

PROBLEM ODCIĄŻENIA OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK W STANIE
BŁONOWYM PRZY DUŻYCH ODKSZTAŁCENIACH NIESPRĘŻYSTYCH

JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy poruszono zagadnienie wiotkich konstrukcji powłokowych pracujących tylko na rozciąganie i mogących pod wpływem obciążenia w istotny sposób zmieniać swą pierwotną formę, jak również doznawać nawet znacznych odkształceń. Powłokom tym poświęca się ostatnio coraz więcej uwagi ze względu na liczne zastosowania inżynierskie [13, 24] i to zarówno w budownictwie jak i w konstrukcjach mechanicznych. Przy ścisłych obliczeniach takich powłok na ogół trzeba uwzględniać takie czynniki, jak znaczna nieliniowość fizyczna i geometryczna, duże odkształcenia, zasadnicze zmiany formy, anizotropia materiału, obciążenia dynamiczne, procesy termiczne i reologiczne, co oczywiście związane jest nieraz z trudnościami nie do pokonania. Dodatkowy kłopot stanowi problem stateczności przy rozciąganiu [14, 25, 33], związany z istnieniem maksimum obciążenia [1, 10, 12, 18, 29, 30, 32]. Ze względu na wspomniane trudności prace dotyczące omawianych powłok są bardzo fragmentaryczne i w większości dotyczą konkretnych zadań, rozwiązywanych zazwyczaj numerycznie przy mniejszych lub większych uproszczeniach i różnych założeniach ograniczających. Stąd np. nie ma, jak dotąd, prac poświęconych zagadnieniom dynamicznym, reologicznym i termicznym. Stosunkowo najwięcej zajmowano się skończonymi odkształceniami izotropowej membrany kołowej [8, 9, 12, 15, 24, 26, 28, 31], a także powłoki walcowej [10, 18, 20, 30] i stożkowej [22] pod stałym ciśnieniem wewnętrznym. Pewną próbą rozwiązania sprężystej ortotropowej membrany kołowej jest praca [19], a powłoki walcowej [6 i 7]. W pewnym sensie podstawą fizyczną wielu wspomnianych prac były wyniki doświadczeń, głównie E. A. DAVIS, prowadzonych na cienkościennych cylindrach stalowych [5] i miedzianych [4], poddanych złożonemu stanowi naprężenia: ciśnieniu wewnętrznemu i rozciąganiu. Rezultatem ich było ustalenie pewnych fenomenologicznych zależności fizycznych, które zostały sprecyzowane przez E. A. DAVIS [4], a następnie uogólnione przez A. NÁDÁIA [21]. Podają one związki, jakie zachodzą w trójosiowym stanie przy dużych deformacjach pomiędzy naturalnymi odkształceniami (w mierze logarytmicznej), a rzeczywistymi naprężeniami oraz analogiczne równania dla teorii płynięcia. W oparciu o równania Nádáia-Davisa I. W. KEPPEN [16] oraz bardziej ogólnie A. S. GRIGORIEW [11, 12] podali dla szerokiej klasy powłok obrotowych w stanie błonowym ogólne równania opisujące ich formę oraz stan naprężenia i odkształcenia w przypadku statycznych obciążeń normalnych. Założenie obrotowej symetrii

wiąże się z potrzebą zapewnienia znajomości kierunków głównych naprężeń i odkształceń po deformacji, co w ogólnym przypadku nie jest możliwe *a priori*. Dużym odkształceniom niesprężystym powłok o dowolnych kształtach regularnych ze specjalnym uwzględnieniem przybliżonych metod wariacyjnych poświęcona jest część monografii R. TROSTELA [24]. Czyni on jednak sporo założeń upraszczających, co rzutuje na wartość otrzymanych rezultatów.

Podstawą fizyczną innej grupy prac stały się równania, jakie daje teoria materiałów wysokoelastycznych (por. np. monografia [27]). Zależnie od stopnia przybliżenia zawierają one dowolną liczbę stałych materiałowych. Dzięki temu, choć wyprowadzono je dla materiałów nieliniowo sprężystych, można przy ich pomocy formalnie opisać zachowanie się metali w stanie plastycznym (obciążanie); podobnie zresztą jak i równania Nádaia-Davisa, uzyskane dla metali poza granicą sprężystości, można rozszerzyć także na niektóre inne materiały (np. gumopodobne, polimery). Przy związkach fizycznych dla materiałów kauczukopodobnych J. E. ADKINS i R. S. RIVLIN [1] rozwiązali przypadek membrany kołowej, a A. E. GREEN i J. E. ADKINS [33] przypadek powłoki obrotowo-symetrycznej. Zagadnieniu temu jest też poświęcona praca autora [23].

Wszystkie wspomniane wyżej prace traktują powłokę jako ciało sprężyste liniowo lub nieliniowo albo jako ciało plastyczne ograniczając się tylko do procesu obciążania. Natomiast celem niniejszej pracy jest podanie dla plastycznych powłok równań w procesie odciążania będących odpowiednikiem równań A. S. Grigoriewa dla powłok obciążanych [11, 12]. Ze względu na założony liniowy charakter procesu odciążania (w układzie współrzędnych: naturalne odkształcenia — rzeczywiste naprężenia) równania te dotyczą powłok metalowych.

2. Założenia wstępne i równania wyjściowe

W pracy przyjęto, że:

- 1) zachowana jest obrotowa symetria formy i obciążenia,
- 2) znajdują się one w stanie błonowym, są wiotkie i nie przenoszą naprężeń ściskających, wobec czego mogą zajść [11, 22] dwa przypadki:
 - a) naprężenia główne σ_1 i σ_2 są dodatnie,
 - b) naprężenie pierścieniowe σ_2 zeruje się i powstaje tzw. strefa fałdów ($\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 = 0$);
- 3) pod obciążeniem mogą doznawać znacznych odkształceń i zasadniczych zmian formy;
- 4) obciążenie jest dowolne, normalne;
- 5) są wykonane z nieściśliwego materiału izotropowego o nieliniowej charakterystyce fizycznej przy obciążaniu i liniowej przy odciążaniu;
- 6) grubość ścianki przed odkształceniem jest stała.

Ponadto za podstawę do otrzymania równań powłoki w procesie czynnym przyjęto za A. S. GRIGORIEWEM [11, 12] następujące zależności:

a) Z w i ą z k i f i z y c z n e. Równania Nádáia-Davisa [5, 21]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \Phi \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right), & \varepsilon_2 &= \Phi \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right), \\ \varepsilon_3 &= \Phi \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right), \end{aligned}$$

przy czym $\sigma_3 = 0$.

Ze związków (2.1) wynika oczywiście założenie o nieściśliwości materiału

$$(2.3) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Dla określenia funkcji Φ przyjęto zależności pomiędzy naprężeniami a odkształceniami bądź to w formie [12]

$$(2.4) \quad \varepsilon_i = \left(\frac{\sigma_i}{K_i} \right)^{1/\mu},$$

bądź to (por. [11])

$$(2.5) \quad \gamma = \text{sign } \tau \left| \frac{\tau}{K} \right|^{1/\mu},$$

gdzie

$$(2.6) \quad \gamma = \max(\gamma_{13}, \gamma_{23}), \quad \tau = \max(\tau_{13}, \tau_{23})$$

są odpowiednio maksymalnym odkształceniem postaciowym i maksymalnym naprężeniem stycznym, a

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}, \\ \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \end{aligned}$$

intensywnością odkształceń i intensywnością naprężeń.

b) R ó w n a n i a r ó w n o w a g i powłoki w stanie odkształconym przyjęto w formie podanej przez ALEKSIEJEWĄ [2]

$$\frac{d}{dX}(XH\sigma_1) = \sigma_2 H, \quad \frac{d}{dX}(XH\sigma_1 \sin \varphi) = q(X, Y)X,$$

gdzie X, Y jak na rys. 1, $q(X, Y)$ oznacza obciążenie normalne na jednostkę powierzchni, a H grubość powłoki po odkształceniu.

