

DOŚWIADCZALNE BADANIA NAD SKOŃCZONYMI, SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYMI
UGIĘCIAMI BELEK OPARTYCH NA NIEPRZESUWNYCH PODPORACH

ZENON W A S Z C Z Y S Z Y N (KRAKÓW)

1. Wstęp

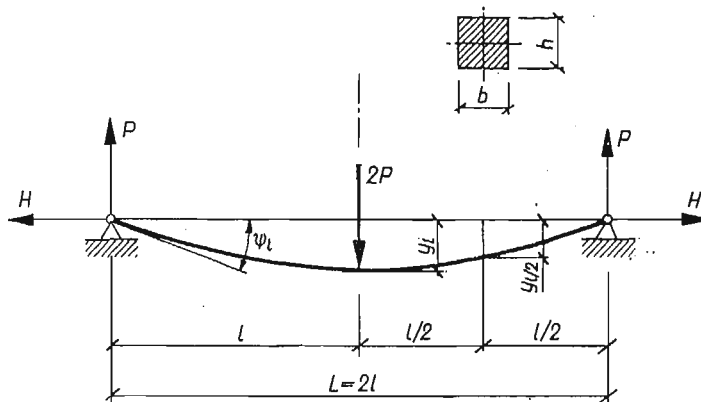
Obliczanie skończonych, sprężysto-plastycznych ugięć belek opartych na podporach ze skrepowaną przesuwnością napotyka znaczne trudności. W przypadku ciała idealnie sprężysto-plastycznego (model typu Prandtla) w belce powstaną obszary o różnym typie rozkładu naprężeń (rozkład sprężysty, jednostronne i dwustronne uplastycznienie), co pociąga za sobą konieczność rozwiązywania różnego typu równań. Otrzymane przez S. D. LEJTESA [3, 4] rozwiązania oparte na teorii małych ugięć czy też ściśle rozwiązania otrzymane przez autora i M. ŻYCZKOWSKIEGO [5], oparte na teorii ugięć skończonych belki o osi rozciągliwej, mają bardzo skomplikowaną postać, a «zszywanie» ich poprzez odpowiednie warunki brzegowe napotyka duże trudności. Stosowanie innych, bardziej skomplikowanych modeli o ciągłej charakterystyce $\sigma-\epsilon$ prowadzi do jeszcze bardziej skomplikowanych równań nieliniowych; jak dotąd, podano w literaturze rozwiązanie dla czystego zginania, lecz w naszym przypadku nie możemy pominąć wpływu siły podłużnej.

Wspomniane trudności «zszywania» poszczególnych obszarów ominięte zostały przez zastosowanie metody przybliżonej, mianowicie metody kolokacji (por. [7, 8]). Metoda ta polega na przyjęciu a priori postaci ugiętej osi belki jako funkcji z pewną liczbą wolnych parametrów wyznaczanych z odpowiednich warunków kolokacji. Otrzymano w ten sposób przybliżone rozwiązanie, którego poprawność — wobec braku ścisłego rozwiązania — sprawdzono w obecnej pracy na drodze doświadczalnej.

We wspomnianych pracach [7, 8] analizowano przypadek skrepowanego sprężystego podparcia, tj. przypadek, gdy reakcje belki są liniowymi funkcjami przemieszczeń podpór. Doświadczalnie zweryfikowano rozwiązanie przybliżone, otrzymane dla granicznego przypadku, gdy podpory są nieprzesuwne. Sprawdzono również dobrze znany z elementarnej teorii małych ugięć przypadek doskonale przesuwnych podpór. Otrzymana dobra zgodność dla obydwu granicznych przypadków, a w szczególności dla nieprzesuwne podparcia, pozwala wyciągnąć wniosek, że również dla pośrednich przypadków zgodność teorii z doświadczeniem będzie dobra. Taki wniosek ma duże znaczenie dla obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek, gdyż w rzeczywistości podpory będą wykazywały pewną skrepowaną przesuwność.

Doświadczenia wykonano na modelu belki o przekroju prostokątnym, wolno podpartej, wykonanej z miękkiej stali węglowej. Ze względu na łatwość realizacji obciążenia zbadano belkę obciążoną siłą skupioną ustawioną symetrycznie (rys. 1).

Model belki (w dalszym ciągu będziemy go nazywali beleczką) był badany w specjalnie skonstruowanym przyrządzie. Dla wykonania beleczek i przyrządu wykorzystano materiał i możliwości technologiczne laboratorium Katedry Statyki Budowli i Wytrzymałości Materiałów; w mniejszym stopniu korzystano również z pomocy



Rys. 1

innych Katedr Politechniki Krakowskiej. To samo dotyczy przyrządów pomiarowych takich jak siłomierze, czujniki, mostek tensometryczny. Jak już wspomnieliśmy, wykonane doświadczenia zostały potraktowane jedynie jako weryfikujące dociekania teoretyczne, dlatego też zbadano tylko krótkie serie beleczek (nie bez znaczenia był również fakt skromnych środków budżetowych).

Otrzymane wyniki należy więc traktować jako szacunkowe również ze względu na wpływ wielu parametrów nie dających się wyeliminować przy wykonywaniu doświadczeń. Z drugiej strony w rozważaniach teoretycznych nie ujęto wielu parametrów bądź w wyniku przyjętych założeń (np. wprowadzony model ciała idealnie sprężysto-plastycznego lub ze wzmocnieniem liniowym), bądź też z powodu trudności czysto rachunkowych (np. wpływ ociążenia). Otrzymane w tych warunkach niewielkie rozbieżności między wynikami doświadczeń a obliczeniami teoretycznymi dobrze świadczą zarówno o proponowanej metodzie, jak i dokładności wykonanych doświadczeń.

W obecnej pracy na początku podamy krótki szkic obliczenia ugięć belki opartej na nieprzesuwanych podporach, następnie szczegółowo opiszemy przeprowadzone doświadczenia oraz podamy porównanie i analizę wyników otrzymanych na podstawie przeprowadzonych doświadczeń i obliczeń teoretycznych.

2. Szkic obliczania ugięć sprężysto-plastycznych rozpatrywanej belki metodą kollokacji

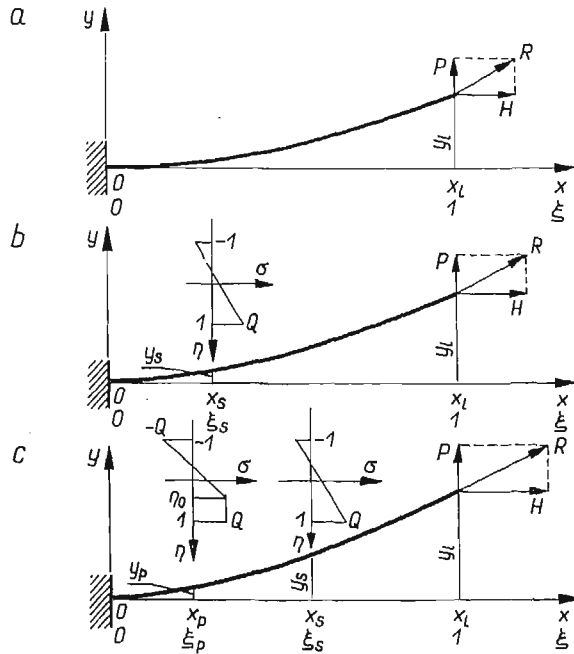
Zastosowanie metody kollokacji do obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek ze skrępowaną przesuwnością podpór zostało podane w pracach [7, 8]. Obecnie przypominamy w skrócie jedynie rozwiązanie dla belki opartej na nieprzesuwanych podporach i dodatkowo uwzględnimy w rozwiązaniu wstępny naciąg.

Wstępny naciąg H_w przykładaliśmy do belki w celu zlikwidowania luzów, a wobec nieobowiązywania zasady superpozycji musimy go uwzględnić w wyjściowym równaniu nieprzesuwności

$$(2.1) \quad \frac{x_l}{l} = 1 + \frac{H_w}{EF},$$

gdzie x_l jest współrzędną końca ugiętej belki.

