

WPLYW EFEKTÓW DYNAMICZNYCH
NA PRZEBIEG PROCESÓW CIĄNIENIA METALI

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

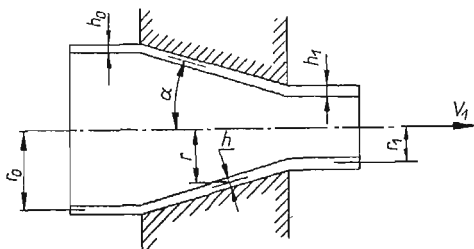
W teoretycznych rozwiązaniach procesów obróbki plastycznej metali, mimo że każdy z nich przebiega z określoną prędkością, przyjmuje się, że zarówno siły bezwładności w równaniach równowagi, jak i wzrost oporu plastycznego przy większych prędkościach odkształcania są pomijalnie małe. W większości przypadków praktycznych takie quasi-statyczne podejście nie prowadzi do większych błędów, a nawet jest w pełni uzasadnione z uwagi na to, że z konieczności w rozwiązaniach tych przyjmuje się szereg innych założeń upraszczających. Istnieje jednak szereg przypadków, w których pominięcie efektów dynamicznych może dać bardzo duże błędy. Dotyczy to zwłaszcza uwzględnienia lepkości materiału, przejawiającej się w zależności oporu plastycznego od prędkości odkształcania. Jak wiadomo [1] dla miękkiej stali przy prędkości odkształcania większej od $\dot{\epsilon} = 100 \text{ sek.}^{-1}$ granica plastyczności na rozciąganie ma dwukrotnie większą wartość od statycznej. Ta czułość metali na prędkość odkształcania szczególnie wzrasta w podwyższonych temperaturach, w jakich często przebiegają procesy obróbki plastycznej. W procesach ciągnięcia cienkich drutów, blach oraz rur o małej średnicy prędkości odkształcania osiągają często bardzo duże wielkości i ich wpływ na opór plastyczny materiału nie może być pominięty. Znaczenie praktyczne ma również zbadanie wpływu nagłych zmian prędkości (szarpnięcia), wywołanych wadliwym działaniem lub obsługą ciągarok. Związane z takim szarpnięciem przyspieszenia mogą prowadzić do zerwania drutu lub rury.

Poniżej podano rozwiązania niektórych procesów ciągnięcia z uwzględnieniem zarówno sił bezwładności, jak i efektów prędkości odkształcania. W przypadku ciągnięcia rury uzyskano rozwiązanie ściśle drogą numerycznego całkowania. Dla procesów ciągnięcia blach i drutów próby ścisłego rozwiązania zagadnienia trafiają na bardzo duże trudności. Z tego względu w celu oceny efektów dynamicznych i wpływu lepkości materiału przedstawiono przybliżone rozwiązania oparte na założeniu uproszczonego schematu odkształcania materiału. Założenie takie pozwala uzyskać proste rozwiązania w postaci zamkniętej.

1. Ciągnięcie rury przez stożkową matrycę

Rozpatrzmy proces ciągnięcia rury o początkowym promieniu r_0 i grubości ścianki h_0 przez stożkową matrycę (rys. 1) uwzględniając wpływ sił bezwładności. Stan naprężenia w ściance rury można uważać za błonowy, ponieważ grubość

ścianki jest mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami, co pozwala pominąć zmianę naprężeń po grubości. Nacisk p pomiędzy rurą a ścianką matrycy jest bardzo mały w porównaniu z naprężeniami i może być pominięty w warunku pla-



Rys. 1

styczności. W każdym punkcie należy wyznaczyć cztery niewiadome: naprężenie wzdłuż tworzącej σ_r , naprężenie obwodowe σ_t , grubość ścianki h oraz prędkość płynięcia materiału wzdłuż tworzącej v .

W równaniu ruchu elementarnej cząstki materiału oprócz sił wynikających z działania naprężeń należy uwzględnić siłę bezwładności przypadającą na jednostkę objętości. Siła ta równa się

$$(1.1) \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right),$$

gdzie ρ jest gęstością materiału, t — czasem, a r — promieniem rozpatrywanego elementu rury. W wyrażeniu tym założono, że prędkość płynięcia zależy również od czasu, a więc $v = v(r, t)$. Jest to związane z możliwością zmiany prędkości ciągnięcia rury w przekroju wyjściowym, w którym $v_1 = v_1(t)$. Proces jest w takim przypadku niestacjonarny i wszystkie poszukiwane wielkości są zależne zarówno od promienia r jak i od czasu. Odpowiedni układ równań różniczkowych cząstkowych ma niepełną liczbę charakterystyk rzeczywistych i jego rozwiązanie napotyka bardzo duże trudności. Z tego względu ograniczymy się do zbadania jedynie stacjonarnego przebiegu procesu ciągnięcia przyjmując, że prędkość ciągnięcia w przekroju wyjściowym nie zmienia się, a więc $v_0 = \text{const}$.

