MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 3 (1965)

TENSOR KELVINA-SOMIGLIANY DLA CIAŁA LEPKOSPRĘŻYSTEGO

EUGEN SOÓS (BUKARESZT)

GURTIN i STERNBERG [1] uogólnili rozwiązanie Papkowicza-Neubera [2, 3] na przypadek materiału lepkosprężystego w zakresie quasi-statycznym. STERNBERG i KHOZAE [4] wyznaczyli, stosując pewien proces graniczny, stan naprężenia i odkształcenia wywołany działaniem siły skupionej na nieograniczone ciało lepkosprężyste, uogólniając w ten sposób pojęcie tensora Kelvina-Somigliany [5–7]. Ten sam problem w zakresie dynamicznym został rozwiązany przez NOWACKIEGO [8].

Dla powtórnego wyprowadzenia wyników podanych w pracy [4] posłużymy się metodą zastosowaną przez SANDRU [9, 10] do wyznaczenia tensora Kelvina-Somigliany dla ciała sprężystego. W tym celu posłużymy się własnościami funkcji Diraca.

Niech

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi(\mathbf{r}, t-\tau)\, d\psi(\mathbf{r}, \tau) \tag{1}$$

będzie splotem Riemanna-Stjeltiesa funkcji $\varphi(\mathbf{r}, t)$ i $\psi(\mathbf{r}, t)$, co możemy także zapisać w postaci

$$\theta = \varphi \divideontimes d\psi. \tag{2}$$

Przy spełnieniu warunków twierdzenia 1.2 pracy [1] mamy

$$\begin{gathered} \varphi \divideontimes d\psi = \psi \divideontimes d\varphi, \quad \varphi \divideontimes d(\psi \divideontimes d\theta) = (\varphi \divideontimes d\psi) = \varphi \divideontimes d\psi \divideontimes d\theta, \\ \varphi \divideontimes d(\psi+\theta) = \varphi \divideontimes d\psi + \varphi \divideontimes d\vartheta, \quad \varphi \divideontimes dH = \varphi, \quad \varphi \divideontimes d\varphi^{-1} = H, \end{gathered} \tag{3}$$

przy czym $H(t)$ oznacza funkcję Heaviside'a [11], a φ^{-1} jest przekształceniem odwrotnym Stjeltiesa funkcji φ [1].

Pełny układ równań dla nieograniczonego ciała lepkosprężystego ma postać

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \tag{4}$$

Równanie równowagi

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0. \tag{5}$$

Równania stanu typu relaksacyjnego

$$s_{ij} = e_{ij} \divideontimes dG_1, \qquad \sigma_{kk} = \varepsilon_{kk} \divideontimes dG_2; \tag{6}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}. \tag{7}$$

Warunki brzegowe

(8)
$$\lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \qquad \lim_{|\mathbf{r}|\to\infty} \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

W powyższych równaniach u_i są składowymi wektora przemieszczenia $\mathbf{u}$, ε_{ij} i σ_{ij} oznaczają zaś składowe tensorów odkształcenia i naprężenia. F_i są składowymi siły masowej $\mathbf{F}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych (x_1, x_2, x_3), a $G_1(t)$ oraz $G_2(t)$ są funkcjami relaksacji dla ścinania i ściskania izotropowego. Zakładamy, że $G_i(t) > 0$.

Zgodnie z twierdzeniem 9.4 pracy [1] wektor

(9)
$$\mathbf{u} = \nabla(\varphi+\mathbf{r}\boldsymbol{\psi}) * d(G_1+2G_2) - 4\boldsymbol{\psi} * d(2G_1+G_2)$$

jest rozwiązaniem układu równań (4–7), jeśli

(10)
$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2}\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2}\mathbf{f}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{f} = \mathbf{F} * dG_1^{-1} * d(2G_1+G_2)^{-1}.$$

Dla otrzymania tensora Kelvina-Somigliany przedstawiamy siłę skupioną $\mathbf{F}$ w postaci

(11)
$$\mathbf{F} = F\delta(\mathbf{r})H(t)\mathbf{i}_k,$$

gdzie $\mathbf{i}_k$ jest wektorem jednostkowym osi Ox_k, a $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ jest uogólnioną funkcją Diraca [11].