W belce wykonanej z materiału idealnie sprężysto-plastycznego o jednakowej granicy plastyczności na ściskanie i rozciąganie $Q_r = |Q_c| = Q$ w miarę zwiększania obciążenia zewnętrznego obok obszaru sprężystego pojawi się kolejno obszar jednostronnego a następnie dwustronnego uplastycznienia. Na rysunku 2 pokazano połowę badanej belki, gdyż ze względu na symetrię zamiast belki wolnopodpartej z rys. 1 możemy rozpatrywać dwie belki wspornikowe.



Rys. 2

Przy uproszczeniu zagadnienia do zadania jednowymiarowego oraz wprowadzenia bezwymiarowej cechy identyczności ξ jako zmiennej niezależnej możemy współrzędne końców ugiętej belki zapisać w postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{x_l}{l} &= \int_0^{\xi_p} \frac{s'}{l} \cos \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} \frac{s'}{l} \cos \psi d\xi + \int_{\xi_s}^1 \frac{s'}{l} \cos \psi d\xi, \\ \frac{y_l}{l} &= \int_0^{\xi_p} \frac{s'}{l} \sin \psi d\xi + \int_{\xi_p}^{\xi_s} \frac{s'}{l} \sin \psi d\xi + \int_{\xi_s}^1 \frac{s'}{l} \sin \psi d\xi. \end{aligned}$$

Wartości pochodnych s' oraz krzywizn ψ' obowiązujących w poszczególnych obszarach (przy założeniu stałej siły podłużnej $N \equiv H$ na długości całej belki) przyjmują postać wyprowadzoną w pracy [5] (dotyczącej obliczania ugięć skończonych belek prostokątnych o rozciągliwej osi); otrzymaliśmy tam mianowicie

$$(2.3.1) \quad \begin{aligned} \frac{ds}{ld\xi} &\equiv \frac{s'}{l} = 1 + a^2 r, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &\equiv \psi' = \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} m, \end{aligned} \quad \xi_s \leq \xi \leq 1,$$

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} \frac{s'}{l} &= 1 + a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} \psi' - 2a \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\lambda} (1-r) \psi'} \\ \psi' &= \frac{2a^2 \lambda}{\sqrt{3}} \frac{(1-r)^3}{(3-3r-m)^2}, \end{aligned} \quad \xi_p \leq \xi \leq \xi_s$$

$$(2.3.3) \quad \begin{aligned} \frac{s'}{l} &= 1 + \frac{2\sqrt{3}}{\lambda} r \psi', \\ \psi' &= \frac{a^2 \lambda}{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3-3r^2-2m}}, \end{aligned} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_p,$$

gdzie wprowadzono bezwymiarowe oznaczenia

$$a^2 = \frac{Q}{E}, \quad \lambda = \frac{2l}{i}, \quad m = \frac{M}{QW}, \quad r = \frac{H}{QF}.$$

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, rozwiązanie ściśle jest bardzo skomplikowane i występuje zasadnicza trudność «zszycia» poszczególnych obszarów (wyznaczenia wartości ξ_p i ξ_s). Z tego powodu zastosowano metodę kolokacji.

Metoda kolokacji, zaproponowana przez R. A. FRAZERA, F. P. JONESA i S. W. SKAN [2] polega na przyjęciu jednej funkcji wspólnej dla całego obszaru. Funkcję przyjmuje się z pewną liczbą wolnych parametrów, które dobiera się tak, aby były spełnione warunki brzegowe i warunki kolokacji, tj. zgodności ze ściśłym rozwiązaniem funkcji lub jej pochodnych w pewnej liczbie punktów, czyli tzw. węzłach kolokacji; będzie to wtedy kolokacja wewnętrzna z pochodnymi (wg klasyfikacji podanej przez L. COLLATZA [1]).

W przypadku naszej belki spośród wielu możliwych funkcji wybrano funkcję wymierną—funkcję rozkładu kąta ugięcia

$$(2.4) \quad \psi = A\bar{\psi} \equiv A \frac{\xi + C\xi^2}{1 - B + B\xi},$$

która przy

$$(2.5) \quad C = -\frac{1-B}{2-B}$$

spełnia warunki brzegowe

$$(2.6.1) \quad \xi = 0, \quad \psi = 0.$$

$$(2.6.2) \quad \xi = 1, \quad \psi' = 0.$$

Dobór takiej funkcji umożliwi przy $B \rightarrow 0$ przejście do elementarnego rozwiązania znanego z wytrzymałości materiałów, natomiast przy $B \rightarrow 1$ przejście do ciągną.

Stałe A i B wyznaczymy z warunków kolokacji. Pierwszym warunkiem kolokacji będzie zgodność krzywizny przy utwierdzeniu wspornika z rys. 2 (dla $\xi = 0$) obliczonej wg ścisłych równań (2.3) z krzywizną obliczoną dla funkcji kolokowanej (2.4). Jako drugi warunek kolokacji przyjęto zgodność ψ'' na końcu belki (dla $\xi = 1$). Warunki te zapiszemy w skróconej postaci

$$(2.7.1) \quad \psi'_0 = A\bar{\psi}'_0,$$

$$(2.7.2) \quad \psi'_1 = A\bar{\psi}'_1.$$

Gdy zrezygnujemy ze spełnienia drugiego warunku kolokacji (ustalamy wartość stałej B), to będziemy mieli kolokację jednopunktową; kolokację nazwiemy dwupunktową, gdy spełnione są obydwa warunki (2.7).

Warunek (2.7.2.) będzie miał zawsze jednakową postać, gdyż w punkcie $\xi = 1$ zawsze będzie występował obszar sprężysty. Warunek ten można zapisać w następującej przybliżonej postaci

$$(2.8) \quad A\bar{\psi}''_1 \approx \frac{a^2\lambda^2}{4} (r \sin \psi_1 - p \cos \psi_1)$$

(będzie to wtedy warunek sumy rzutów sił na normalną do odkształconej osi przy podporze). Natomiast pierwszy warunek kolokacji (2.7.1) przyjmie różną postać zależnie od typu rozkładu naprężeń występujących w środku rozpiętości belki; np. dla dwustronnego uplastycznienia otrzymamy warunek w postaci

$$(2.9) \quad A\bar{\psi}'_0 = \frac{a^2\lambda}{2\sqrt{3}} \left[3 - 3r^2 - 3\lambda \left(p \frac{x_1}{l} - r \frac{y_1}{l} \right) \right]^{-1/2}.$$

Znaczne uproszczenie równań można otrzymać przez zachowanie tylko jednego, dominującego obszaru w równaniach (2.2). Ta uproszczona metoda podana w pracy [8], w przypadku wystąpienia np. dwustronnego uplastycznienia jako obszaru dominującego, prowadzi do następującego równania dla wyznaczenia stałej A_λ :

$$(2.10) \quad \frac{J_{2l}}{4\bar{\psi}_l} \left(\bar{\psi}_l - J_{1l} + \frac{J_{2l}}{4\bar{\psi}_l} \right) A_\lambda^4 - \frac{4\sqrt{3}}{a_\lambda^2} A_\lambda^3 + \left[\frac{\Delta}{2\bar{\psi}_l} \left(\bar{\psi}_l - J_{1l} + \frac{J_{2l}}{2\bar{\psi}_l} \right) - 3 \right] A_\lambda^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta^2}{\bar{\psi}_l^2} + \frac{a_\lambda^2}{3\bar{\psi}_0^2} \right) = 0,$$

gdzie

$$J_{jl} = \int_0^1 \bar{\psi}^j d\xi, \quad A_\lambda = A\lambda, \quad a_\lambda = a\lambda, \quad \Delta = \frac{H_w}{EF} \lambda^2.$$

$j = 1, 2$

Równanie (2.10) powstało na drodze eliminacji z układu trzech równań (2.1), (2.8) i (2.9).