W takim przypadku w wyrażeniu (1.1) na siłę bezwładności znika pierwszy człon $\partial v / \partial t$ w nawiasie, a równanie ruchu przyjmuje uproszczoną postać

$$(1.2) \quad \frac{d(\sigma_r r h)}{dr} - \sigma_t h - \rho \frac{hr}{\sin \alpha} v \frac{dv}{dr} = 0.$$

W równaniu tym pominięto wpływ tarcia materiału o matrycę, ponieważ celem naszym jest zbadanie efektów dynamicznych. Zwracamy uwagę, że siły tarcia mogą być bez żadnych trudności uwzględnione w sposób pokazany w pracy H. W. SWIFTA [2].

Warunek plastyczności wyraża się równością

$$(1.3) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = 3k^2.$$

Chwilowo przyjmijmy, że $k = \text{const}$, a więc że granica plastyczności materiału jest niezależna od stanu odkształcenia i od prędkości odkształcenia. Dalej omówimy sposób uwzględnienia w rozwiązaniu zarówno zjawiska wzmocnienia, jak i czułości materiału na prędkość odkształcania.

Dalszymi równaniami są: związek między prędkością v a naprężeniami

$$(1.4) \quad \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} \frac{2\sigma_r - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_r},$$

oraz warunek nieściśliwości materiału

$$(1.5) \quad \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + \frac{v}{h} \frac{dh}{dr} = 0.$$

Z równań (1.4) i (1.5) można wyrugować prędkość v . W wyniku otrzymujemy równanie

$$(1.6) \quad \frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r} \frac{\sigma_r + \sigma_t}{\sigma_r - 2\sigma_t}.$$

Naprężenia przedstawimy w znany sposób za pomocą jednej funkcji ω

$$(1.7) \quad \sigma_r = 2k \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_t = 2k \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right).$$

Jak wiadomo, wyrażenia (1.7) spełniają tożsamościowo warunek plastyczności (1.3).

Za pomocą równania (1.6) można wyrugować grubość h z równania (1.2). Podstawiając następnie wyrażenia (1.7) oraz wyrażenie (1.4) na pochodną dv/dr otrzymujemy ostatecznie równanie

$$(1.8) \quad \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{r} \frac{3 + \frac{\rho}{k} \frac{v^2}{\sin \alpha} \left[2 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right]}{2 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \left[\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right]}.$$

Podstawiając wyrażenia (1.7) do równań (1.4) i (1.6) otrzymujemy dwa pozostałe równania

$$(1.9) \quad \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r} \frac{2 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)},$$

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{h}{r} \frac{\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Zagadnienie zostało więc sprowadzone do całkowania typowego układu równań o budowie

$$\omega' = F_1(\omega, v, r), \quad v' = F_2(v, \omega, r), \quad h' = F_3(h, \omega, r),$$

z warunkami brzegowymi (rys. 1)

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{2}{3} \pi \\ h = h_0 \end{array} \right\} \text{ dla } r = r_0 \quad \text{oraz} \quad v = v_1 \quad \text{dla } r = r_1.$$

Warunek $\omega_{r=r_0} = \frac{2}{3}\pi$ wynika z zależności (1.7) po podstawieniu $\sigma_r = 0$ i $\sigma_t = -2k$ dla $r = r_0$. Ostatni z powyższych warunków na $v_{r=r_1}$ jest niedogodny zarówno dla przebiegu całkowania, jak i ze względu na zakres ważności otrzymanych wyników, ponieważ w odróżnieniu od obu pozostałych dotyczy on przekroju wyjściowego rury. Tak postawione zagadnienie brzegowe zmusza do założenia od razu wielkości obu promieni r_0 i r_1 . Jeżeli jednak jako znaną wielkość przyjmiemy prędkość ruchu rury przed wejściem w matrycę, a więc $v_{r=r_0} = v_0$, to dowolny promień w uzyskanych zależnościach $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$, $h(r)$ i $v(r)$ może być uznany za promień końcowy r_1 . Rozwiązanie będzie więc ważne dla dowolnej redukcji średnicy $(r_0 - r_1)/r_0$ rury o początkowym promieniu r_0 . Ostatecznie więc przyjmiemy warunki brzegowe w postaci

$$(1.10) \quad \omega = \omega_0 = \frac{2}{3} \pi, \quad h = h_0 \quad \text{i} \quad v = v_0 \quad \text{dla } r = r_0.$$

W przypadku konieczności uzyskania rozwiązania dla określonej prędkości v_1 można je otrzymać drogą interpolacji.

Układ równań (1.8) i (1.9) rozwiążemy metodą kolejnych przybliżeń Picarda (por. np. [3]) przyjmując jako pierwsze przybliżenie wartości brzegowe poszukiwanych funkcji, a więc

$$\omega_{(1)}(r) = \omega_0, \quad h_{(1)}(r) = h_0, \quad v_{(1)}(r) = v_0.$$

Drugie przybliżenie otrzymamy przez całkowanie równań

$$\omega'_{(2)} = F_1(\omega_0, v_0, r), \quad v'_{(2)} = F_2(v_0, \omega_0, r), \quad h'_{(2)} = F_3(h_0, \omega_0, r),$$

gdzie przez F_1 , F_2 , F_3 oznaczono funkcje znajdujące się po prawych stronach równań (1.8) i (1.9). Podobnie obliczenie n -tego przybliżenia polega na całkowaniu równań

$$\begin{aligned} \omega'_{(n)} &= F_1(\omega_{(n-1)}, v_{(n-1)}, r), & v'_{(n)} &= F_2(v_{(n-1)}, \omega_{(n-1)}, r), \\ h'_{(n)} &= F_3(h_{(n-1)}, \omega_{(n-1)}, r). \end{aligned}$$

