension*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **2** (1949), 40.
8. F. A. MCCLINTOCK, *On notch sensitivity*, Welding Journal Research Supplement, May 1961.
9. Г. И. БЫКОВЦЕВ, *О поле скоростей при вдавливании плоского штампна в пластическое полупространство*, **25** (1961), 552–553.
10. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *О коэффициенте усиления и характере распространения пластических зон в надрезанных стержнях*, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1958, 116–119.
11. В. С. ЖУКОВСКИЙ, *Деформированное состояние и прочность плоских надрезанных стержней произвольной толщины*, Расчеты на прочность, Вып. 9, Машгиз, Москва 1963, 231–252.
12. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIĄSTKOWSKI, *Doświadczalna analiza nośności granicznej rozciąganych płaskich prętów z karbem*, Rozpr. Inżyn., **13** (1965), 637–652.
13. J. F. W. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of a plastic-rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, **2** (1953), 43–53.
14. E. H. LEE, *Plastic flow in a V-notched bar pulled in tension*, J. Appl. Mech., **19** (1952), 331–336.

15. M. E. MERCHANT, *Mechanics of the metal cutting process. I. Orthogonal cutting and a type 2 chip*, J. Appl. Phys., **16** (1945), 273.
16. R. HILL, E. H. LEE and S. J. TUPPER, *The theory of wedge indentation of ductile materials*, Proc. Roy. Soc. of London, A, **188** (1947), 273-289.
17. E. H. LEE, *Plastic flow in a rectangularly notched bar subjected to tension*, J. Appl. Mech., **21** (1954), 140-146.
18. A. J. WANG, *Plastic flow in a deeply notched bar with semi-circular root*, Q. Appl. Math., **11** (1954), 427-438.
19. L. GARR, E. H. LEE, A. J. WANG, *The pattern of plastic deformation in a deeply notched bar with semicircular roots*, J. Appl. Mech., **23** (1956), 56-58.
20. W. PRAGER, *Probleme der Plastizitätstheorie*, Birkhauser Verl., Basel und Stuttgart 1955.
21. E. H. LEE, A. J. WANG, *Plastic flow in deeply notched bars with sharp internal angles*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 489-497.
22. B. B. HUNDY, *Plane plasticity*, Metallurgia, March 1954, 109-118.
23. L. D. STIMPSON and D. EATON, *The extent of elasto-plastic yielding at the crack point of an externally notched plane stress tensile specimen*, ARL 24, Office of Aerospace Research, July 1961.
24. P. S. THEOCARIS, *Experimental solution of elastic-plastic plane stress problems*, J. Appl. Mech., **19** (1962), 735-743.
25. P. S. THEOCARIS and E. MARKETOS, *Elastic-plastic strain and stress distribution in notched plates under plane stress*, J. Mech. Phys. Solids, **11** (1963), 411-428.
26. R. T. AULT and J. W. SPRETNAK, *Initial yielding and fracture in notched sheet molybdenum*, Int. J. Mech. Sci., **7** (1965), 87-102.
27. R. HILL, *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin shells*, J. Mech. Phys. Solids, **1** (1952), 19-30.
28. H. FORD, G. LIANIS, *Plastic yielding of notched strips under conditions of plane stress*, ZAMP, **8** (1957), 360-382.
29. W. PRAGER, P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, J. Wiley Inc., New York 1951, 215-216.
30. D. C. DRUCKER, *On obtaining plane strain or plane stress conditions in plasticity*, Proc. 2nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 485-488.
31. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc., **233 A**, No. 1193 (1955), 267-287.
32. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHEROWA, J. MIASTOWSKI, *Plastyczne płynięcie osiowo-symetrycznych rozciąganych prętów z karbem*, (w przygotowaniu).
33. E. LEVIN, *Indentation pressure of a smooth circular punch*, Quart. Appl. Math., **13** (1955), 133-137.

## Р е з ю м е

## ОБЗОР РАБОТ, КАСАЮЩИХСЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТЕРЖНЕЙ С ВЫРЕЗОМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ РАСТЯЖЕНИЮ

Обсуждаются основные теоретические и экспериментальные работы, касающиеся пластических деформаций и несущей способности стержней с вырезом, подверженных растяжению. Для стержней большого размера  $2b$  (рис. 1), в которых существует состояние близкое плоскому деформированному состоянию, обсуждаются последовательно: упруго-пластические и жесткопластические решения, влияние ширины стержня вне выреза, а также анализ деформирования, вплоть до момента разделения обеих частей стержня. В случае плоских пластинок с вырезами, подверженных растяжению, обсуждаются упруго-пластические и жесткопластические решения. Рассматриваются вопросы касающиеся стержней промежуточной ширины  $2b$ . Приводится также актуальное состояние теории осесимметрических стержней с вырезом.

## S u m m a r y

A SURVEY OF PAPERS DEALING WITH THE PROBLEM  
OF NOTCHED BARS PULLED IN TENSION

Presented is a survey of theoretical and experimental papers dealing with the plastic behaviour of notched bars pulled in tension. For plain strain bars discussed are: elastic-plastic and rigid-plastic solutions, the influence of the width of the bar outside the notch and an analysis of the deformation process until the moment of collapse. For plain stress bars, also elastic-plastic and rigid-plastic approach is described. The survey includes the problem of bars with intermediate width. Finally, the present state of the theory of axially symmetric bars is briefly discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 kwietnia 1965 r.*

---