Przy obliczeniach numerycznych zastosowano metodę odwrotną. Ustalano mianowicie wielkość stałej B i wyliczano $\bar{\psi}_1$, całki J_{11} , pochodne $\bar{\psi}'_0$, $\bar{\psi}''_1$ (w pracach [7, 8] podano tablicę tych funkcji obliczoną dla różnych wartości B). Przy ustalonym wstępnym naciągu Δ z równania (2.10) można wyliczyć wielkość stałej A_λ , następnie z równania nieprzesuwności (2.1) wielkość reakcji poziomej r

$$(2.11) \quad r = \frac{J_{21}}{4\sqrt{3}\bar{\psi}_1} A_\lambda + \frac{\Delta}{2\sqrt{3}\bar{\psi}_1 A_\lambda},$$

z drugiego warunku kolokacji (2.8) wielkość siły obciążającej p_λ

$$(2.12) \quad p_\lambda = \left(r\bar{\psi}_1 - \frac{4\bar{\psi}''_1}{a_\lambda^2} \right) A_\lambda,$$

a z równania (2.2)₂ przybliżoną wielkość strzałki ugięcia f :

$$(2.13) \quad \frac{y_1}{l} \lambda \equiv f_\lambda \approx J_{11} A_\lambda.$$

Możemy w ten sposób otrzymać poszczególne punkty wykresów odpowiadające ustalonym wartościom stałej B .

W przypadku granicznym, gdy $B = 1$, belka przechodzi w ciągnio (teoretyczne obciążenie, przy którym to nastąpi, nazwano w pracy [8] nośnością II). W tym przypadku równanie (2.10) można rozwinąć ze względu na A_λ ; otrzymamy

$$(2.14) \quad A_\lambda = 2 \sqrt{6 - \frac{\Delta}{2} + 6 \sqrt{1 - \frac{\Delta}{6}}}.$$

W pracy [8] rozpatrzono również inny przypadek graniczny, gdy wystąpi pełne uplastycznienie w środku rozpiętości. Przypadek ten (odpowiednie obciążenie nazwano w pracy [8] nośnością I) nie może być objęty funkcją kolokowaną (2.4.). Dla wyliczenia nośności I zastosowano metodę kolokacji jednopunktowej i przyjęto do obliczeń funkcję

$$(2.15) \quad \psi = A \left(\sqrt{\xi} - \frac{\xi^4}{8} \right).$$

Dla przypadku belki ze wstępnym naciągiem, opartej na nieprzesuwanych podporach, nośność I będzie wynosiła

$$(2.16) \quad p_\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 + 0,07256\Delta}{1 + 0,9796 \frac{\Delta^2}{a_\lambda^2}} \left[1 + \sqrt{\frac{0,009875a_\lambda^4 + 0,009673\Delta^2}{(1 + 0,07256\Delta^2)}} \right].$$

Dla wyznaczenia pozostałych wartości otrzymamy następujące równania: dla obliczenia stałej A_λ

$$(2.17) \quad A_\lambda = \frac{a_\lambda^2}{\sqrt{3\sqrt{3}p_\lambda}} = 0,4387 \frac{a_\lambda^2}{\sqrt{p_\lambda}},$$

reakcji poziomej

$$(2.18) \quad r = \frac{413}{3168\sqrt{3}} A_\lambda + \frac{4\Delta}{7\sqrt{3} A_\lambda} = 0,07527 A_\lambda + 0,3299 \frac{\Delta}{A_\lambda}$$

oraz maksymalnego ugięcia

$$(2.19) \quad f_\lambda = \frac{77}{120} A_\lambda = 0,6417 A_\lambda.$$

Metoda kolokacji dwupunktowej pozwala również uwzględnić wzmocnienie materiału. W przypadku wystąpienia obszaru dwustronnego uplastycznienia jako obszaru dominującego oraz przyjęcia jednorodnego wzmocnienia liniowego otrzymamy następujący schemat metody odwrotnej

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dane} \quad \underbrace{a^2 = \frac{Q}{E}, \quad \alpha = \frac{E}{E_1}, \quad F = bh, \quad \lambda = 4\sqrt{3} \frac{l}{h}, \quad H_w}_{\downarrow} \\ \quad \quad \quad a_\lambda = a\lambda, \quad \Delta = \frac{H_w}{EF} \lambda^2 \\ \text{ustalamy } B \rightarrow J_{11}, J_{21}, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}'_0, \bar{\psi}'_1 \\ \text{przyjmujemy } A_\lambda \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{J_{21} A_\lambda^2}{2a_\lambda^2 I_1} + \frac{\Delta}{a_\lambda^2 I_1} \\ p = \left(r \bar{\psi}_1 - \frac{4\bar{\psi}'_1}{a_\lambda^2} \right) A_\lambda \end{array} \right\} \rightarrow d_0 = r \frac{k_0}{1 - \alpha + \alpha k_0} \\ k_0 = \frac{2\sqrt{3}}{a_\lambda^2} \bar{\psi}'_0 A_\lambda \\ f_\lambda = J_{11} A_\lambda \end{array} \right. \\ \text{sprawdzamy czy jest spełnione równanie} \\ (1 - \alpha) \left(3 - \frac{1 + 3d_0^2}{k_0^2} \right) + 2\alpha k_0 = \sqrt{3} (p_\lambda - f_\lambda r), \end{array} \right.$$

gdzie

$$I_1 = \frac{2\sqrt{3}}{a_\lambda^2} A_\lambda \int_0^1 \frac{\bar{\psi}'}{1 - \alpha + \frac{2\sqrt{3}}{a_\lambda^2} \alpha A_\lambda \bar{\psi}'} d\xi;$$

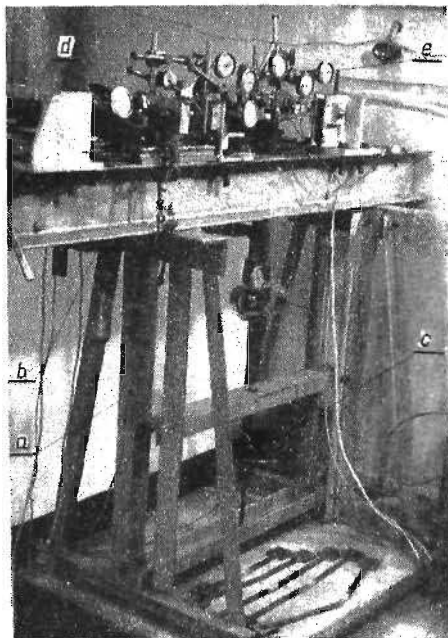
wartości pozostałych całek J_{11} , J_{21} , pochodnych $\bar{\psi}'_0$, $\bar{\psi}'_1$, w przypadku funkcji wymiernej (2.4) zostały zestawione w tablicy podanej w [7] lub [8].

3. Opis przyrządu i beleczek

3.1. Przyrząd. Przyrządem nazwaliśmy całość urządzenia, w którym umieszczano badany model (beleczkę), realizowano obciążenie oraz dokonywano pomiaru interesujących nas wartości (wielkości siły obciążającej, reakcji poziomej i przemieszczeń) przy zapewnieniu nieprzesuwności podpór.

Spełnienie tego ostatniego warunku okazało się najtrudniejsze. Problem rozwiązano w ten sposób, że przy niewielkim wzroście obciążenia najpierw zezwolono na przesuw jednej z podpór (w dalszym ciągu będziemy ją nazywali podporą ruchomą), a następnie przez powiększanie siły poziomej (siły napinającej) likwidowano ten przesuw. Dzięki małemu skokowi siły obciążającej wyniki otrzymane drogą takiej superpozycji są bardzo zbliżone do rzeczywistych, odpowiadających z góry założonym podporom doskonale nieprzesuwnym.

Cały przyrząd, pokazany na rys. 3, składa się z pięciu zasadniczych części, mianowicie: a) stojaka, b) podstawy, c) urządzenia obciążającego, d) urządzenia napinającego, e) przyrządów pomiarowych.