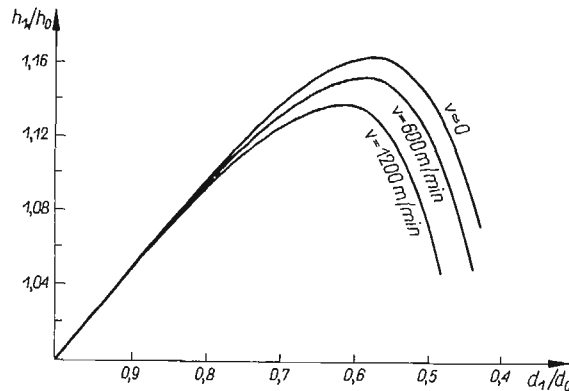
Przy całkowaniu każdego z przybliżeń obowiązują oczywiście warunki brzegowe (1.10). Złożoność budowy równań (1.8) i (1.9) powoduje, że całkowanie można przeprowadzić jedynie w sposób numeryczny metodą różnic skończonych dzieląc całkowitą różnicę promieni $r_0 - r_1$ na szereg odpowiednio małych skończonych przyrostów. Zwracamy uwagę, że procedurę obliczania kolejnych przybliżeń można przeprowadzać od razu do końca dla każdego przyrostu Δr .

Układ równań (1.8) i (1.9) różni się od odpowiedniego układu równań, w którym pominięto siły bezwładności, jedynie członem zawierającym kwadrat prędkości v^2 w liczniku prawej strony równania (1.8). Równania (1.9) są w obu przypadkach

i identyczne. Zanalizujmy poszczególne czynniki członu bezwładnościowego w równaniu (1.8).

Jak łatwo sprawdzić, czynnik $\beta = 2 \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)$ zawiera się w granicach $\sqrt{3}/2 \leq \beta \leq \sqrt{3}$, gdyż $0 > \sigma_t > -\sqrt{3}k$, gdzie $k = \sigma_{pl}/\sqrt{3}$. A więc o rzędzie wielkości członu bezwładnościowego będzie decydować czynnik $\frac{\rho}{k} \frac{v^2}{\sin \alpha}$. Zależna od własności materiału wielkość ρ/k wynosi dla miękkiej stali około $6,25 \cdot 10^{-9}$ sek.²/cm² ($k \approx 1270$ kG/cm²), a dla miedzi $2,25 \cdot 10^{-8}$ sek.²/cm² ($k \approx 400$ kG/cm²). Widać stąd, że na to, aby człon bezwładnościowy w równaniu (1.8) miał praktyczne znaczenie w porównaniu z liczbą 3, występującą obok niego w liczniku, prędkość ciągnięcia musi być rzędu $v = 10^3 - 10^4$ cm/sek. (600–6000 m/min.). Rzeczywiste prędkości ciągnięcia rur na ciągarkach nie przekraczają wielkości 100 m/min. Przy takiej prędkości przy kącie $\alpha = 15^\circ$ człon bezwładnościowy dla miedzi wynosi około 0,0025, a więc jest pomijalnie mały.

Jako przykład liczbowy obliczono przypadek ciągnięcia rury miedzianej przez matrycę o kącie $\alpha = 15^\circ$ przy dwóch różnych prędkościach na wejściu $v_0 = 600$ m/min. i 1200 m/min. Na rysunku 2 pokazano zmianę grubości ścianki przeciągniętej rury w zależności od stosunku średnicy końcowej d_1 do początkowej d_0 .



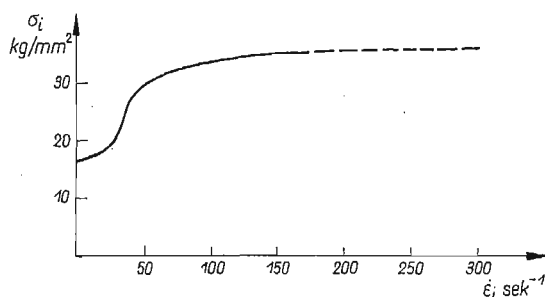
Rys. 2

Przejdźmy obecnie do zbadania wpływu lepkości materiału na przebieg procesu ciągnięcia rury. Jak już wspomniano we wstępie metale w podwyższonej temperaturze wykazują znaczny wzrost oporu plastycznego w miarę zwiększania prędkości odkształcania. Własność tę wykazują również wyraźnie niektóre metale, na przykład miękka stal, w temperaturze pokojowej. Wszystkie znane z literatury dane doświadczalne (por. np. [4,5]) dotyczą próby jednoosiowego rozciągania z dużymi prędkościami. Uwzględnienie efektu czułości materiału na prędkość odkształcania w obliczeniach procesów, w których stan naprężenia jest złożony, wymaga przyjęcia pewnej hipotezy pozwalającej uogólnić wyniki uzyskane z próby jednoosiowego rozciągania na dowolny stan naprężenia. Jedną z najprostszych hipotez jest założenie, że powierzchnia plastyczności Hubera-Misesa $\sigma_i = \text{const}$, uzy-