c) Z a l e ż n o ś c i g e o m e t r y c z n e. Zgodnie z rys. 1 odkształcenia umowne wyniosą (por. [11, 12, 29])

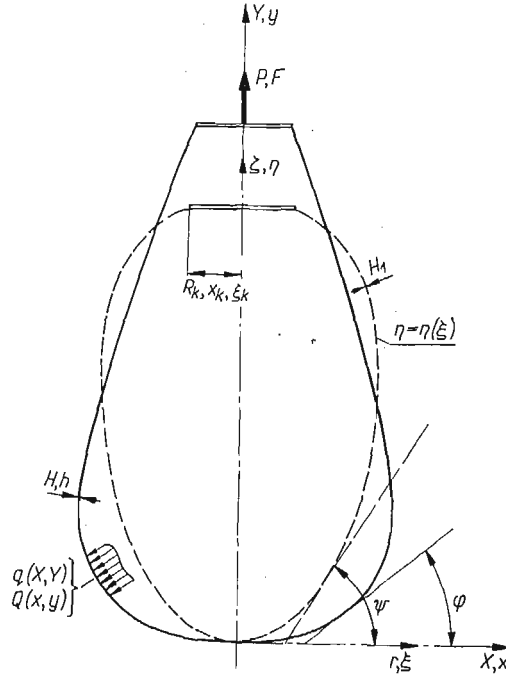
$$(2.9) \quad \varepsilon_1 = \frac{dS_1 - dS_{10}}{dS_{10}} = \frac{dX \cos \psi}{dr \cos \varphi} - 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{X - r}{r}, \quad \varepsilon_3 = \frac{H - H_1}{H_1},$$

gdzie dS_{10}, dS_1 oznacza długość elementu południka powłoki przed i po odkształceniu, H_1 grubość powłoki przed odkształceniem, ψ i r jak na rys. 1.

We wszystkich powyższych wzorach

$$(2.10) \quad \varepsilon_j = \ln(1 + e_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

oznaczają główne odkształcenia naturalne, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ główne naprężenia rzeczywiste — odpowiednio w kierunku południkowym, równoleżnikowym i prostopadłym do grubości powłoki; K, K_i, μ są to stałe materiałowe.



Rys. 1. Powłoka — — — — — przed odkształceniem i ————— po odkształceniu

Dla uproszczenia wprowadzono wielkości bezwymiarowe (rys. 1):

$$(2.11) \quad x = \frac{X}{R_1} A, \quad y = \frac{Y}{R_1} A, \quad h = \frac{H}{H_1},$$

$$\xi = \frac{r}{R_1} A, \quad \eta = \frac{\zeta}{R_1} A,$$

gdzie ξ, η są współrzędnymi punktu powłoki przed, a x, y po deformacji; R_1 oznacza dowolny wymiar charakteryzujący powłokę przed odkształceniem, A dowolny niemianowany parametr najczęściej przyjmowany jako równy jedności. Ponadto zdefiniowano bezwymiarowe wielkości naprężeń i obciążenia; dla przypadku (2.4):

$$(2.12) \quad p_j = \frac{\sigma_j}{K_i}, \quad j = 1, 2, \quad Q(x, y) = \frac{R_1}{K_i H_1} q(X, Y),$$

a dla (2.5)

$$(2.13) \quad p_j = \frac{\sigma_j}{2K}, \quad j = 1, 2, \quad Q(x, y) = \frac{R_1 q(X, Y)}{2K H_1}.$$

Przy takich założeniach podane wyżej równania przyjmą postać ([11, 12]):
równania fizyczne

$$(2.14a) \quad p_1 = -\frac{2}{3} \varepsilon_1^{n-1} (\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad p_2 = \frac{2}{3} \varepsilon_1^{n-1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

dla przypadku (2.4) oraz

$$(2.14b) \quad p_1 = (-\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)^\mu, \quad p_2 = (-\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)^{\mu-1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

dla przypadku (2.5) przy $p_1 > p_2$,

$$(2.14c) \quad p_1 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^{\mu-1}(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad p_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^\mu$$

dla przypadku (2.5) przy ($p_2 > p_1$);

równania równowagi

$$(2.15a) \quad \frac{d}{dx}(xhp_1) = p_2h, \quad \frac{d}{dx}(xhp_1 \sin \varphi) = \frac{Q(x, y)}{A}x;$$

związki geometryczne

$$(2.16a) \quad \varepsilon_1 = \ln \left(\frac{dx \cos \varphi}{d\xi \cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln h.$$

Ponadto z geometrii powłoki (rys. 1) widoczne są związki

$$(2.17a) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$(2.17b) \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \psi,$$

przy czym $\eta = \eta(\xi)$ jest znaną funkcją określającą kształt powłoki przed odkształceniem. Równania (2.14), (2.15a), (2.16a), (2.17a) w najogólniejszym przypadku dają się sprowadzić do układu 4 równań typu

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= f_1(\xi; x, \vartheta, h, \varphi), & \frac{dy}{d\xi} &= f_2(\xi; x, \vartheta, h, \varphi), \\ \frac{dh}{d\xi} &= f_3(\xi; x, y, h, \varphi), & \frac{d\varphi}{d\xi} &= f_4(\xi; x, y, h, \varphi) \end{aligned}$$

z niewiadomymi funkcjami $x(\xi)$, $y(\xi)$, $h(\xi)$, $\varphi(\xi)$. Prawa strona równań (2.18) jest zależna od tego spośród równań (2.14), które wykorzystaliśmy. W szczególnych przypadkach równania (2.18) mogą przyjąć nieco prostszą postać, ale zawsze pozostają uciążliwe i poza paroma najprostszymi przypadkami nie dają się efektywnie scałkować. Równanie (2.18) wraz z wyprowadzeniem podaje A. S. GRIGORIEW [11, 12]. Opisują one przypadek powłoki, w którym $p_1 > 0$, $p_2 > 0$.

Jeśli w powłoce tworzy się strefa pofałdowana $p_1 > 0$ i $p_2 = 0$, to układ wyjściowych równań (2.14), (2.15) i (2.16) ulegnie pewnej zmianie. I tak w równaniach fizycznych (2.14) należy przyjąć $p_2 = 0$; drugie z równań (2.16) ze względu na skończoną szerokość S_2 fałdy należy zastąpić związkiem

$$(2.16b) \quad S_2 = r\theta(1 + e_2),$$

przy czym współrzędne X , Y odnoszą się tu nie do rzeczywistej pofałdowanej, lecz do pewnej fikcyjnej gładkiej powłoki «uśredniającej» fałdy. Powłokę taką utworzyłby system nici zaczepionych z jednej strony do dna powłoki, a z drugiej do granicy pomiędzy obszarami. Wreszcie równania równowagi przyjmą postać:

$$(2.15b) \quad \sigma_1 HS_2 = \text{const}, \quad \frac{d}{dX}(\sigma_1 HS_2 \sin \varphi) = q(X, Y)x\theta.$$

Równania powyższe i otrzymany następnie podstawowy układ równań typu (2.18), choć nieco prostszy, podał A. S. GRIGORIEW [11].

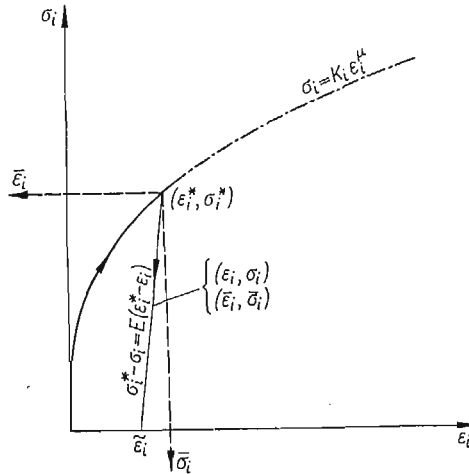
Celem niniejszej pracy jest podanie odpowiednika równań (2.18) dla przypadku odciążenia zarówno w obszarze czystego rozciągania jak i w obszarze pofałdowanym.