Rys. 3

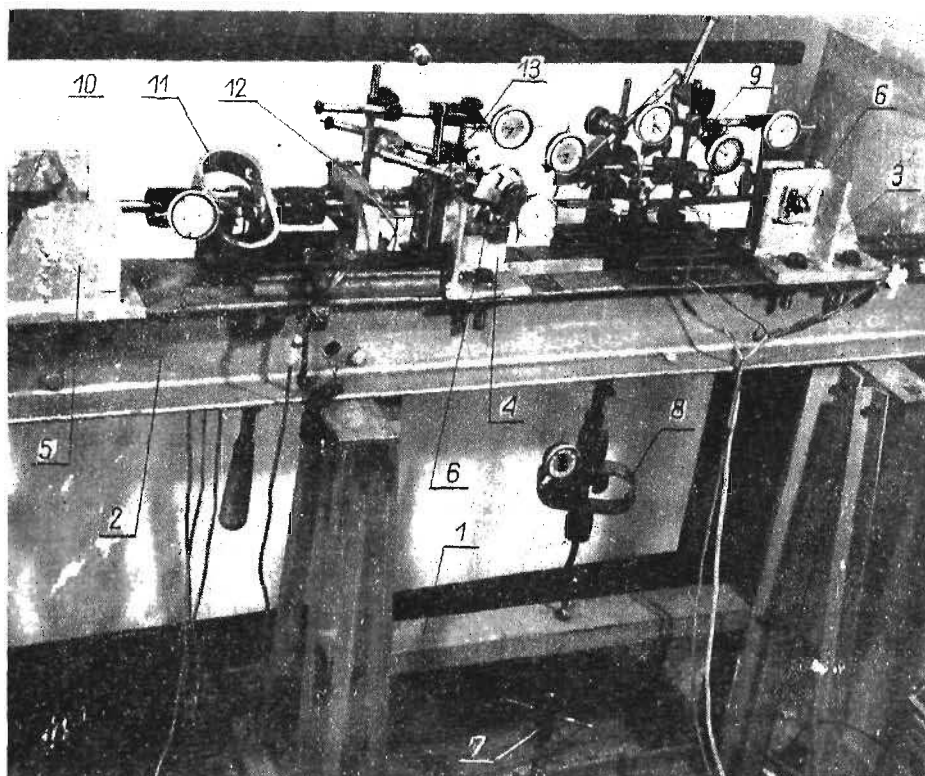
Teraz podamy krótki opis każdej części, zwracając przy tym uwagę na rozwiązania wynikające ze specyfiki badanego modelu.

a) *Stojak* został zbudowany ze stalowych kształtowników połączonych ze sobą śrubami, przy czym w podłużnicach 1 wykonano otwory (por. rys. 4) dla umieszczenia urządzenia napinającego.

b) *Podstawa* stanowi zasadniczą część przyrządu. Składa się ona z podłużnicy głównej 2, do której przyśrubowano wsporniki podporowe 3 i 4 oraz wspornik oporowy 5.

W podłużnicy głównej (skręcone na stałe][140) wywiercono otwory do przykręcania wsporników. Dzięki stałemu rozstawowi otworów, równemu 100 mm, można było przesuwać wspornik 3 i badać beleczki o różnej rozpiętości (od 300 do 700 mm).

Wsporniki zostały wykonane jako sztywne, spawane konstrukcje. We wsporniku 3 wywiercono poziomy otwór $\varnothing 20$ w którym umieszczono sworznię podporową 6, przy czym dano dodatkowe blaszki oporowe (widoczne na rys. 4) uniemożliwiające obrót sworzni. Wspornik 4 spełniał rolę podstawy dla podpory przesuwnej, dlatego też w jego górnej części skonstruowano prowadnice (gładkie powierzchnie z bocz-



Rys. 4

nymi oporami) umożliwiające przesuw sworzni podporowego. We wsporniku 4 oraz we wsporniku oporowym 5 zrobiono podłużne otwory dla założenia urządzenia napinającego.

c) *Urządzenie obciążające* pozwoliło, dzięki dokręcaniu śruby rzymskiej 7, na realizację obciążenia siłą skupioną. Siła obciążająca była przekazywana poprzez siłomierz 8 oraz sworznię 9 opartą na badanej beleczce.

d) *Urządzenie napinające* zostało skonstruowane podobnie jak urządzenie obciążające. Dzięki dokręcaniu klucza napinającego 10, poprzez siłomierz 11, płytkę łączącą 12 oraz śruby specjalne 13, można było realizować potrzebną siłę rozciągającą i przekazywać ją na beleczkę. Kwadratowe przekroje śrub specjalnych oraz końcówek siłomierza, wchodzące w otwory podłużne wsporników, zapobiegały przy tym skręcaniu się całego urządzenia.

e) *Przyrządy pomiarowe.* Przyrządy pomiarowe użyte przy badaniach, to wspomniane już wcześniej siłomierze 8 i 11, czujniki mechaniczne oraz urządzenie tensometryczne.

Do badań użyto siłomierzy pałkowych Typ WK 19/0,5 i Typ WK 19/1. Pierwszy z wymienionych, użyty w urządzeniu obciążającym, można obciążać maksymalną siłą równą 500 kG; drugi siłomierz, zastosowany w urządzeniu napinającym, pozwolił na odczytywanie sił do 1500 kG. Wielkość przykładanej siły można wyliczyć z ugięcia się pałków, odczytanego na dołączonych czujnikach 10μ . W przyrządzie zastosowano te siłomierze ze względu na szereg zalet, takich jak duża czułość (błędy rzędu $\pm 0,3\%$), mała odkształcalność, niewielkie wymiary i mały ciężar.

Do mierzenia przemieszczeń użyto czujników mechanicznych. Wielkość przesuwu podpór mierzono czujnikami niemieckimi Keilport Suhl o czułości równej $1/1000 \text{ mm} = 1\mu$ (w dalszym ciągu będziemy je nazywali czujnikami 1μ), natomiast ugięcia i kąty obrotu przekrojów przypodporowych zmierzono czujnikami polskimi MNZa—A o czułości $1/100 \text{ mm} = 10\mu$. Czujniki rozmieszczono w punktach widocznych na rys. 4, a mianowicie: czujniki 1μ umieszczono poziomo, tak aby ich końcówki dotykały gładkich powierzchni końcówek sworzni podporowych 6, natomiast rozmieszczenie czujników 10μ pozwalało na zmierzenie ugięcia w środku i $1/4$ rozpiętości beleczki oraz dzięki dodatkowym wskazówkom przymocowanym do beleczki umożliwiało zmierzenie kątów obrotu przekrojów przypodporowych.

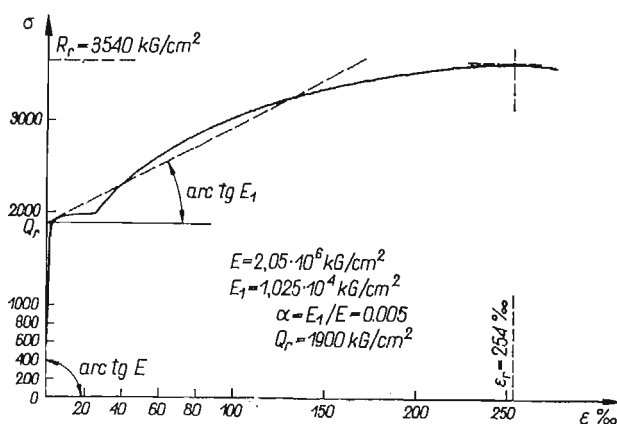
Dla dodatkowego sprawdzenia wielkości realizowanego naciągu i osiowości przekazywanej siły, na śrubach specjalnych 13 naklejono tensometry oporowe typu K/10 o bazie równej 10 mm. Taki sam tensometr naklejony na spodzie beleczki pozwalał zmierzyć wydłużenia dolnych włókien (do 14%) pod siłą skupioną. Odczyty zmian oporności tensometrów były prowadzone na mostku tensometrycznym CWU «Libella» Typ SDT-1.

3.2. Beleczki. Badania przeprowadzono na trzech typach beleczek o tym samym przekroju kwadratowym $10 \times 10 \text{ mm}$ (dokładne wymiary podano w tablicy 1) i długościach 300, 400 i 500 mm.

Beleczki były wycinane z płaskownika $\square 60 \times 10$, wykonanego ze stali X. W trakcie wstępnego badania wytrzymałościowego okazało się, że stal ma dosyć wysoką granicę plastyczności ($Q_r \approx 2500 \text{ kG/cm}^2$), toteż poddano ją wyżarzaniu. Mianowicie pocięty na odpowiednie kawałki płaskownik poddano przez 20 min. działaniu temperatury 500°C , a następnie pozostawiono go przez 24 godziny w celu ostygnięcia razem z piecem. Dzięki temu otrzymano znaczne obniżenie granicy plastyczności i wydłużenie się platformy plastycznej.