skana z doświadczeń z małymi prędkościami, ulega w miarę zwiększania intensywności prędkości odkształcania $\dot{\epsilon}_i$ równomiernemu rozszerzeniu. Odpowiada to przyjęciu zależności określającej osiągnięcie stanu plastycznego w postaci $\sigma_i = \sigma_i(\dot{\epsilon}_i)$. Zależność tę dla miękkiej stali w normalnej temperaturze przedstawia rys. 3, otrzymany przez zmianę współrzędnych w odpowiednim wykresie dla jednoosiowego rozciągania, uzyskany przez D. S. CLARKA i P. E. DUWEZA [1]. Warunek plastyczności będzie miał teraz postać

$$(1.11) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = 3k^2(\dot{\epsilon}_i),$$

gdzie wielkość k , równa granicy plastyczności na ścinanie, jest teraz oczywiście zależna od prędkości odkształcania. Pamiętając, że przy czystym ścinaniu $k = \sigma_i$, otrzymamy dla poszczególnych intensywności $\dot{\epsilon}_i$ odpowiednią wartość $k(\dot{\epsilon}_i)$ bezpośrednio z rys. 3.



Rys. 3

Założymy, że analogicznie jak w teorii plastycznego płynięcia wektory przyrostów odkształcania są zwrócone w kierunku normalnym do chwilowej powierzchni plastyczności, określonej dowolną wartością $\dot{\epsilon}_i$. Wobec tego związek (1.4) między prędkością płynięcia v a naprężeniami nie ulegnie zmianie. Również bez zmiany pozostanie warunek nieściśliwości (1.5).

Ograniczając nasze rozważania do prędkości ciągnięcia stosowanych w praktyce ($v_1 < 100$ m/min.) pominiemy człony bezwładnościowe w równaniu (1.2). Jak bowiem poprzednio stwierdzono przy małych prędkościach człony te są pomijalnie małe. Mamy więc

$$(1.12) \quad \frac{d(\sigma_r r h)}{dr} - \sigma_t h = 0.$$

Zagadnienie rozwiążemy metodą kolejnych przybliżeń. Metoda ta była już poprzednio zastosowana przy uwzględnianiu wzmocnienia materiału [6]. W pierwszym przybliżeniu przyjmiemy, że wielkość stałej k nie zmienia się wzdłuż promienia r , a więc $k = k_0 = \text{const}$. Następnie po wyznaczeniu prędkości płynięcia materiału w każdym punkcie znajdziemy poszczególne składowe prędkości odkształcania ze wzorów

$$(1.13) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{dv}{dr} \sin \alpha, \quad \dot{\epsilon}_t = \frac{v}{r} \sin \alpha, \quad \dot{\epsilon}_h = -\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_t,$$

z kolei intensywność prędkości odkształcenia

$$(1.14) \quad \dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_t^2 + \dot{\epsilon}_h^2)}$$

i wreszcie z rys. 3 wartość $k(\dot{\epsilon}_i)$ w każdym punkcie. Tak wyznaczona zależność stałej k od promienia r stanowi punkt wyjścia dla obliczenia drugiego przybliżenia. W warunku (1.11) możemy bowiem przyjąć, że prawa strona jest znaną funkcją współrzędnej r

$$(1.15) \quad \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_t + \sigma_t^2 = 3k^2(r).$$

Rugując jak poprzednio h z równania (1.12) oraz podstawiając wyrażenia (1.7), spełniające tożsamościowo warunek (1.15), otrzymujemy ostatecznie równanie z jedną niewiadomą funkcją ω

$$(1.16) \quad \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{r} \frac{3}{2 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \left[\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right]} + \operatorname{ctg}\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \frac{d \ln k}{dr}.$$

Całkując numerycznie równanie (1.16) oraz następnie równanie (1.4) z warunkami brzegowymi (1.10) otrzymujemy nowy rozkład prędkości v wzdłuż promienia. Pozwala to obliczyć następne przybliżenie intensywności $\dot{\epsilon}_i$ dla każdego r za pomocą wzorów (1.13) i (1.14), a następnie z rys. 3 nową zależność $k(r)$. Teraz w identyczny sposób możemy obliczyć trzecie przybliżenie itd. Czynności te przerywamy, gdy dwa kolejne przybliżenia są wystarczająco bliskie. W praktyce różnica między drugim i trzecim przybliżeniem jest mniejsza od 3%. Tak więc drugie przybliżenie jest dla celów praktycznych wystarczająco dokładne.