3. Podstawowy układ równań odciążenia dla powłoki

Przyjmijmy, że w procesie obciążania osiągnięty został pewien stan, który oznaczmy gwiazdką. Wprowadźmy następnie zgodnie z rys. 2 nowe wielkości

$$(3.1) \quad \bar{\sigma}_j = \sigma_j^* - \sigma_j, \quad \bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j^* - \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

przy czym z (2.2) wynika, że $\bar{\sigma}_3 = 0$. Tu $\bar{\sigma}_0, \bar{\varepsilon}_j$ oznaczają odpowiednio wielkość naprężeń i odkształceń głównych w nowym, a σ_j, ε_j w starym układzie współrzędnych.



Rys. 2. Przebieg procesu obciążania i odciążenia powłoki

Przyjmijmy ponadto, zgodnie z poprzednimi oznaczeniami (2.7), liniowe prawo odciążenia

$$(3.2) \quad \bar{\sigma}_i = E\bar{\varepsilon}_i,$$

gdzie E jest modułem sprężystości ekstrapolowanym na zakres dużych odkształceń.

Na podstawie (2.1) i (2.3) możemy napisać

$$(3.3) \quad \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2} = \frac{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_3}{\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3},$$

$$(3.4) \quad \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = 0.$$

Związki (3.2), (3.3) i (3.4) tworzą układ równań fizycznych dla przypadku odciążenia. Wprowadzając jak poprzednio [zależności (2.12) lub (2.13)] wielkości bezwymiarowe otrzymujemy stąd

$$(3.5) \quad \bar{p}_1 = -k(\bar{\varepsilon}_2 + 2\bar{\varepsilon}_3), \quad \bar{p}_2 = k(\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3),$$

gdzie zależnie od prawa obciążania

$$(3.6) \quad k = \frac{2E}{3K_j}, \text{ jeśli przyjąć (2.4) i (2.12) lub}$$

$$(3.7) \quad k = \frac{E}{3K}, \text{ jeśli zachodzi (2.5) i (2.13).}$$

Związki geometryczne na podstawie (2.16a) i (3.1) można zapisać w postaci:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1^* - \varepsilon_1 = \ln \frac{dx}{d\xi} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi^*} - \ln \frac{dx}{d\xi} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi} = \ln \frac{dx^*}{dx} \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi^*}, \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_2^* - \varepsilon_2 = \ln \frac{x^*}{\xi} - \ln \frac{x}{\xi} = \ln \frac{x^*}{x} = \alpha^* - \alpha, \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \varepsilon_3^* - \varepsilon_3 = \ln h^* - \ln h = \ln \frac{h^*}{h} = \beta^* - \beta. \end{aligned}$$

Wprowadzono tu dodatkowo oznaczenia

$$(3.9) \quad \alpha = \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \alpha^* = \varepsilon_2^* = \ln \frac{x^*}{\xi}, \quad \beta = \varepsilon_3 = \ln h, \quad \beta^* = \varepsilon_3^* = \ln h^*.$$

Stąd ze związków (3.5), (3.8), (3.9) otrzymano wyrażenia dla rzeczywistych bezwymiarowych naprężeń

$$(3.10) \quad \begin{aligned} p_1 &= p_1^* - \bar{p}_1 = p_1^* + k(\alpha^* + 2\beta^*) - k(\alpha + 2\beta), \\ p_2 &= p_2^* - \bar{p}_2 = p_2^* - k(\alpha^* - \beta^*) + k(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia do (2.15) otrzymujemy równania równowagi w przypadku odciążenia w następującej postaci:

$$(3.11a) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ [p_1^* + k(\alpha^* + 2\beta^*) - k(\alpha + 2\beta)] x h \} &= [p_2^* - k(\alpha^* - \beta^*) + k(\alpha - \beta)] h, \\ \frac{d}{dx} \{ [p_1^* + k(\alpha^* + 2\beta^*) - k(\alpha + 2\beta)] x h \sin \varphi \} &= \frac{Q(x, y)x}{A}. \end{aligned}$$

Układ równań (2.17a), (3.4) i (3.11a) przy wykorzystaniu związków (3.8) i (3.9) daje się sprowadzić do następującej postaci odpowiadającej równaniom (2.18)

$$(3.12a) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\xi \cos \varphi}{x h \cos \varphi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi \sin \varphi}{x h \cos \varphi}, \\ \frac{dh}{d\xi} &= h \frac{\frac{\xi \cos \varphi}{x^2 h \cos \varphi} [z_1^* + (2\alpha + \beta + 1)] - z_2^*}{z_3^* - (\alpha + 2\beta + 2)}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{\frac{Q(x, y)}{A h k} - [z_1^* + z_3^* + (\alpha - \beta)] \frac{\sin \varphi}{x}}{\frac{x h \cos \varphi}{\xi} [z_3^* - (\alpha + 2\beta)]} \end{aligned}$$

lub w formie bardziej dogodnej do (numerycznych) obliczeń

$$(3.12b) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\xi}{xh} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{dx}{d\xi} \operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{dh}{d\xi} &= h \frac{\frac{1}{x} \frac{dx}{d\xi} [z_1^* + (2\alpha + \beta + 1)] - z_2^*}{z_3^* - (\alpha + 2\beta + 2)}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{dx}{d\xi} \frac{\frac{Q(x, y)}{Ahk} - [z_1^* + z_3^* + (\alpha - \beta)] \frac{\sin \varphi}{x}}{[z_3^* - (\alpha + 2\beta)] \cos \varphi}. \end{aligned}$$

W równaniach tych

$$(3.13) \quad \begin{aligned} z_1^* &= \frac{p_2^* - p_1^*}{k} - (2\alpha^* + \beta^*), \\ z_2^* &= \frac{1}{k} \frac{dp_1^*}{d\xi} + \frac{1}{x^*} \frac{dx^*}{d\xi} + \frac{2}{h^*} \frac{dh^*}{d\xi}, \\ z_3^* &= \frac{p_1^*}{k} + (\alpha^* + 2\beta^*) \end{aligned}$$

są znanymi funkcjami zależnymi jedynie od wielkości charakteryzujących stan, od którego rozpoczęło się odciążenie. W przypadku gdy $Q(x, y) = Q = \text{const}$, czyli przy stałym wewnętrznym ciśnieniu w powłoce, czwarte z równań (3.12a) i (3.12b) daje się scałkować i przyjmuje postać

$$(3.14) \quad \sin \varphi = \frac{\frac{Qx}{A} + \frac{AF}{x}}{2kh[z_3^* - (\alpha + 2\beta)]},$$

gdzie

$$(3.15a) \quad F = \frac{P}{\pi H_1 K_1 R_1}$$

lub

$$(3.15b) \quad F = \frac{P}{2\pi H_1 K R_1}$$

jest bezwymiarowym odpowiednikiem wypadkowej siły P zaczepionej do krawędzi powłoki (np. do dna).

Równania (3.12) są rozwiązaniem postawionego w pracy zadania dla przypadku, gdy $p_1 > 0$ i $p_2 > 0$. Dla otrzymania analogicznych równań w przypadku obszaru pofałdowanego, gdzie $p_2 = 0$, korzystając ze związków (3.10) obliczamy najpierw

$$(3.16) \quad p_1 = k(z_4^* - 3\beta),$$

przy czym

$$(3.17) \quad z_4^* = \frac{1}{k}(p_1^* + p_2^*) + 3\beta^*,$$

z tym, że jeśli obszar pofałdowany istniał również w procesie obciążania, należy w (3.17) dodatkowo przyjąć $p_2^* = 0$. Równania równowagi (2.15b) po przejściu na wielkości bezwymiarowe [por. (2.11), (2.12), (2.13)] i podstawieniu (3.16) przyjmą postać:

$$(3.11b) \quad \begin{aligned} (z_4^* - 3\beta)hs_2 &= \text{const}, \\ \frac{d}{dx} [(z_4^* - 3\beta)hs_2 \sin \varphi] &= \frac{Q(x, y)x\theta}{Ak}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.18) \quad s_2 = \frac{S_2}{R_1}.$$

Układ równań (2.17a), (3.4) i (3.11b) przy wykorzystaniu związków (3.8) i (3.9), z tym że wielkość ε_2 określa się z równania (2.16b) wyrażonego w wielkościach bezwymiarowych — daje się sprowadzić do postaci:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{\xi p_1 \cos \varphi}{C' \cos \psi} = \frac{e^{z_1^* + z_3^*} \cos \varphi}{h^2 \cos \psi}, \\ \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi p_1 \sin \varphi}{C' \cos \psi} = \frac{e^{z_1^* + z_3^*} \sin \varphi}{h^2 \cos \psi}, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{Q(x, y)xe^{z_1^* + z_3^*}}{AkC'h^2 \cos \psi}, \\ h^2 k \xi (z_4^* - 3\beta) e^{-(z_1^* + z_3^*)} &= C', \end{aligned}$$

gdzie $C' = p_1' h' x'$ jest stałą wyznaczaną z warunków ciągłości obszaru pofałdowanego z obszarem, gdzie $p_1 > 0$ i $p_2 > 0$.