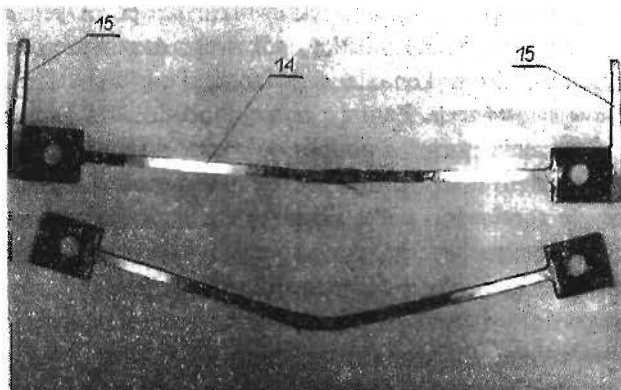
Na rysunku 5 podano uśredniony wynik próby rozciągania próbek o przekroju $18 \times 10 \text{ mm}$ wyciętych z tych samych kawałków płaskownika, z których zrobiono następnie beleczki. Próby rozciągania wykonano na maszynie wytrzymałościowej WPM (produkcji NRD), przy czym wydłużenie zbadano przystosowanymi czujnikami typu Somet (czeskosłowackie). Uśredniony wykres $\sigma - \epsilon$ naniesiony na rys. 5 aproksymowano, dla wykonania przeliczeń, dwiema liniami prostymi. Do obliczeń przyjęto moduł Younga $E = 2,05 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$, granicę plastyczności $Q_r = 1900 \text{ kG/cm}^2$ oraz współczynnik wzmocnienia $\alpha = E_1/E = 0,005$.

Kształt beleczki 14 widoczny jest na rys. 6 (pokazano beleczki o długości 500 mm już po wykonaniu badań). Właściwy przekrój jest utrzymany na części środkowej, natomiast rozszerzenia na końcach umożliwiły wykonanie otworów $\varnothing 20$ dla umieszczenia sworzni podporowych. Część środkowa została wycięta z płaskownika frezem tarczowym i następnie była oszlifowana. Taki sposób obróbki rzutował



Rys. 5

na przyjęcie minimalnego przekroju beleczek wynoszącego 10×10 mm ze względu na ich wiotkość (szczególnie przy długości 500 mm) przy frezowaniu. Otwory dla sworzni zostały wykonane z pasowaniem obrotowym (pasowanie $\varnothing 20$ H7/f6). Przy trasowaniu środek otworów umieszczano na osi podłużnej beleczki w rozstawie



Rys. 6

2l odpowiadającym żądanej rozpiętości, symetrycznie względem środka (przewidywanego punktu przyłożenia siły obciążającej).

Do obydwu końców beleczki przykręcano wskazówki 15 dla zmierzenia kąta ugięcia przekrojów przypodporowych. Długość wskazówki mierzona między środkiem otworu $\varnothing 20$ i punktem przyłożenia końcówki czujnika wynosiła 100 mm.

4. Opis przeprowadzonych doświadczeń

4.1. Przygotowanie beleczek i przyrządu do badań. Zanim przystąpiono do wykonania doświadczenia należało każdorazowo przygotować zarówno model, jak też przyrząd do badań.

Do beleczki przeznaczonej do badania przykręcano wskazówki, jak pokazano na rys. 6. Następnie trasowano beleczkę przez narysowanie poprzecznych kresiek dzielących rozpiętość $L = 2l$ (odmierzaną między środkami otworów $\varnothing 20$) na cztery równe odcinki. W środku rozpiętości po stronie włókien dolnych (w dalszym ciągu górnymi włóknami będziemy nazywali włókna po stronie wskazówek) naklejano tensometr oporowy.

W przyrządzie, w zależności od rozpiętości beleczki, przesuwano wspornik podporowy 4. Przed założeniem beleczki wszystkie powierzchnie elementów ruchowych (sworzni podporowy, otwory i prowadnicę) nacierano dwusiarczkiem molibdenu (MoS_2), a po zmontowaniu posmarowano niewielką ilością oleju. Dzięki temu można było znacznie zmniejszyć tarcie.

Po założeniu beleczki i zmontowaniu urządzenia napinającego przesuwano całą podstawę tak, aby środek beleczki znalazł się pionowo nad środkiem otworu w podłużnicy 1. Dzięki temu można było zmontować urządzenie obciążające we właściwym położeniu.

Na koniec za pomocą typowych wsporników, przykręconych do podłużnicy głównej, umieszczano czujniki w punktach widocznych na rys. 4. Czujniki 10μ mierzące ugięcia w $1/4 L$ umieszczano nad kreskami zrobionymi na beleczce, natomiast czujnik mierzący ugięcie w środku rozpiętości umieszczano tak, aby jego końcówka dotykała gładkiej powierzchni, zrobionej w górnej części sworzni 9. Czujniki 1μ mierzące poziome przesunięcia podpór umieszczono tak, aby końcówki czujników dotykały powierzchni końcówek sworzni podporowych 6.

Po podłączeniu tensometrów do mostka oporowego oraz wyzerowaniu czujników można było przystąpić do wykonania doświadczenia.

4.2. Przeprowadzenie doświadczenia. Zanim przystąpiono do właściwego doświadczenia zmierzono przemieszczenia poziome podpór. W tym celu po kilkakrotnym napięciu siłą ok. 1000 kG (usunięto w ten sposób drobne nierówności powierzchni otworów i sworzni) ponownie rozciągano belkę urządzeniem napinającym, zapisując kolejno przemieszczenia podpór: ruchomej i nieruchomej. Postępowano tak aż do osiągnięcia maksymalnej, możliwej do zrealizowania siły napinającej równej 1500 kG. Po odjęciu łatwego do wyliczenia wydłużenia sprężystego beleczki i kilkakrotnym (3-krotnym) powtórzeniu obciążenia otrzymano tabelę poprawek, które należało uwzględnić przy właściwym doświadczeniu. Poprawki te pozwoliły uwzględnić przemieszczenia podpór spowodowane odkształceniami zarówno otworów i sworzni (np. w wyniku działania naprężeń stykowych), zginaniem wsporników, jak i innymi wpływami, których nie można było ująć obliczeniowo. Wielkość otrzymanych poprawek przy sile napinającej równej 1500 kG wynosiła średnio 120μ dla podpory nieruchomej i 300μ dla podpory ruchomej. Poprawki obliczano osobno dla każdej z badanych beleczek, gdyż nawet niewielkie odchyłki, nieuniknione ze względów technologicznych, znacznie zmieniały podane wyżej wielkości przesuwów.

Po takim przygotowaniu można było wykonać właściwe doświadczenie. Aby uniknąć zniekształcenia odczytów przy małych siłach obciążających, powstałych na skutek istnienia luzów oraz opadania urządzenia napinającego, przykładano do beleczki niewielki wstępny naciąg (40–120 kG) przez dokręcanie klucza napinającego 10. Następnie dzięki dokręcaniu śruby rzymskiej 7 realizowano siłę skupioną, przy czym drobnozwojowy gwint pozwalał na dokładne dozowanie siły; w naszym przypadku przyjęto skok siły równy 20–25 kG.

Przyjęto następującą kolejność działania. Przez dokręcenie śruby rzymskiej zwiększono obciążenie o 18–20 kG. Towarzyszyło temu, obok ugięcia się belki, również pewne przesunięcie się podpór ku środkowi belki (przesunięcie takie będziemy nazywali ujemnym). Następnie poprzez dokręcenie klucza napinającego zwiększono siłę poziomą aż do otrzymania przesunięcia dodatniego podpory ruchomej o wielkość zgodną z tabelą poprawek. Okazało się przy tym, że kluczem napinającym nie można było z potrzebną dokładnością wywołać przesunięcia, dlatego też dodatkowo dokręcano nakrętki przy płycie łączącej 12. Oczywiście, takiemu dodatniemu przesunięciu będzie towarzyszył wzrost reakcji poziomej zmniejszający ugięcia, a więc wskutek zastosowanego urządzenia obciążającego zwiększający siłę skupioną (z tego powodu zwiększono siłę o 18–20 kG, a więc nieco mniej od przyjętego średniego skoku, równego 22 kG). Po odczytaniu wskazań czujników i mostka tensometrycznego można było przystąpić do kolejnego zwiększania siły skupionej.