Ocenę, kiedy w przypadku ciągnięcia rur stalowych na zimno lepkość materiału może mieć istotny wpływ, można przeprowadzić w bardzo prosty sposób. Jak wiadomo, przy ciągnięciu rur zmiana grubości ścianki nie przekracza 15%. Można więc w przybliżeniu założyć, że prędkość ciągnięcia w dowolnym przekroju równa się $v \approx v_1 r_1 / r$. Z zależności (1.13) i (1.14) wynika, że intensywność prędkości odkształcenia równa się $\dot{\epsilon}_i \approx \frac{v_1 r_1}{r_2} \sin \alpha$. Osiąga ona największą wartość $\dot{\epsilon}_{i \max} \approx \frac{v_1}{r_1} \sin \alpha$ w przekroju wyjściowym ($r = r_1$). Z wyrażenia tego wynika, że nawet przy normalnie stosowanych prędkościach ciągnięcia (~ 20 m/min) intensywność prędkości odkształcenia osiąga bardzo duże wartości w przypadku ciągnięcia rurek o małej średnicy. Na przykład dla $v_1 = 20$ m/min. i $r_1 = 1$ mm otrzymujemy przy kącie $\alpha = 15^\circ$ wielkość $\dot{\epsilon}_{i \max} = 86,5$ sek.⁻¹. Jak widać z rys. 3 przy takiej prędkości odkształcenia opór plastyczny stali wzrasta ponad dwukrotnie, a więc efekt lepkości nie może być pominięty w rozwiązaniu.

2. Ciągnięcie blach i płaskowników

Istniejąca teoria ciągnięcia przez klinową matrycę [7,8] została opracowana dla płaskiego stanu odkształcenia z pominięciem wzmocnienia i lepkości materiału oraz efektów dynamicznych. Uwzględnienie tych zjawisk w rozwiązaniu napotyka duże trudności matematyczne.

Równania ruchu w dowolnie obranym układzie współrzędnych prostokątnych x, y mają postać

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ są normalnie stosowanymi oznaczeniami naprężeń, a v_x i v_y prędkościami płynięcia materiału odpowiednio w kierunku x i y . Gęstość materiału oznaczono jak poprzednio przez ρ . Wyrażenia w nawiasach oznaczają całkowite przyśpieszenie cząstki materiału, obliczane jako suma pochodnej lokalnej i pochodnej konwekcyjnej odpowiedniej składowej prędkości. W przypadku procesu stacjonarnego, gdy prędkość ciągnięcia materiału w przekroju wyjściowym jest stała, pochodne względem czasu t znikają.

Równania (2.1) wraz z warunkami plastycznego płynięcia Lévy'ego-Misesa

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{1}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{1}{\sigma_y - \sigma_x} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \frac{1}{4\tau_{xy}}$$

i warunkiem plastyczności

$$(2.3) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

tworzą układ pięciu równań z pięcioma poszukiwanymi funkcjami $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v_x$ i v_y .

Niestety układu tego nie udaje się rozwiązać nawet dla procesu stacjonarnego i przy pominięciu efektów wzmocnienia i lepkości materiału. W szczególnym przypadku dynamicznego wciskania stempla w ośrodek plastyczny A. J. M. SPENCER [9] uzyskał rozwiązanie przybliżone metodą perturbacji. Rozwiązanie dynamiczne otrzymuje się jako perturbację znanego rozwiązania quasi-statycznego. SPENCER nie uwzględnił wzmocnienia i lepkości i nie rozpatrywał innych zagadnień dynamicznych w płaskim stanie odkształcenia.

Ocenę wpływu efektu lepkości i sił bezwładności przy ciągnięciu blachy przeprowadzimy w sposób przybliżony, zakładając walcowy przepływ materiału przez matrycę. Uproszczenie takie stosowane z pominięciem efektów dynamicznych i lepkości w obliczeniach praktycznych [10] daje bardzo dobre przybliżenie w przypadkach, gdy kąt α matrycy jest niewielki, a redukcja grubości blachy dostatecznie duża. Zagadnienie to zostało wyczerpująco zbadane przez R. HILLA [7].

Przyjmijmy biegunowy układ współrzędnych r, ϑ ze środkiem O w punkcie przecięcia przedłużeń obu ścian matrycy (rys. 4). Zagadnienie rozpatrzmy dla najbardziej ogólnego przypadku procesu niestacjonarnego, gdy prędkość ciągnięcia w przekroju wyjściowym jest zmienna w czasie, a więc $v_1 = v_1(t)$. Pozwoli to zanalizować wpływ nagłych zmian prędkości ciągnięcia (szarpnięć) na przebieg procesu. Zgodnie z przyjętym założeniem o walcowym płynięciu materiału wszystkie poszukiwane wielkości będą funkcjami tylko promienia r i czasu t . W każdym punkcie należy wyznaczyć trzy niewiadome: naprężenie promieniowe $\sigma_r(r, t)$, naprężenie

obwodowe $\sigma_\theta(r, t)$, oraz promieniową prędkość pływnięcia $v(r, t)$. Pozostałe składowe naprężenia $\tau_{r\theta}$ i prędkości v_θ są równe zeru.