Warunek dla obliczenia odkształceń ε_2 przyjmuje postać

$$(3.20) \quad 1 + \varepsilon_2 = \frac{C'}{p_1 h \xi} = h e^{-(z_1^* + z_3^*)}.$$

Równania (3.19) stanowią rozwiązanie postawionego w pracy zadania dla strefy fałdów, tj. gdy $p_1 > 0$, $p_2 > 0$. W ogólnym przypadku układ równań (3.19) jest na tyle złożony, że rozwiązywać go trzeba numerycznie, w szczególności jednak, gdy $Q(x, y) = Q = \text{const}$, daje się on rozwiązać stosunkowo prosto. Wówczas trzecie z równań (3.19) przyjmuje postać:

$$(3.21) \quad \sin \varphi = \frac{\frac{Q}{A} x^2 + FA}{2kC'}.$$

Stąd na podstawie związku (2.17a) przy przyjętym na rys. 1 kształcie powłoki ($\cos \varphi < 0$) mamy:

$$(3.22) \quad y = y' - \int_x^x \frac{(m^2 t^2 + n^2) dt}{\sqrt{1 - (m^2 t^2 + n^2)^2}},$$

gdzie

$$(3.23) \quad m^2 = \frac{Q}{2AkC'}, \quad n^2 = \frac{FA}{2kC'}.$$

Całkę występującą w równaniu (3.22) można przedstawić za pomocą kombinacji całek eliptycznych zależnie od wartości stałych m^2 , n^2 . Tak np. (por. [3])

$$(3.24) \quad y = y' + f(x') - \sqrt{a^2 + b^2} \left[E(\gamma, \omega) - \frac{1}{2} F(\gamma, \omega) \right] + x \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{a^2 + x^2}},$$

gdzie

$$(3.25) \quad f(x') = \sqrt{a^2 + b^2} \left[E(\gamma', \omega) - \frac{1}{2} F(\gamma', \omega) \right] - x' \sqrt{\frac{b^2 - x'^2}{a^2 + x'^2}},$$

$$\gamma = \arcsin \frac{x}{b} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + x^2}}, \quad \gamma' = \arcsin \frac{x'}{b} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + x'^2}}, \quad \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$a^2 = \frac{A}{Q} (2kC' + FA), \quad b^2 = \frac{A}{Q} (2kC' - FA),$$

jeśli $b \geq x > 0$ i $b \geq x' > 0$.

W dalszym ciągu z czwartego z równań (3.19) zakładając, iż z_1^* , z_3^* i z_4^* są znanymi funkcjami od ξ obliczamy (równanie przestępne)

$$(3.26) \quad h = h(\xi).$$

Natomiast z pierwszego uwzględniając związki (3.21), (3.23), (3.26) mamy

$$(3.27) \quad \int_{x'}^x \frac{dt}{\sqrt{1 - (m^2 t^2 + n^2)^2}} = -\frac{1}{\cos \varphi} \int_{\xi'}^{\xi} \frac{e^{z_1^* + z_3^*}}{h^2(u)} du.$$

Równanie to daje brakujący związek pomiędzy x a ξ i chociaż wyznaczyć go można tylko numerycznie, to jednak układ (3.19) jest tym samym efektywnie rozwiązany.

4. Odształcenia i naprężenia resztkowe

Jak wiadomo, w konstrukcjach pracujących w zakresie plastycznym po zdjęciu obciążenia na ogół pozostają pewne naprężenia, tworzące samozrównoważony układ statyczny i pewne odształcenia resztkowe. Zbadajmy jak ta sprawa przedstawia się w rozpatrywanych przez nas powłokach. Aby określić warunki istnienia naprężeń resztkowych, rozwiążmy względem p_1 i p_2 układ równań równowagi (2.15a), przyjmując $Q(x, y) = 0$, skąd otrzymamy:

$$(4.1) \quad p_1 = \frac{C}{xh \sin \varphi}, \quad p_2 = \frac{C}{h} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \right),$$

gdzie C jest stałą całkowania. Jeśli przyjąć

$$(4.2) \quad C = \frac{P}{2\pi K_1 H_1 R_1} \left[\text{lub odpowiednio } C = \frac{P}{4\pi K H_1 R_1} \text{ dla (2.13)} \right],$$

to stała C odpowiada wypadkowej sile P działającej na dno (lub krawędź) powłoki (rys. 1). Przy braku obciążenia występowanie siły P , a co za tym idzie naprężeń

resztkowych, związane jest z reakcją nieprzesuwnych den (jeśli istnieją dwa, a nie jedno jak na rys. 1) powłoki. Jeśli zatem warunki brzegowe zezwalają na swobodny wzajemny przesuw den, to naprężenia resztkowe nie wystąpią. W przeciwnym przypadku należy je wyznaczyć zakładając przy dnach reakcje P , których wielkość określa się z warunków nieprzesuwności tych den (por. [10]).

Natomiast określenie odkształceń resztkowych jest bardziej złożone. Można je co prawda wyznaczyć (najczęściej numerycznie) z układów równań (3.12) i (3.19) jako graniczny przypadek dla $Q(x, y)$ zmierzającego do zera, jest to jednak droga bardzo żmudna [trzeba tu zaznaczyć, że w takim przypadku należy w obliczeniach przyjąć za $Q(x, y)$ choćby bardzo małą, ale różną od zera wielkość, gdyż przy rozpatrywaniu wiotkich powłok czyni się milczące założenie, że zachowują one swą formę dzięki istnieniu pewnego niewielkiego ciśnienia wewnętrznego]. Jeśli jednak po zdjęciu obciążenia naprężenia w powłoce zerują się, to przy dodatkowym założeniu, że maksymalne odkształcenia we wszystkich punktach powłoki zostały osiągnięte w procesie obciążania, co zachodzi np. w przypadku, gdy odciążenie w całej powłoce odbywa się proporcjonalnie do jednego tylko parametru Q_0 , gdzie $Q(x, y) = Q_0 m(x, y)$, — odkształcenie resztkowe można wyznaczyć w prosty sposób z równań (3.10) przyjmując

$$(4.3) \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0,$$

oraz z warunku nieściśliwości (2.3). Otrzymamy stąd:

$$(4.4) \quad \tilde{\varepsilon}_1 = -\alpha^* - \beta^* - \frac{2p_1^* - p_2^*}{3k}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \alpha^* + \frac{p_1^* - 2p_2^*}{3k}, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \beta^* + \frac{p_1^* + p_2^*}{3k}.$$

Rezultaty te są słuszne zarówno w przypadku, gdy proces odciążenia zachodzi wg równań (3.12) jak i (3.19) z tym jednak, że jeśli przy odciążaniu dana część powłoki znajdowała się w strefie fałdów, należy dodatkowo przyjąć $p_2^* = 0$. Z równań (4.4) otrzymujemy:

$$(4.5) \quad \tilde{x} = x^* e^{\frac{p_1^* - 2p_2^*}{3k}}, \quad \tilde{h} = h^* e^{\frac{p_1^* + p_2^*}{3k}},$$

gdzie wężykiem oznaczono jak poprzednio stan po całkowitym odciążeniu. Trzecią wielkość (\tilde{y} lub $\tilde{\varphi}$) decydującą o formie powłoki obliczymy z równań (3.12) i (3.19) otrzymując jednakowo

$$(4.6) \quad \frac{d\tilde{y}}{d\xi} = \frac{\xi}{x^* h^*} \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\cos \varphi} e^{\frac{\tilde{p}_2^* - 2\tilde{p}_1^*}{3k}},$$

przy czym

$$(4.7) \quad \cos \tilde{\varphi} = \frac{d\tilde{x}}{dx^*} e^{\frac{2p_1^* - p_2^*}{3k}} \cos \varphi^*.$$