Wymienione czynności od chwili pojawienia się odkształceń plastycznych powinny być wykonywane w bardzo krótkim czasie, toteż starano się, aby je prowadziły co najmniej dwie osoby. Płynięcie materiału nie pozwoliło na dokładną realizację skoku 22 kG w obciążeniu; w tablicy 1 podającej wyniki pomiarów skok ten jest różny i odpowiada wzrostowi obciążenia po wykonaniu przesuwu zgodnego z tabelą poprawek (odczytu na siłomierzu 8 dokonywano na końcu).

Realizacja obciążenia poprzez śrubę rzymską okazała się bardzo wygodna, gdyż obciążenie bezpośrednie np. przez wieszanie odważników, wobec konieczności przykładania sił rzędu 200 kG, okazuje się w praktyce bardzo uciążliwe i trudne do zrealizowania pod względem technicznym. Natomiast obciążenie bezpośrednie (siła rzędu 70 kG) zastosowano przy badaniu ugięcia belki opartej na podporach przesuwnych.

Podana przez nas konstrukcja przyrządu, badanych beleczek oraz podany sposób postępowania pozwoliły zbadać model belki na podporach nieprzesuwnych lub też z jedną podporą przesuwą. W przypadku podpór nieprzesuwnych mogliśmy zwiększać obciążenie do takiej wielkości, aby reakcja pozioma (siła napinająca) nie przekroczyła 1500 kG (dokładniej 1550 kG) odpowiadającej zakresowi siłomierza 11.

Tensometr⁷oporowy naklejony w środku rozpiętości beleczki pozwolił zmierzyć maksymalne⁷odkształcenie włókien (do 14‰), a dzięki wykresowi $\sigma-\epsilon$ podanemu na rys. 5 można było się zorientować w wielkości występujących naprężeń.

Do wymienionego sposobu postępowania doszliśmy poprzez zbadanie trzech próbnych beleczek o różnych długościach. Mogliśmy dzięki temu prowadzić również pewne drobne poprawki konstrukcyjne w samym przyrządzie.

Tablica 1

Typ I

$2l = 300 \text{ mm}; h = 10,2 \text{ mm}; b = 9,5 \text{ mm};$
 $F = 0,96 \text{ cm}^2; \lambda = 102; a_\lambda = 3,105.$

P w kG	\hat{H} w kG		$\hat{y}_l \times 10^2$ w mm		$\hat{y}_{l/2} \times 10^2$ w mm		$\hat{\psi}_l \times 10^4$	
0 0	40	40	0	0	0	0	0	0
12 11	120	65	67	62	58	43	72	61
21 22	203	133	132	130	108	90	153	129
33 30	382	336	236	208	145	139	206	201
44 45	695	680	324	481	188	272	265	388
53 55	827	945	419	562	234	306	312	427
66 66	1035	1120	463	636	252	388	337	469
76 77	1140	1270	548	705	295	369	391	512
90 88	1350	1380	647	755	334	388	443	532
99 99	1410	1440	676	802	347	411	457	557
108 108	1510	1550	743	864	336	443	475	594

Typ II

$2l = 400 \text{ mm}, h = 10,2 \text{ mm}, b = 9,5 \text{ mm}$
 $F = 0,96 \text{ cm}^2, \lambda = 136, a_\lambda = 4,140$

P w kG	\hat{H} w kG		$\hat{y}_l \times 10^2$ w mm		$\hat{y}_{l/2} \times 10^2$ w mm		$\hat{\psi}_l \times 10^4$	
0 0	80	80	0	0	0	0	0	0
10 11	170	134	126	158	85	104	93	117
23 21	515	382	248	284	167	198	194	214
33 33	762	570	353	497	212	292	226	330
45 43	1080	840	513	607	297	335	338	374
55 56	1200	990	591	718	332	382	370	424
66 66	1300	1130	685	794	375	416	415	455
78 77	1410	1230	789	908	426	455	466	499
88 87	1480	1390	865	955	461	478	501	511
98 99	1540	1460	962	1050	503	516	544	558

Typ III

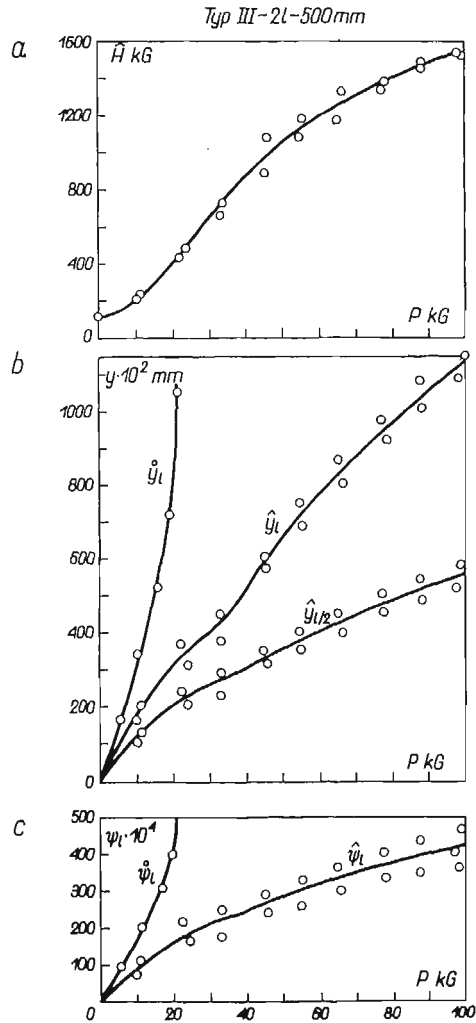
$2l = 500 \text{ mm}, h = 10,2 \text{ mm}, b = 9,8 \text{ mm}$
 $F = 1,00 \text{ cm}^2, \lambda = 170, a_\lambda = 5,175$

P w kG	\hat{H} w kG		$\hat{y}_l \times 10^2$ w mm		$\hat{y}_{l/2} \times 10^2$ w mm		$\hat{\psi}_l \times 10^4$	
0 0	120	120	0	0	0	0	0	0
11 10	227	203	202	161	135	103	113	78
22 24	438	485	371	314	246	203	215	168
33 33	665	730	457	378	292	230	251	179
45 46	860	1080	610	581	356	320	296	246
55 55	1080	1180	752	692	413	355	330	261
65 66	1180	1330	867	804	453	408	363	299
77 78	1340	1390	978	927	504	458	405	337
88 88	1460	1490	1086	1012	549	485	434	344
99 98	1530	1540	1178	1097	589	522	462	366

5. Wyniki doświadczeń

Zbadano trzy typy beleczek różniące się między sobą tylko długością (dokładną charakterystykę ponad w tablicy 1). W ramach każdego z typów zbadano dwie beleczki z nieprzesuwnymi podporami i jedną opartą na przesuwanych podporach.

W tablicy 1 zebrano wyniki doświadczeń dla belki z nieprzesuwnymi podporami¹. Podano tam wielkości sił i przemieszczeń zaznaczonych na rys. 1 (np. w typie I przy sile obciążającej $P = 22$ kG otrzymano dla drugiej próbki $\hat{H} = 133$ kG, $\hat{y}_l = 1,30$ mm, $\hat{y}_{l/2} = 0,90$ mm, $\hat{\psi}_l = 0,0129$).