Układ trzech równań tworzą:
równanie ruchu

$$(2.4) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0,$$

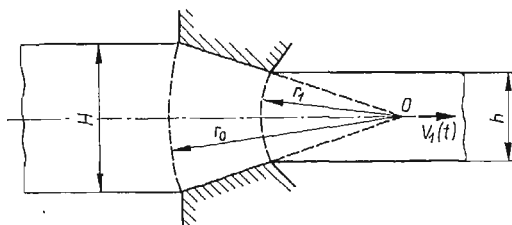
warunek nieściśliwości materiału

$$(2.5) \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

oraz warunek plastyczności

$$(2.6) \quad \sigma_r - \sigma_\theta = 2k,$$

w którym chwilowo pominiemy wzmocnienie i lepkość ($k = \text{const}$). Zgodnie z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa granica plastyczności na ścinanie równa się $k = \sigma_{p1}/\sqrt{3}$, gdzie σ_{p1} oznacza granicę plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu.



Rys. 4

Rozkład prędkości pływnięcia otrzymamy przez scałkowanie równania (2.5) z warunkiem brzegowym $v_{r=r_1} = -v_1(t)$. Wynika stąd zależność

$$(2.7) \quad v = -\frac{r_1}{r} v_1(t).$$

Po podstawieniu zależności (2.7) i (2.6) do równania ruchu (2.4) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne z jedną niewiadomą funkcją σ_r . Równanie to daje się scałkować w elementarny sposób, ale trudności sprawia wyznaczenie stałej całkowania. Jeżeli bowiem przed wejściem w matrycę znajduje się znaczna długość ciągniętej blachy o masie M na jednostkę szerokości, to przy nagłej zmianie prędkości w przekroju wyjściowym, określonej przyspieszeniem dv_1/dt , doznaje ona również przyspieszenia równego $\frac{r_1}{r_0} \frac{dv_1}{dt}$, co wynika z zależności (2.7). Dla nadania masie M takiego przyspieszenia musi na nią działać w przekroju wyjściowym matrycy ($r = r_0$) naprężenie $\sigma_r = \frac{M}{H} \frac{r_1}{r_0} \frac{dv_1}{dt}$. Przy dużej długości blachy przed matrycą wielkość tego naprężenia może być znaczna. W takim przypadku szarpnięcia mogą silnie wpływać na przebieg procesu ciągnięcia zwiększając naprężenia, a nawet mogą wywołać zerwanie blachy.

Ze względu na to, że wielkość masy M może być określona tylko przy rozpatrywaniu konkretnych zagadnień, a sposób uwzględnienia jej wpływu omówiono powyżej, ograniczymy się tu do zbadania wpływu przyśpieszeń jedynie w obszarze odkształcenia plastycznego przyjmując, że proces znajduje się w końcowym stadium gdy swobodny koniec blachy dochodzi do wejściowego przekroju matrycy. W tym przypadku, po uwzględnieniu warunku brzegowego w postaci $\sigma_r = 0$ dla $r = r_0$, otrzymujemy wyrażenie na naprężenie promieniowe

$$(2.8) \quad \sigma_r = 2k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(\frac{r_1^2}{r^2} - \frac{r_1^2}{r_0^2} \right) + \rho \frac{dv_1}{dt} r_1 \ln \frac{r_0}{r}.$$

Naprężenie obwodowe σ_θ można teraz otrzymać bezpośrednio z warunku plastyczności (2.6).

Pierwszy człon w zależności (2.8) przedstawia rozwiązanie quasi-statyczne, odpowiadające pominięciu członów zawierających prędkość v w równaniu (2.4). Drugi człon przedstawia wpływ przyśpieszenia wynikającego ze zmiany prędkości, jakiej doznaje każda cząstka nawet przy procesie stacjonarnym ($v_1 = \text{const}$) przechodząc w coraz węższą część matrycy. Jak łatwo zauważyć, człon ten daje istotne różnice w wielkości naprężeń dopiero przy bardzo dużych prędkościach ciągnięcia, jakich nie stosuje się w praktyce. Obliczmy tak zwaną redukcję graniczną, wynikającą z warunku, że naprężenie σ_r w przekroju wyjściowym ($r = r_1$) może być co najwyżej równe $2k$. Dla procesu ustalonego warunek ten prowadzi do równania

$$\ln \left(\frac{r_0}{r_1} \right)_{\text{gr}} - 1 - \frac{\rho v_1^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)_{\text{gr}}^2 \right] = 0.$$

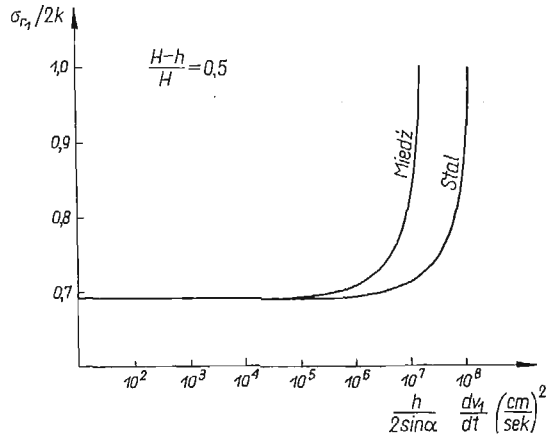
Przy pominięciu członu dynamicznego otrzymujemy stąd graniczną wartość redukcji $\left(\frac{H-h}{H} \right)_{\text{gr}} \approx 0,632$. Zmienia się ona o około 5% $\left[\left(\frac{H-h}{H} \right)_{\text{gr}} \approx 0,600 \right]$ dopiero przy prędkościach ciągnięcia dla miedzi $v_1 \approx 1800$ m/min., a dla miękkiej stali $v_1 \approx 2500$ m/min. Wynika stąd, że pominięcie tego członu przy rozpatrywaniu rzeczywistych procesów jest w pełni uzasadnione. †