W wyrażeniu tym pochodną $d\tilde{x}/dx^*$ obliczamy ze związków (4.5)

$$(4.8) \quad \frac{d\tilde{x}}{dx^*} = \left[1 + \frac{d\xi}{dx^*} \frac{x^*}{3k} \left(\frac{dp_1^*}{d\xi} - 2 \frac{dp_2^*}{d\xi} \right) \right] e^{\frac{p_1^* - 2p_2^*}{3k}},$$

Pochodne $dp_1^*/d\xi$ i $dp_2^*/d\xi$ obliczamy dla konkretnych przyjętych związków fizycznych. Tak np. na podstawie (2.14a), (2.16a) i (3.9):

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{dp_1^*}{d\xi} &= \frac{p_1^*}{2B_1^*B_4^*} \left\{ \frac{d\alpha^*}{d\xi} [2B_4^* + (\mu - 1)B_1^*B_2^*] + \frac{d\beta^*}{d\xi} [4B_4^* + (\mu - 1)B_1^{*2}] \right\}, \\ \frac{dp_2^*}{d\xi} &= \frac{p_2^*}{2B_3^*B_4^*} \left\{ \frac{d\alpha^*}{d\xi} [2B_4^* + (\mu - 1)B_2^*B_3^*] + \frac{d\beta^*}{d\xi} [-2B_4^* + (\mu - 1)B_1^*B_3^*] \right\}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha^*}{d\xi} &= \frac{1}{x^*} \frac{dx^*}{d\xi} - \frac{1}{\xi}, & B_1^* &= \alpha^* + 2\beta^*, & B_2^* &= \beta^* + 2\alpha^*, \\ \frac{d\beta^*}{d\xi} &= \frac{1}{h^*} \frac{dh^*}{d\xi}, & B_3^* &= \alpha^* - \beta^*, & B_4^* &= \alpha^{*2} + \beta^{*2} + \alpha^*\beta^*. \end{aligned}$$

Jeśli ponadto $p_2^* = 0$, to

$$(4.11) \quad \frac{dp_1^*}{d\xi} = \frac{\mu p_1^*}{h^* \ln h^*} \frac{dh^*}{d\xi}.$$

Jak widać, pochodna $d\tilde{x}/dx^*$ jest funkcją jedynie znanych wielkości i można ją określić w każdym punkcie powłoki, a stąd na podstawie (4.6) i (4.7) obliczyć współrzędną \tilde{y} .

5. Proste przykłady

Dla ilustracji i choćby pobieżnej jakościowej oceny problemu podamy kilka prostych przykładów, w których przy przyjętych poprzednio założeniach można otrzymać ścisłe rezultaty. Rozwiązania dla tych przypadków w procesie obciążania można znaleźć np. w pracy [12]. I tak weźmy pod uwagę powłokę kołistą o promieniu początkowym R_1 i grubości początkowej H_1 poddaną równomiernemu ciśnieniu wewnętrznemu o stałej wartości q . Przyjawszy, iż obciążenie zachodzi w myśl związku (2.4), wprowadźmy bezwymiarowe wielkości

$$(5.1) \quad p = \frac{\sigma}{K_i}, \quad Q = \frac{qR_1}{K_i H_1}, \quad h = \frac{H}{H_1}, \quad e = \frac{R}{R_1},$$

gdzie σ oznacza naprężenie rzeczywiste, R — promień, H — grubość powłoki odkształconej. Zachodzą tu następujące związki:

$$(5.2) \quad \ln e = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_3}{2} = -\frac{1}{2} \ln h = \frac{1}{2} \varepsilon_i, \quad \text{skąd } R = \frac{R_1}{h^2}.$$

Z równania równowagi

$$(5.3) \quad p = \frac{Qe}{2h} = p_i$$

na podstawie (2.4), (5.1), (5.2) i (5.3)

$$(5.4) \quad Q = 2h^3(-2 \ln h)^\mu, \quad \text{skąd } Q_{\max} = 2 \left(\frac{\mu}{3e} \right)^\mu \text{ dla } h = e^{-\frac{\mu}{3}}.$$

Równania odciażenia w bezwymiarowych wielkościach podobnie jak w punkcie 3 przyjmujemy w postaci liniowej i przy uwzględnieniu (3.6) i (5.3) mamy:

$$(5.5) \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i^* - \frac{1}{k} \left(p_i^* - \frac{Q}{2h^3} \right),$$

skąd

$$(5.6) \quad Q = 2h^3 [p_i^* - k(\varepsilon_i^* + \ln h)],$$

gdzie jak poprzednio wielkości z gwiazdką odpowiadają początkowi odciażenia. Przyjmując $Q = 0$ otrzymamy wielkości resztkowe

$$(5.7) \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^* - \frac{p_i^*}{k}, \quad \tilde{h} = h^* e^{\frac{(-\ln h^*)^\mu}{k}}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{h^{*2}} e^{-\frac{2}{k}(-\ln h^*)^\mu}.$$

Dla otrzymania wykresów przyjęto konkretne wartości liczbowe $K_I = 3820$ kG/cm², $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $k = 5500$, $\mu = 1/3$ odpowiadające średnim wartościom stali w doświadczeniach Davisa [5]. Stąd np. przy pełnym odciażeniu

$$(5.8) \quad \tilde{h}_{\max} = 1,00126 h^*.$$

Podobnie znikomy okazuje się w tym przypadku wpływ odciażenia na $\tilde{\varepsilon}$ czy \tilde{R} . Wyniki przedstawiono na rys. 3. Linia ciągła oznacza obszar stateczny, linia przerywana niestateczny. Pokazano dwa przypadki odciażenia przy obciążeniu maksymalnym $Q^* = Q_{\max}$ i przy obciążeniu $Q^* < Q_{\max}$.

Jako drugi przykład rozpatrzono nieskończenie długą powłokę walcową poddaną stałemu ciśnieniu wewnętrznemu o wielkości q . Podobnie jak poprzednio R_1 i H_1 oraz R i H oznaczają odpowiednio promień i grubość powłoki przed i po odkształceniu. Tym razem przyjęto, iż obciążenie zachodzi w myśl prawa (2.14c) ($\sigma_2 > \sigma_1$). Przyjmując oznaczenia bezwymiarowe (2.13) i (5.1) z równań równowagi mamy

$$(5.9) \quad p_2 = 2p_1 = \frac{Qq}{h}.$$

Analogicznie jak dla powłoki kolistej otrzymujemy $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\ln h$, $q = 1/h$ oraz

$$(5.10) \quad Q = h^2(-2 \ln h)^\mu,$$

skąd

$$Q_{\max} = \left(\frac{\mu}{e} \right)^\mu \text{ dla } h = e^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Odciażenie zachodzi w myśl związku:

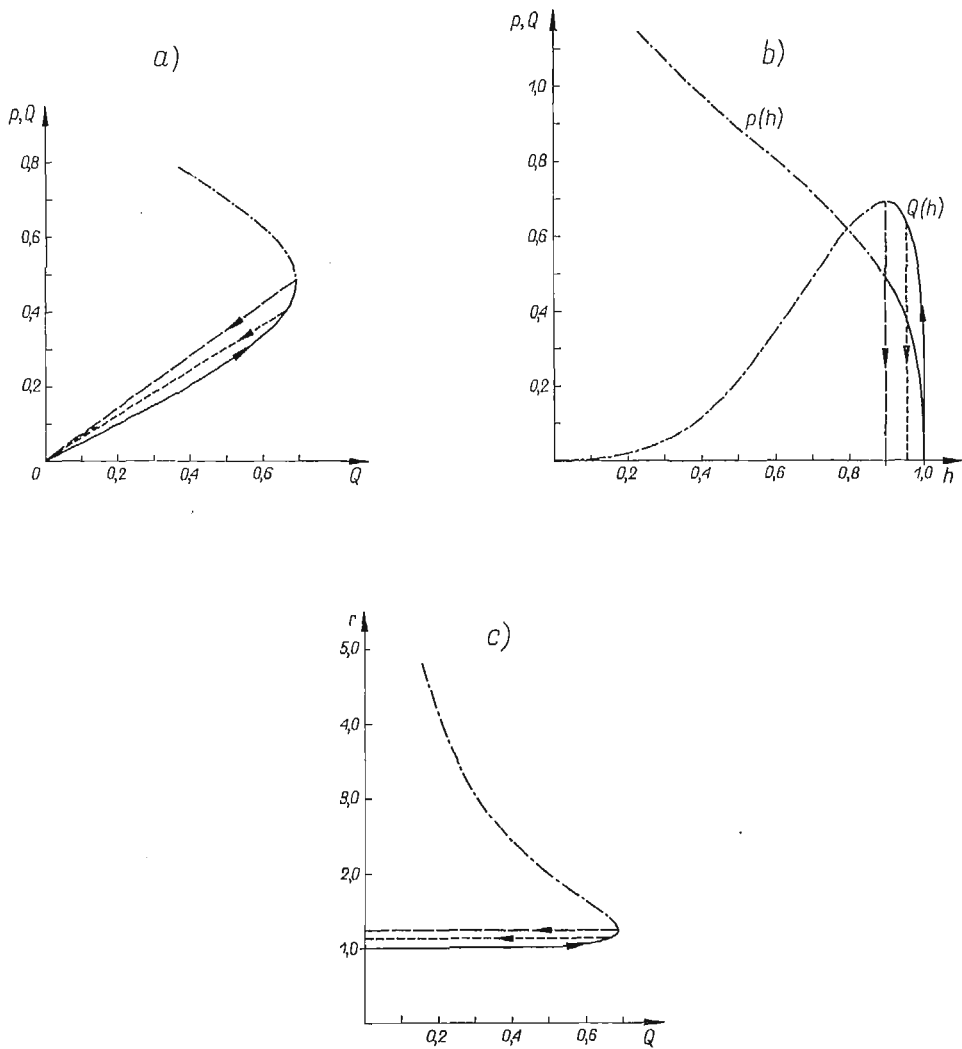
$$(5.11) \quad p_2^* - p_2 = 2k(\varepsilon_2^* - \varepsilon_2),$$

gdzie k określone jest równością (3.7), skąd następnie

$$(5.12) \quad Q = h^2 \left(p_2^* - 2k \ln \frac{h^*}{h} \right).$$

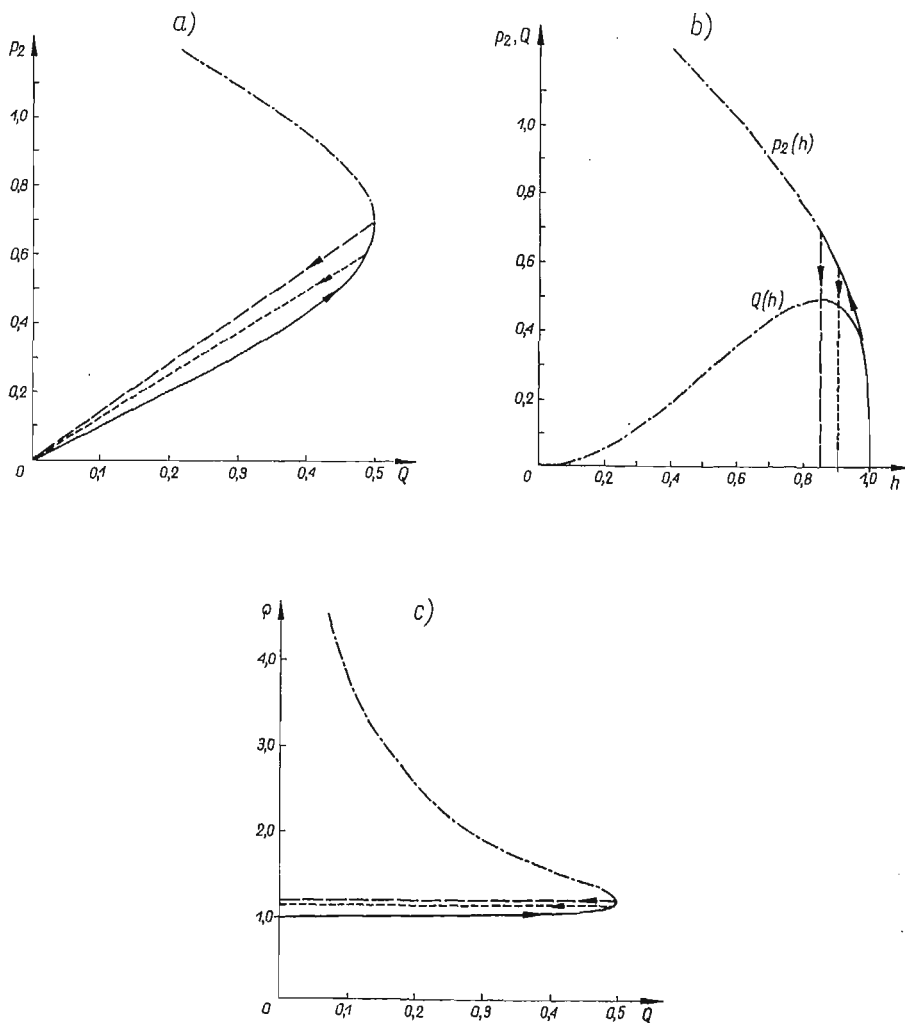
Przyjmując $Q = 0$ otrzymujemy wielkości resztkowe

$$(5.13) \quad \tilde{\varepsilon}_2 = -\tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_2^* - \frac{p_2^*}{2k}, \quad \tilde{h} = h^* e^{\frac{p_2^*}{2k}}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{h^*} e^{-\frac{p_2^*}{2k}}.$$



Rys. 3. Powłoka kulista: — proces obciążania, obszar stateczny; - · - · - proces obciążania, obszar niestateczny; - - - - proces odciążania;
 a - naprężenie jako funkcja obciążenia, b - wykresy funkcji $p(h)$ i $Q(h)$, c - wykres funkcji $r(Q)$

Wyniki powyższych rozważań przy przyjęciu konkretnych wartości liczbowych jak w poprzednim przykładzie pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Powłoka walcowa nieskończenie długa obciążona parciem wewnętrznym: — proces obciążania, obszar stateczny; - · - · - · proces obciążania, obszar niestateczny; — — — — proces odciążania;

a - naprężenie p_2 jako funkcja obciążenia, b - wykresy funkcji $p_2(h)$ i $Q(h)$, c - wykres funkcji $q(Q)$