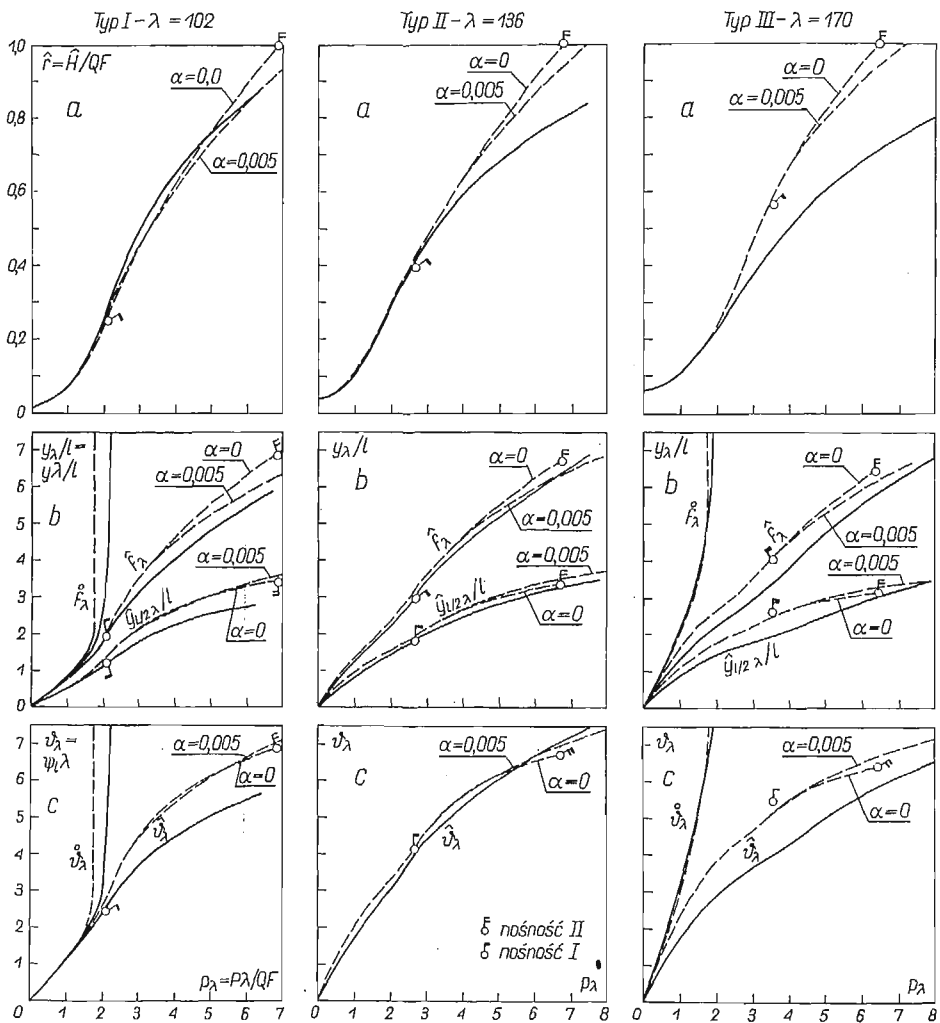
Rys. 7

¹ Nad wartościami odnoszącymi się do podpór nieprzesuwnych dano ibdeks $\hat{\ };$ przy przesuwanych podporach dano indeks o .

Otrzymane i zestawione w tablicy 1 wielkości nanoszono punktami na wykresach, a następnie wykreślano uśrednione krzywe doświadczalnie. Na rys. 7 pokazano przykładowo krzywe dla najdłuższej beleczki typu III. Dla porównania powyżej krzywych $\hat{y}_i(P)$ i $\hat{\psi}_i(P)$ naniesiono krzywe $\check{y}_i(P)$ i $\check{\psi}_i(P)$ odpowiadające podporom przesuwnym.

6. Analiza otrzymanych wyników

6.1. Porównanie wyników doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi. Podane w punkcie 2 teoretyczne rozwiązanie dla belki ze wstępnym naciągiem pozwala sporządzić wykresy interesujących nas funkcji. Odpowiednie krzywe, które dalej będziemy nazywali seoretycznymi, porównano z uśrednionymi krzywymi doświadczalnymi. Na rysunku 8 pokazano linią ciągłą krzywe doświadczalne w bezwymiarowym układzie



Rys. 8

współrzędnych, natomiast krzywe teoretyczne zaznaczono linią przerywaną. Przy tych ostatnich przez $\alpha = 0$ oznaczono krzywe otrzymane przy braku wzmocnienia, a więc dla modelu ciała idealnie plastycznego, natomiast $\alpha = 0,005$ odpowiada założeniu wzmocnienia liniowego o takim właśnie współczynniku wzmocnienia $\alpha = E_1/E = 0,005$ przyjętym na podstawie próby rozciągania materiału beleczek (rys. 5). Przy sporządzaniu wykresów jako zmienną niezależną przyjęto każdorazowo obciążenie zewnętrzne $p = P/QF$.

Krzywe teoretyczne sporządzono na podstawie rozwiązania podanego w poprzednim punkcie, przy czym poszczególne punkty wykresu naniesiono dzięki metodzie odwrotnej przy założeniu funkcji kollokowanej (2.4).

Przechodząc do bardziej szczegółowej dyskusji otrzymanych wyników należy zwrócić uwagę na rozbieżności natury jakościowej i ilościowej.

Pod pierwszym względem, jakościowym, na podstawie wykresów podanych na rys. 8 możemy stwierdzić, że krzywe doświadczalne i krzywe teoretyczne mają jednakowy charakter. I tak, w przypadku przebiegu reakcji r pokazanej na rys. 8 występuje początkowo silny przyrost reakcji (krzywa zbliża się do paraboli drugiego stopnia), po czym następuje zmniejszenie pochodnej; charakter ten jest zachowany zarówno dla krzywych $\alpha = 0$, jak i $\alpha = 0,005$. Podobnie w przypadku przemieszczeń, zarówno przy ugięciach, jak i kątach ugięć, krzywe mają jednakowy kształt, przy czym lepsza zgodność występuje dla $\alpha = 0,005$. Charakterystyczne przy tym jest «wglębień» związane z szybkim przyrostem odkształceń plastycznych.

Pod względem ilościowym charakterystyczna jest dobra zgodność przemieszczeń (zwłaszcza dla typu II) i coraz większa rozbieżność w reakcjach (szczególnie dla typu III). Uwzględnienie wzmocnienia zmniejsza różnice, przy czym obszar wyraźnego wpływu wzmocnienia jest coraz większy w miarę skracania się belek. Maksymalna różnica (reakcja \hat{r} i kąt ugięcia $\hat{\psi}_\lambda$ dla typu III) wynosi ok. 30%, z tym że średnie różnice wynoszą ok. 10%.

Przy typach I i III pokazano również krzywe dla belek opartych na podporach przesuwnych; pokazano mianowicie ugięcie, strzałkę ugięcia f_λ i maksymalny kąt ugięcia $\hat{\psi}_\lambda = \hat{\psi}_1 \lambda$. Z porównania wynika, że w typie I zaznacza się silniej wpływ wzmocnienia (krzywe teoretyczne obliczone wg teorii małych ugięć dla $\alpha = 0$). Jak było do przewidzenia, występuje duża różnica między ugięciami beleczek z podporami przesuwными i beleczek opartych na nieprzesuwnych podporach; przy beleczkach bardziej smukłych (typ III) wyraźne różnice występują nawet przy niewielkich siłach.

Na rysunku 8 zaznaczono punktami również wielkości odpowiadające nośności I obliczonej przy założeniu funkcji kolokowanej (2.15). Odpowiednie punkty tylko nieznacznie odbiegają od krzywych teoretycznych obliczonych dla funkcji kolokowanej (2.4) i występują zawsze w pobliżu «wglębień», a więc punktów krzywych, w których zaczynają szybko przyrastać przemieszczenia.

6.2. Przyczyny powstałych rozbieżności. Źródła powstałych rozbieżności należy szukać zarówno w rozwiązaniu teoretycznym, jak i w przeprowadzonym doświadczeniu.

Przy opracowaniu części teoretycznej z konieczności musieliśmy oprzeć się na pewnych założeniach i niektóre z nich mogą wywołać dość duże błędy w porówna-

niu z rzeczywistością. Do takich założeń należą: przyjęcie materiału idealnie sprężysto-plastycznego lub o wzmocnieniu liniowym, pominięcie wpływu sił poprzecznych i rozpatrywanie jednoosiowego stanu naprężenia oraz nieuwzględnienie wpływu odciążenia poszczególnych przekrojów belki.

Przyjęcie modelu ciała ze wzmocnieniem liniowym lepiej przybliży rzeczywisty wykres $\sigma-\varepsilon$ niż model ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Jednak przy większych odkształceniach we włóknach skrajnych mogą powstać większe naprężenia niż obliczone przy założeniu wzmocnienia liniowego, co będzie miało pewien wpływ zarówno na wielkość momentu gnącego, jak i siły podłużnej w niektórych przekrojach belki.

Również przyjęcie jednoosiowego stanu naprężenia poprzez pominięcie wpływu naprężeń stycznych od sił poprzecznych i naprężeń stykowych od sił skupionych wywoła dodatkowe błędy, większe po pojawieniu się odkształceń plastycznych (wskutek zmniejszenia naprężeń gnących poprzez warunek plastyczności).