Trzeci człon w wyrażeniu (2.8) przedstawia wpływ nagłej zmiany prędkości ciągnięcia (szarpnięcia). Zbadamy, jak wpływa on na wielkość naprężeń σ_r w przekroju wyjściowym. Pomijając wpływ drugiego członu w (2.8) otrzymujemy

$$\sigma_{r(r=r_1)} = 2k \left(1 + \frac{\rho}{2k} \frac{h}{2 \sin \alpha} \frac{dv_1}{dt} \right).$$

Obecność grubości h w wyrażeniu w nawiasie wskazuje, że wpływ szarpnięcia jest większy przy dużych grubościach ciągnionego materiału. Na rysunku 5 pokazano w półlogarytmicznej skali zależność naprężenia w przekroju wyjściowym od grubości i przyśpieszenia dla miękkiej stali i miedzi obliczone dla redukcji $(H-h)/H = 0,5$. Jak widać, dopiero bardzo duże przyśpieszenia dv_1/dt mają istotny wpływ na przebieg końcowej fazy procesu ciągnięcia. Dla mniejszych przyśpieszeń siły bezwładności występujące w obszarze odkształcania są pomijalnie małe. W takim przypadku przy analizie wpływu szarpnięcia wystarczy uwzględnić jedynie siłę bezwładności blachy znajdującej się przed wejściem w matrycę.

Przejdźmy do zbadania wpływu lepkości. Zagadnienie rozwiążemy dla spotykanych w praktyce prędkości ciągnięcia ($v_1 < 50$ m/min.). W równaniu (2.4) pominiemy zatem człony zawierające v , przyjmując że również przyspieszenie dv_1/dt jest pomijal-



Rys. 5

nie małe. Dla otrzymania wyniku w postaci zamkniętej przyjmiemy liniową zależność między granicą plastyczności stali przy prostym rozciąganiu a prędkością odkształcenia

$$\sigma = \sigma_0 + H\dot{\epsilon}.$$

Następnie podobnie jak przy ciągnięciu rury założymy, że istnieje stała zależność $\sigma_i = \sigma_i(\dot{\epsilon}_i)$ obowiązująca dla dowolnego stanu naprężenia. W naszym przypadku prędkości odkształcenia określone są zależnościami

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{r_1}{r^2} v_1, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{v}{r} = -\frac{r_1}{r^2} v_1, \quad \dot{\epsilon}_z = 0,$$

gdyż wyrażenie (2.7) na prędkość nie ulega zmianie.

Wobec tego intensywność prędkości odkształcenia równa się

$$\dot{\epsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{6} [(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + (\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z)^2 + (\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r)^2]} = \frac{r_1 v_1}{\sqrt{3} r^2}.$$

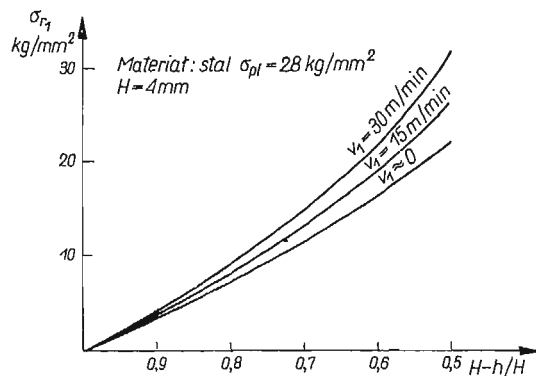
Zamiast warunku plastyczności (2.6) mamy więc teraz związek

$$(2.9) \quad \sigma_r - \sigma_\theta = 2k \left(1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H}{k} \frac{r_1}{r^2} v_1 \right).$$

Po scałkowaniu i wyznaczeniu stałej otrzymujemy

$$(2.10) \quad \sigma_r = 2k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{2}{3\sqrt{3}} H \frac{v_1}{r_1} \left(\frac{r_1^2}{r^2} - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right).$$

Na rysunku 6 pokazano wpływ prędkości na zmianę naprężeń σ_{r_1} w przekroju wyjściowym dla miękkiej stali o granicy plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu $\sigma_{p1} = 2800 \text{ kg/cm}^2$. Jak widać, przy praktycznie stosowanych prędkościach

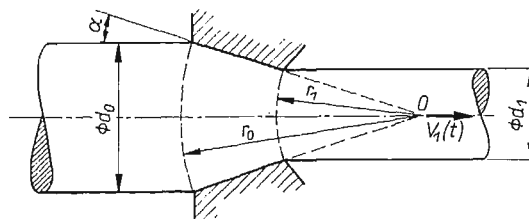


Rys. 6

ciągnięcia cienkich blach lepkość stali znacznie zwiększa siłę konieczną dla przeprowadzenia procesu.