Posługując się związkiem podanym w pracy [11]

(12)
$$\mathbf{r}\delta(\mathbf{r}) = 0$$

i równaniami (3), (11) tejże pracy otrzymujemy

(13)
$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} F\delta(\mathbf{r})G^{-1} * d(2G_1+G_2)^{-1} i_k.$$

Na podstawie (8) i (13) wynika stąd, że $\varphi \equiv 0$.

W oparciu o związek (por. [11])

(14)
$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

otrzymujemy ze związków (13)

(15)
$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{F}{8\pi|\mathbf{r}|} G_1^{-1} * d(2G_1+G_2)^{-1}.$$

Równania (12) i (14) należy oczywiście rozpatrywać z uwzględnieniem sensu funkcji uogólnionych [11].

Z równań (3), (9) i (15) dochodzimy do następujących wyrażeń na składowe tensora Kelvina-Somigliany

(16)
$$u_i^{(k)}(\mathbf{r}, t) = \frac{F}{8\pi|\mathbf{r}|}\left\{3J_1(t)\left[\delta_{ki} + \frac{x_k x_i}{|\mathbf{r}|^2}\right] + 3Q_1(t)\left[\delta_{ki} - \frac{x_k x_i}{|\mathbf{r}|^2}\right]\right\},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$J_1(t) = G_1^{-1}(t), \qquad Q_1(t) = (2G_1+G_2)^{-1}. \tag{17}$$

W ciele sprężystym $G_1 = 2\mu H(t)$, $G_2 = 3kH(t)$ i równania (16) i (17) prowadzą do znanych wzorów na składowe tensora Kelvina-Somigliany.

Literatura cytowana w tekście

1. M. E. GURTIN, E. STERNBERG, *On the linear theory of visco-elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 4, **11** (1962).
2. Л. Ф. ПАПКОВИЧ, *Теория упругости*, Оборонгиз, 1939.
3. H. NEUBER, *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie*, Z.A.M.M., 4, **15** (1934).
4. E. STERNBERG, A. KHOZAIE, *On Green's functions and Saint-Venant's principle in the linear visco-elasticity*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 2, **15** (1964).
5. W. THOMSON, *Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid*, Cambridge and Doublin Math. Journal, 3 (1884).
6. Lord KELVIN, P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge 1923.
7. C. SOMIGLIANA, *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo*, Il Nuovo Cimento, Ser. 3, 1885.
8. W. NOWACKI, *Stress propagation in an infinite visco-elastic body produced by a time variable point force*, Arch. Mech. Stos., 6, **11** (1959).
9. N. SANDRU, *Asupra actiunii unei forte concentrate in spatiul elastic nemarginit*, Com. Acad. R.P.R., 12, **12** (1963).
10. N. SANDRU, *О действии переменных во времени сосредоточенных сил в неограниченном упругом пространстве*, Бюл. Польской Акад. Наук, Сер. тех. наук, I, 2(1964).
11. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции*, вып. I, Москва 1958.

Резюме

ТЕНЗОР КЕЛЬВИНА-СОМИЛЬЯНА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

Используя обобщенное решение Папковича-Нейбера (9) и (10) и свойства обобщенной функции Дирака (12) и (14) определяется тензор Кельвина-Сомильяна (17) для вязко-упругого тела в линейной и квазистатической областях.

Summary

THE KELVIN-SOMIGLIANA TENSOR FOR A VISCO-ELASTIC MATERIAL

Using the generalised Papkovitch-Neuber solution (9), (10) and the properties of the generalised function of Dirac (12), (14) we determine the Kelvin-Somigliana tensor (17) for a visco-elastic material in the linear quasi-static theory.

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 grudnia 1964 r.