Dodatkowe błędy może wywołać stosowanie uproszczonej metody kolokacji. Szczególnie ważny problem doboru funkcji kolokowanej został dość pomyślnie rozwiązany, jak o tym świadczy podobieństwo krzywych teoretycznych i doświadczalnych.

Uproszczenie polegające na przyjęciu równań linii ugięcia obszaru dominującego jako obowiązujących w całej belce jak również pominięcie wpływu odciążenia może mieć także pewien wpływ przede wszystkim na stwierdzone rozbieżności ilościowe.

Przy wykonywaniu doświadczeń nastąpiły też pewne odstępstwa od modelu belki z rys. 1. Wiąże się to zarówno z konstrukcją badanych beleczek i przyrządu, jak i z samym sposobem przeprowadzania doświadczeń.

Badana beleczka (pokazana na rys. 5) ze względów konstrukcyjnych i wytrzymałościowych została poszerzona na końcach, wskutek czego nie został zachowany stały przekrój na całej długości. Rozszerzenie to ma wpływ na wydłużalność osi belki, a więc przede wszystkim na siły podłużne (reakcje poziome). Znaczne naprężenia stykowe zmusiły nas do zastosowania dość dużych średnic sworzni podporowych, co także może w pewnym stopniu zniekształcać wyniki.

Przy konstruowaniu przyrządu starano się zmniejszyć do minimum tarcie przez stosowanie gładkich powierzchni i zastosowanie dwusiarczku molibdenu. Pewne tarcie będzie jednak występowało i to zarówno między sworzniami i otworami, jak i między śrubami specjalnymi i otworami podłużnymi we wsporniku 4. To ostatnie będzie miało pewien wpływ na odczytywaną wielkość reakcji poziomej.

Niewielkie nierówności otworów w beleczce likwidowaliśmy przez przyłożenie dużej siły osiowej przed właściwym doświadczeniem. W rzeczywistości wobec uniemożliwienia obrotów sworzni, z chwilą wystąpienia ugięcia, w otworach występowały nierówności w innych miejscach.

W czasie przeprowadzenia doświadczeń zwiększaliśmy początkowo siłę obciążającą, a potem siłę poziomą. Pomimo stosowania niedużych przyrostów sił postępowanie takie, wobec nieobowiązywania zasady superpozycji, mogło wywołać dodatkowe błędy.

Również efekty reologiczne występujące w materiale pomimo dość szybkiego odczytywania wyników mogły mieć dodatkowy wpływ na powstałe rozbieżności.

Wiele z wymienionych niekorzystnych parametrów dałoby się wyeliminować lub można by jaśniej przedstawić ich wpływ, gdyby wykonano doświadczenia na większych seriach w ramach przyjętych typów beleczek. Jednak, zgodnie z założeniami wymienionymi na wstępie, naszym celem była jedynie weryfikacja doświadczalna otrzymanych teoretycznych rozwiązań. Przyjęcie zaledwie dwóch beleczek w ramach każdego z typów mogło pozwolić tylko na pewne przybliżenie właściwych krzywych doświadczalnych.

7. Zakończenie

Podsumowując otrzymane wyniki można stwierdzić, że:

1) metoda kollokacji daje dobre wyniki (średnie różnice między wielkościami teoretycznymi i doświadczalnymi wynoszą ok. 10%);

2) przyjęty model ciała idealnie sprężysto-plastycznego daje dobre przybliżenie rzeczywistości nawet przy bardzo dużych odkształceniach; wpływ wzmocnienia zaznacza się silniej przy belkach krępych niż smukłych;

3) wpływ nieprzesuwności (a więc i skrępowanej przesuwności) zaznacza się silniej w belkach smukłych niż krępych.

Zweryfikowaliśmy przypadek, w którym skrępowana przesuwność zaznacza się najsilniej (nieprzesuwne przegubowe podpory i obciążenie symetrycznie ustawioną siłą skupioną), w dodatku przypadek szczególnie, gdy podparcia są przyłożone na wysokości osi belki.

Ten ostatni problem może mieć duże znaczenie ze względu na możliwość pojawienia się nowych zjawisk (np. przy podparciu poniżej osi reakcja pozioma może zmieniać znak i pojawi się statecznościowy problem «przeskoku»). Niestety w tym ostatnim przypadku brak jakichkolwiek rozwiązań teoretycznych w zakresie sprężysto-plastycznym (przybliżone rozwiązanie dla materiału sprężystego podano w pracy [6]) i tutaj znowu może się okazać niezbędna pomoc doświadczenia jako weryfikatora otrzymanych przybliżonych rozwiązań.

Na koniec autor pragnie podziękować Panu Prof. dr inż. M. Życzkowskiemu za pomoc otrzymaną przy teoretycznym opracowaniu i przy wykonaniu doświadczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, tłum. polskie: PWN, Warszawa 1960.

2. R. A. FRAZER, W. P. JONES, S. W. SKAN, *Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations*, Report and Memoranda No 1799/2913, Aeronautical Research Committee, 1937.

3. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Цилиндрический изгиб стальных пластинок с закрепленными кромками*, Материалы по Стальным Конструкциям, 3, Проектстальконструкция, Москва 1958, 112-146.

4. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Упругий и упруго-пластический изгиб длинных прямоугольных пластинок с закрепленными кромками*, Расчет Пространственных Конструкций, 8, Москва 1962.

5. Z. WASZCZYSZYN, M. ŻYCHKOWSKI, *Finite deflections of elastic-plastic beams, the stretchability of their axes being taken into account*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 10, 11 (1963), 347-358.

6. Z. WASZCZYSZYN, *Obliczanie belki na podporach nieprzesuwnych jako ramy portalowej o niskich słupach*, Arch. Inżyn. Ładow., 4, 8 (1962), 395–416.

7. Z. WASZCZYSZYN, *Zastosowanie metody kollokacji do obliczania sprężysto-plastycznych ugięć belek o skrepowanej przesuwności podpór*, Rozpr. Inżyn., 2, 13 (1965).

8. Z. WASZCZYSZYN, *Uprozczone obliczenie sprężysto-plastycznych ugięć belek ze skrepowaną przesuwnością podpór*, Arch. Inżyn. Ładow., w druku.

Р е з ю м е

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ, УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ БАЛОК, ОПЕРТЫХ НА НЕПЕРЕДВИЖНЫХ ОПОРАХ

Упрощенный расчет упруго-пластических прогибов балок со стесненной передвижностью опор, приведенный в работе [8] — проверен экспериментально. Расчет производится на основе метода коллокации, состоящего в принятии функции, удовлетворяющей уравнениям линии прогиба лишь для одной доминирующей области распределения напряжений (для идеально упруго-пластической модели или модели с линейным упрочнением).

Эксперименты проводились на трех типах стальных балочек прямоугольного сечения 10×10 мм и длиной 300, 400 и 500 мм. Опоры балочек были шарнирные, при чем их неподвижность осуществлялась в специально сконструированном приборе, показанном на фотоснимках. Загружение сосредоточенной силой реализовалось путем завинчивания римского винта. Измерения величин сил осуществлялись с помощью дугового динамометра, а величины перемещений с помощью механических датчиков.

Сравнение экспериментальных кривых с теоретическими показывает хорошее качественное согласие, а количественные отличия составляют в среднем 10% (максимальные ок. 30%).

Эксперименты проводились в Лаборатории кафедры статики сооружений Краковского политехнического института.

Summary

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF FINITE ELASTIC-PLASTIC DEFLECTIONS OF BEAMS ON IMMOVABLE SUPPORTS

The simplified method of determining the elastic-plastic deflections of beams on immovable supports given in [8] has been experimentally verified. The calculations are performed with the aid of the collocation method: a function satisfying the deflection equations of only one, predominating region of the stress distribution is assumed (a perfectly elastic-plastic body or the model with linear strain-hardening being assumed).

Three types of steel beams with rectangular cross-section 10×10 mm and lengths 300, 400 and 500 mm were used in the experiments. The supports were hinged, and to make them immovable the special device shown in photographs was used. A concentrated force was introduced by means of an adjusting screw. The forces were measured by ring dynamometers, and the displacements — by mechanical gauges.

The comparison of theoretical and experimental results yields a good qualitative agreement, the average quantitative discrepancy is 10% (with maximum of 30%).

The experiments were performed in the Laboratory of the Structural Static Department of the Cracow Technical University.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1965 r.