3. Ciągnięcie drutu i prętów

W podobny sposób można zbadać wpływ efektów dynamicznych na przebieg procesu ciągnięcia drutu przez stożkową matrycę (rys. 7). Dla uproszczenia założymy, że wszystkie cząstki materiału w obszarze odkształcania poruszają się wzdłuż promieni wycinka kuli ograniczonego ścianą matrycy. Zarówno stan odkształcenia jak i naprężenia zależą tylko od jednej współrzędnej r , a dla niestacjonarnego procesu również od czasu t . Uproszczenie takie stosowane w obliczeniach praktycznych [10] z pominięciem efektów dynamicznych i lepkości daje dobre wyniki dla małych kątów α matrycy i znacznej redukcji grubości drutu przy jednym przejściu. W rozwiązaniu tym pominięte są siły tarcia między drutem a matrycą.



Rys. 7

W każdym punkcie należy wyznaczyć naprężenie promieniowe $\sigma_r(r, t)$, naprężenie obwodowe $\sigma_\theta(r, t)$ oraz promieniową prędkość płynięcia $v(r, t)$. Naprężenie styczne $\tau_{r,\theta}$ i składowa prędkości v_θ są równe zero.

Odpowiednie równania mają teraz postać

$$(3.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{2(\sigma_s - \sigma_r)}{r} - \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = 0, \quad \sigma_r - \sigma_s = 2k.$$

W warunku plastyczności pominięto wzmocnienie i lepkość materiału.

Postępując analogicznie jak w poprzednim paragrafie otrzymujemy wyrażenie na promieniową składową naprężenia

$$\sigma_r = 4k \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(\frac{r_1^4}{r^4} - \frac{r_1^4}{r_0^4} \right) + \rho \frac{dv_1}{dt} r_1 \left(\frac{r_1}{r} - \frac{r_1}{r_0} \right),$$

gdzie $v_1(t)$ jest prędkością ciągnięcia w przekroju wyjściowym. Nie podajemy tu analizy wielkości poszczególnych członów tego wyrażenia, gdyż daje ona podobne wyniki jak w przypadku ciągnięcia blach.

Analiza wpływu lepkości materiału może być przeprowadzona w taki sam sposób jak dla blach. Wpływ ten jest tym większy, im mniejsza jest średnica ciągnionego drutu.

Literatura cytowana w tekście

1. D. S. CLARK, P. E. DUWEZ, *The influence of strain rate on some tensile properties of steel* Proc. ASTM, **50** (1950), 560.
2. H. W. SWIFT, *Stresses and strains in tube-drawing*, Phil. Mag., **40** (1949), 655.
3. А.Н. КРЫЛОВ, *Лекции о приближенных вычислениях*, Москва 1954.
4. P. G. SHEWMOR, V. F. ZACKAY, *Response of metals to high velocity deformation*, Proc. Metallurgical Soc. Conf., 1960.
5. A. NÁDÁI, *Theory of flow and fracture of solids*, McGraw-Hill, 1950.
6. W. SZCZEPIŃSKI, *Axially symmetric plane stress problem of a plastic strain-hardening body*, Arch. Mech. Stos., **15**(1963), 611.
7. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1956.
8. W. W. SOKOŁOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, 1957.
9. A. J. M. SPENCER, *The dynamic plane deformation of an ideal plastic-rigid solid*, J. Mech. Phys. of Solids, **8** (1960), 262.
10. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the theory of plasticity for engineers*, McGraw-Hill, 1953.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ПАРАМЕТРЫ ПРОЦЕССОВ ВОЛОЧЕНИЯ

В работе исследуется влияние сил инерции и вязкости материала на параметры процессов волочения труб, листового материала и проволоки. Для процессов волочения труб получено точное решение путем численного интегрирования. Для процессов волочения листового материала и проволоки вопрос упрощается предполагая, что напряженное и деформированное состояние зависит только от радиуса, в соответствии принятой цилиндрической

или сферической координатной системе. Констатируется, что при обычно применяемых скоростях волочения, влияние сил инерции является пренебрежимо малым. Исследовано, при каких именно ускорениях силы инерции следует учитывать в расчетах. Влияние вязкости материала на напряжения может быть весьма значительным для тонких листов материала, а также для труб и проволок малого диаметра.

Summary

THE INFLUENCE OF INERTIAL FORCES AND STRAIN RATE SENSITIVITY ON THE DRAWING PROCESSES OF METALS

The influence of inertial forces and viscosity of the material on the tube, wire and sheet-drawing processes is investigated. For the tube-drawing process an exact solution is obtained by means of numerical integration. For sheet and wire-drawing, the approximate solution is presented with an assumption that in the cylindrical or spherical coordinates respectively, the stresses and velocities depend on the radius only. It is found that for the drawing velocities used in practice the inertial forces are negligible. However, the strain rate sensitivity of the material cannot be neglected in the solution for thin sheet and wires because the strain rate reaches very high values even for small drawing velocities.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 grudnia 1964 r.