Rozpatrzono również powłokę jak w przykładzie drugim, lecz obciążoną jedynie siłami P przyłożonymi do jej końców. Przyjmując jak poprzednio oznaczenia bezwymiarowe i uwzględniając (3.15b) możemy napisać równanie równowagi:

$$(5.14) \quad p_1 = \frac{F}{h^2}, \quad p_2 = 0.$$

W procesie obciążania przy spełnieniu (2.14b) mamy

$$(5.15) \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \varepsilon_1 = \ln \varrho = \ln h$$

oraz

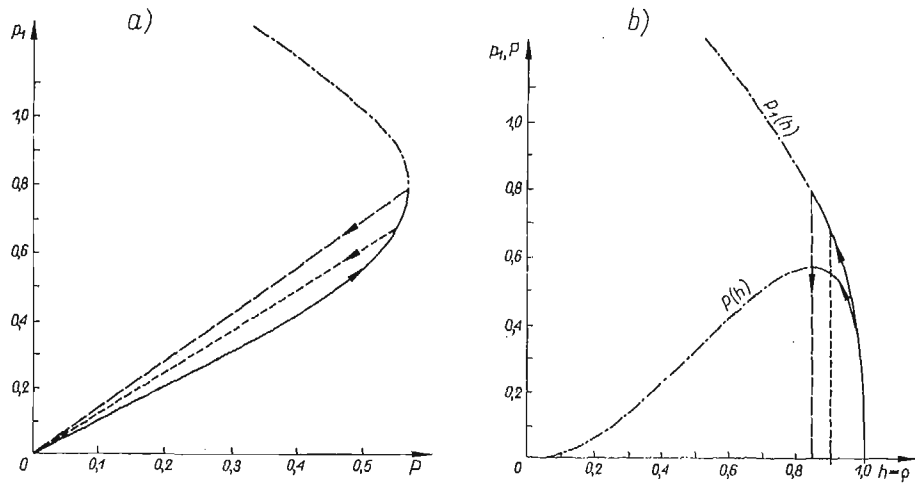
$$(5.16) \quad F = h^2 (-3 \ln h)^{\mu}.$$

Równanie odciążenia w bezwymiarowych wielkościach ma postać

$$(5.17) \quad p_1^* - p_1 = 3k(\varepsilon_3^* - \varepsilon_3),$$

skąd następnie

$$(5.18) \quad F = h^2 \left(p_1^* + 3k \ln \frac{h^*}{h} \right).$$



Rys. 5. Powłoka walcowa, nieskończenie długa, rozciągana osiowo; — proces obciążania, obszar stateczny; - · - · - proces obciążania, obszar niestateczny; - - - - proces odciążania;

a - naprężenie p_1 jako funkcja obciążenia, b - wykresy funkcji $p_1(h)$, $P(h)$

Przyjmując $F = 0$ otrzymujemy wielkości resztkowe

$$(5.19) \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3^* + \frac{p_1^*}{3k}, \quad \tilde{\varrho} = \tilde{h} = h^* e^{\frac{p_1^*}{3k}}.$$

Odpowiednie wykresy dla wartości liczbowych z poprzednich przykładów pokazano na rys. 5.

6. Uwagi końcowe

Jak łatwo zauważyć, w podanych wyżej przykładach przy dużych (rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu procent) odkształceniach metalowej powłoki odciążenie prawie nie wpływa na jej kształt, a odkształcenia nawet przy pełnym odciążeniu niemal nie różnią się od wartości osiągniętych w procesie obciążania ($\tilde{h} \approx h^*$, $\tilde{\varrho} \approx \varrho^*$)

Można więc przypuszczać, że zjawisko to wystąpi również i przy bardziej skomplikowanych kształtach powłoki i rodzajach obciążenia. Jednakże w odróżnieniu od przytoczonych wyżej przykładów w ogólnym przypadku nawet w procesie odciażania naprężenia zazwyczaj nie są liniowymi funkcjami obciążenia (obciążenie nie jest proste w sensie Iliuszina). Powoduje to m.in. możliwość pojawienia się obszaru po-fałdowań, nawet jeśli przedtem go nie było, a ponadto wiąże się zazwyczaj z bardzo uciążliwymi obliczeniami rachunkowymi. Spróbujmy jednak w oparciu o wnioski, jakie nasuwają przytoczone przykłady, określić warunki, przy których naprężenia p_1 i p_2 w każdym dowolnie obranym punkcie powłoki będą z dostatecznym przybliżeniem liniowymi funkcjami obciążenia, co równocześnie zabezpieczy powłokę przed powstaniem strefy fałdów.

Rozpatrzmy w tym celu wyjściowe równania powłoki

$$(6.1) \quad \frac{d}{dx}(xhp_1) = hp_2, \quad \frac{d}{dx}(xhp_1 \sin \varphi) = Q(x, y)x.$$

Założmy, że obciążenie zmniejszać się będzie proporcjonalnie do jednego parametru Q_0 , gdzie

$$(6.2) \quad Q(x, y) = Q_0 m(x, y).$$

Wówczas z równań (6.1) otrzymamy

$$(6.3) \quad p_1 = Q_0 \frac{\int m(x, y) x dx}{xh \sin \varphi} + \frac{C}{xh \sin \varphi}.$$

Fizycznie stała C jak wiadomo (3.14) i (3.15) oznacza wypadkową siłę przyłożoną do dna (lub krawędzi) powłoki, przy czym może to być zarówno dane obciążenie na przesuwym denku jak i reakcja w przypadku zamocowania. Aby utrzymać proporcjonalność p_1 do jednego tylko parametru Q_0 , należy przyjąć, że warunki brzegowe zezwalają na swobodny przesuw dna powłoki, a jeżeli przykładą się siłę, to zmienia się ona proporcjonalnie do Q_0 , czyli

$$(6.4) \quad C = Q_0 \cdot C_1.$$

Wówczas można napisać

$$(6.5) \quad p_1 = Q_0 f_1,$$

gdzie

$$f_1 = \frac{C_1 + \int m(x, y) x dx}{xh \sin \varphi}.$$

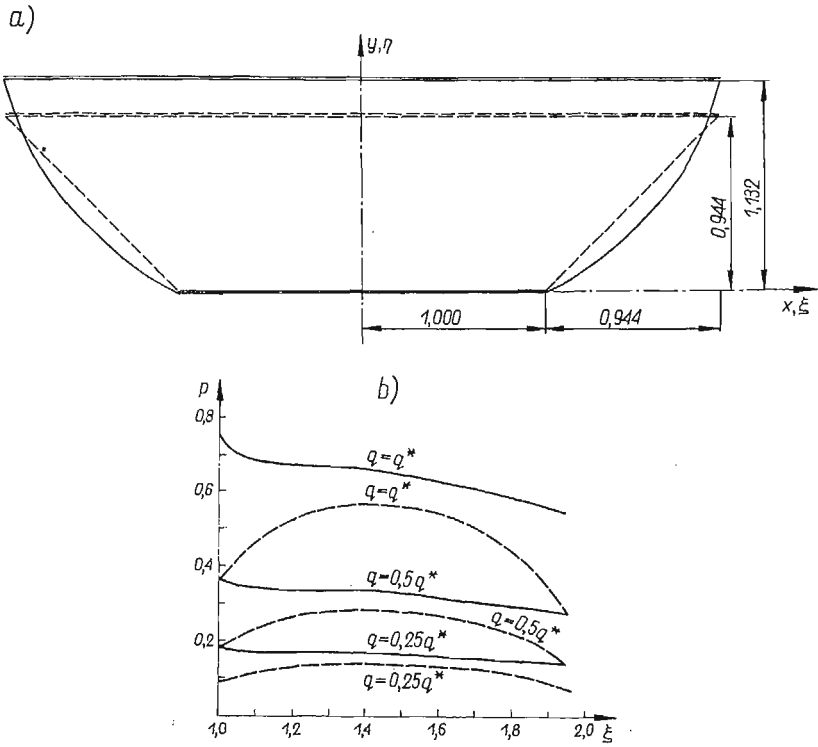
Z pierwszego z równań (6.1) otrzymamy wtedy

$$(6.6) \quad p_2 = Q_0 f_2,$$

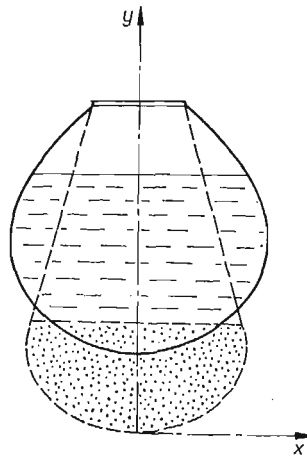
gdzie

$$f_2 = f_1 + \frac{x}{h} \frac{d}{dx}(hf_1).$$

Jeśli przy tym okazałoby się, iż w procesie obciążania odkształcenia na całej wysokości powłoki były znaczne, to zgodnie z wynikami rozpatrywanych przykładów można by



Rys. 6. a - Kształt powłoki - - - - - przed odkształceniem, ————— po odkształceniu
 b - Wykresy naprężeń w powłoce stożkowej przy odciażaniu ————— p_1 ; - - - - p_2 .



Rys. 7. Powłoka zmieniająca w istotny sposób swój kształt przy odciażaniu: ————— przed odciażaniem, - - - - - po częściowym odciażeniu

z dość dobrym przybliżeniem przyjmując, że przy odciażeniu deformacja nie zmienia się, czyli że

$$(6.7) \quad x \approx x^*, \quad h \approx h^*, \quad \varphi \approx \varphi^*, \quad f_1 \approx f_1^*, \quad f_2 \approx f_2^*.$$

Przy takich założeniach naprężenia p_1 i p_2 będą liniowymi funkcjami obciążenia i wyrażą się wzorami:

$$(6.8) \quad p_1 = Q_0 \frac{p_1^*}{Q_0^*}, \quad p_2 = Q_0 \frac{p_2^*}{Q_0^*}.$$

Wzory (6.7) i (6.8) dają elementarne rozwiązanie problemu odciażenia, przy podanych wyżej założeniach upraszczających. Przykładem powłoki rozwiązanej w myśl wzorów (6.7) i (6.8) może być (zob. [22]) powłoka stożkowa (rys. 6) obciążona parciem wewnętrznym gazu wzrastającym do wielkości Q (bezwym.), a następnie malejącym stopniowo do 0. Rysunek 6a pokazuje kształt tej powłoki przy maksymalnym obciążeniu i zgodnie z (6.7) także po odciażeniu, rys. 6b przedstawia rozkład naprężeń wzdłuż powłoki przy zmniejszaniu się Q . Przedstawione wyżej (6.7), (6.8) rozważanie zawiera m.in. jako przypadki szczególne obciążenie powłoki stałym parciem wewnętrznym lub rozciąganie siłą skupioną. Jako przykład przypadku, do którego przeprowadzone wyżej uproszczone rozumowanie nie da się zastosować, można podać powłokę obciążoną parciem hydrostatycznym, przy czym odciażenie odbywa się na skutek ubytku cieczy (rys. 7).

Literatura cytowana w tekście

1. J. E. ADKINS, R. S. RIVLIN, *Phil. Trans. A*, 244 (1952).
2. С. А. АЛЕКСЕЕВ, *Кольцеобразная упругая мембрана под действием поперечной силы, приложенной к жесткому центрально расположенному диску*, Изв. Сб. АН СССР, 10 (1951).
3. P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
4. E. A. DAVIS, *Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses*, *Trans. ASME*, 65 (1943), A-187.
5. E. S. DAVIS, *Yielding and fracture of medium carbon steel under combined stress*, *J. Appl. Mech.*, 1, 1954.
6. И. И. ФЕДИК, *Безмоментные ортотропные оболочки вращения при больших деформациях*, Труды всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Киев 1962.
7. И. И. ФЕДИК, *Некоторые задачи равновесия ортотропных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Теория оболочек и пластин, Изд. АН Арм ССР, Эревань 1964.
8. A. GLEYZAL, *Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure*, *J. Appl. Mech.*, 3, 1948.
9. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Исследование работы круглой мембраны при больших прогибах за пределом упругости*, Изв. Сб., (1951).
10. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех. 6, 21 (1957).
11. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., 6, 25 (1961).
12. A. S. GRIGORIEV, *The stress state and the carrying capacity of flexible plates and shells at large deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN, Warszawa 1964, repr. *Non-classical Shells Problems*, Proc. IASS Symp., Warsaw, sept. 1963.
13. А. В. ГУБЕНКО и др., *Пневматические строительные конструкции*, Гос. Изд. Лит. по Строит. Арх. и Строит. Мат., Москва 1963.

14. О. ХОФМАН, Т. САХС, *Введение в теорию эластичности для инженеров*, ГНТИ, Москва 1957.
15. И. В. КЕППЕН, *Большие прогибы круглой пластинки под действием равномерного распределенного давления*, Научные труды МПИ, 7-8, 1957.
16. И. В. КЕППЕН, *Конечные деформации безмоментной оболочки вращения под действием гидростатического давления*, Сб. Расчеты на прочность, Машгиз, М., 6, 1960.
17. А. Н. КРЫЛОВ, *Лекции о приближенных вычислениях*, Изд. АН СССР, Ленинград 1933.
18. W. T. LANKFORD, E. SEIBEL, *Some problems in unstable plastic flow under biaxial tensions*, Metals Technol, August 1947.
19. И. С. МАМЕДОВ, *Большие прогибы ортотропной мембраны*, Инж. Ж. АН СССР, 1, 3 (1963).
20. Z. MARCINIAK, *Analiza stateczności cienkościennej powłoki walcowej poddanej rozciąganiu w stanie plastycznym*, Rozpr. Inżyn., 10 (1959).
21. A. NÁDÁI, *Theory of flow and fracture of solids*, New York-Toronto-London 1950.
22. Я. ОРКИШ, *Большие деформации безмоментных конических оболочек вращения*, Инж. Ж. АН СССР, 5 (1965).
23. Я. ОРКИШ, *Равновесие безмоментных оболочек вращения из каучукоподобных материалов*, Изв. АН СССР, ОТН, 4(1965).
24. F. OTTO, R. TROSTEL, *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Fachverlag, Frankfurt-Berlin 1962.
25. Ю. Т. ПАНОВКО, И. И. ГУБАНОВА, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Изд. наука, Москва 1964.
26. TRAN-LYU-CZONG, Изв. АН СССР, ОТН. Мех. i Маш., 1964.
27. L. TRELOAR, *The physics of rubber elasticity*, Oxford 1948.
28. N. A. WEIL, *Approximation to plastic behavior of circular membrans*, Proc. of The ASCE 83 (1957), 1139.
29. N. A. WEIL, *Rupture characteristics of safety diaphragms*, J. Appl. Mech., 26 (1959), 621.
30. N. A. WEIL, *Tensile instability of thin-walled cylinders of finite length*, Int. J. Mech. Sci. Pergamon Press Ltd., 5 (1963), 487-506.
31. A. N. WEIL, N. M. NEWMARK, *Large plastic deformations of circular membrans*, J. Appl. Mech., 4, 1955.
32. Z. WESOŁOWSKI, *The axially symmetric problem of stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., 3, 15 (1963).
33. A. E. GREEN and J. E. ADKINS, *Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics*, Clarendon Press, Oxford 1960.

Р е з ю м е

ПРОБЛЕМА РАЗГРУЗКИ ОСЕ-СИММЕТРИЧЕСКИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Существующие до сих пор работы, по большим неупругим деформациям осе-симметрических оболочек вращения, посвящены процессу нагрузки. В настоящей же работе рассматривается вопрос о разгрузке таких оболочек, т.е. расширяются в этом смысле работы [11 и 12]. При этом предполагается линейный закон разгрузки (в координатной системе логарифмические деформации — действительные напряжения), т.е. рассуждения относятся, тем самым, к металлическим оболочкам. В результате рассуждений получено дифференциальное уравнение процесса разгрузки рассматриваемых оболочек: (3.12) в случае когда $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$, а также (3.19) в так называемой зоне складок, когда $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 = 0$.

Кроме того, проводится анализ возможности упрощения этих уравнений и даются точные решения для нескольких самых простых случаев.

Summary

UNLOADING PROCESS OF THE ROTATIONALLY SYMMETRIC MEMBRANE SHELLS
WITH LARGE DEFORMATIONS

All the papers dealing with large unelastic deformations of rotationally symmetric shells in membrane state of stress are concerned with the loading process. In the present paper being the extension of the results given in [11 and 12] the unloading process of such shells is investigated. Since only metallic shells are considered the linear unloading law (in the logarithmic strain — true stress coordinates) is assumed. The differential equation (3.12) is obtained for the case $\sigma_1 > 0$, and $\sigma_2 > 0$, and equation (3.19) in folded zone where $\sigma_1 > 0$ and $\sigma_2 = 0$. Moreover, an analysis of possible simplification of these equations is given. The exact solutions of some simple particular cases are presented.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI
I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lipca 1964 r.
