MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1.3 (1965)

O PEWNYM SPOSOBIE PRZYBLIŻONEGO OBLICZANIA NIELINIOWYCH ZAGADNIEŃ PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

ZYGMUNT THRUN (GDAŃSK)

1. Wstęp

W zagadnieniach przewodnictwa cieplnego, w których granice zmian temperatur nie są zbyt duże, można przyjąć zwykle z dobrym przybliżeniem, że własności termiczne przewodzącego materiału są niezależne od temperatury. Założenie to upraszcza znacznie matematyczne traktowanie problemu. Jednakże w wielu praktycznie ważnych zagadnieniach technicznych (np. ruch i tarcie przy dużych szybkościach, reakcje chemiczne ośrodka, przewodzenie ciepła wywołanego reakcjami termojądrowymi, przewodniki prądu) takie upraszczające założenia mogą prowadzić do poważnych różnic między obliczonym a rzeczywistym rozkładem temperatur. Dla zależnych od temperatury T współczynników przewodnictwa K i pojemności cieplnej c (iloczyn ciepła właściwego i gęstości materiału) równanie przewodnictwa cieplnego staje się nieliniowe. Dla szczególnego przypadku jednowymiarowego i dla półprzestrzeni przy parabolicznej zależności współczynników c, K od temperatury T AWBERY [1] zredukował to równanie nieliniowe do zwyczajnego równania różniczkowego. Następnie HOPKINS [2] podał sposób przybliżonego rozwiązania, jeżeli znane jest rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia liniowego. Najbardziej wyczerpująco i wszechstronnie problem ten opracował BIOT [3] przy zupełnie odmiennym podejściu do zagadnienia na podstawie rachunku wariacyjnego. Niniejsza publikacja ma za zadanie podać przybliżone rozwiązanie zagadnienia przez redukcję do układu zwyczajnych równań nieliniowych.

2. Równania różniczkowe zagadnienia

Dla przypadku anizotropii termicznej równaniem różniczkowym przewodnictwa cieplnego w danym ośrodku Ω jest [4][1]

$$L(T)-A/c=\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{c(T)}\sum_{s=x,y,z}\frac{\partial}{\partial s}\left[K_s(T)\frac{\partial T}{\partial s}\right]-\frac{A}{c(T)}=0, \tag{2.1}$$

gdzie przez A oznaczono ciepło generowane przez jednostkę objętości ośrodka Ω w jednostce czasu. Osie układu współrzędnych x, y, z są tutaj tzw. «głównymi osiami przewodnictwa», a wielkości K_x, K_y, K_z «głównymi współczynnikami przewodnictwa» dla danej anizotropii termicznej ośrodka. Współczynniki K i c są ponadto funkcjami temperatury.

[1] Str. 21, wz. (4).

Niech poza tym będzie warunek początkowy w całym obszarze Ω w postaci

$$t = 0, \quad T = F(x, y, z), \tag{2.2}$$

oraz warunki na brzegu tegoż obszaru

$$\sum_{s=x,y,z} h_s \frac{\partial T}{\partial s} + hT = g(x, y, z, t). \tag{2.3}$$

Zazwyczaj wystarczająco dokładne jest przyjęcie liniowej zależności współczynników przewodnictwa i pojemności cieplnej od temperatury w postaci

$$c = c_0(\alpha + \beta T), \quad K_s = K_{0s}(\alpha_s' + \beta_s' T), \quad s = x, y, z. \tag{2.4}$$

W powyższym wzorze współczynniki c_0 i K_{0s} przedstawiają odpowiednio pojemność i przewodnictwo cieplne materiału ośrodka przewodzącego ciepło przy pewnej danej wartości porównawczej temperatury, zaś α, β, α', β' są stałymi współczynnikami. Możliwe jest także uwzględnienie zależności wyższego rzędu

$$c = c_0(\alpha + \beta T + \gamma T^2), \quad K = K_0(\alpha' + \beta' T + \gamma' T^2).$$

Ograniczymy się jednakże w dalszych rozważaniach do zależności liniowych (2.4). Przybliżone rozwiązanie zagadnienia możemy założyć w postaci wyrażenia:

$$T^*_{(x,y,z,t)} = \varphi_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\varphi_i(x, y, z). \tag{2.5}$$

Jeżeli powyższe przybliżone rozwiązanie oraz zależności (2.4) podstawimy do równania (2.1) i założymy ponadto, aby dla każdej funkcji φ_k spełniona była zależność ortogonalności

$$\iiint_\Omega \left[L(T^*) - \frac{A}{c}\right] \varphi_k dx dy dz = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.6}$$

to otrzymamy następujący układ nieliniowych, zwyczajnych równań różniczkowych:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\dot{a}_i \alpha A_{ik} + \dot{a}_i \beta \left(C_{ik} + \sum_{j=1}^{n} a_j D_{ijk}\right) + \right. \tag{2.7}$$

$$\left. + a_i \sum_{s=x,y,z} \frac{K_{0s}}{c_0} \left(\alpha_s' B_{iks} + \beta_s' E_{iks} + \beta_s' \sum_{j=1}^{n} a_j G_{ijks}\right)\right] = Z_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

W powyższych równaniach wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\dot{a}_i = \frac{da_i}{dt}, \quad A_{ik} = \iiint_\Omega \varphi_i \varphi_k dx dy dz, \quad C_{ik} = \iiint_\Omega \varphi_0 \varphi_i \varphi_k dx dy dz,$$

$$D_{ijk} = \iiint_\Omega \varphi_i \varphi_j \varphi_k dx dy dz, \quad B_{iks} = -\iiint_\Omega \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s^2} \varphi_k dx dy dz,$$

$$E_{iks} = -\iiint_\Omega \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\varphi_0 \varphi_i)\varphi_k dx dy dz, \quad G_{ijks} = -\iiint_\Omega \varphi_k \frac{\partial}{\partial s}\left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial s}\right) dx dy dz, \tag{2.8}$$

$$Z_k = \iiint_\Omega \left\{\frac{A}{c_0} + \sum_{s=x,y,z} \frac{K_{0s}}{c_0} \left[(\alpha_s' + \beta_s' \varphi_0)\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial s^2} + \beta_s' \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial s}\right)^2\right]\right\} \varphi_k dx dy dz.$$

Warunek początkowy (2.2) możemy spełnić w ten sposób, ażeby średni kwadrat błędu

$$I = \iiint_{\Omega} \Big[F(x, y, z) - \varphi_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i(0)\varphi_i(x, y, z)\Big]^2 dx\,dy\,dz \tag{2.9}$$

był jak najmniejszy. Postulat osiągnięcia minimum całki (2.9) prowadzi do znanych warunków koniecznych:

$$\frac{\partial I}{\partial a_i(0)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Jest to układ równań, z którego możemy wyznaczyć wielkości $a_i(0)$.

Dla przypadku izotropii termicznej $K_x = K_y = K_z = K(T)$ równanie (2.1) można znacznie uprościć, wprowadzając bowiem nową zmienną niezależną $\theta = \int_0^T K(T)dT$ i podstawiając stąd do równania (2.1) związki $\partial\theta/\partial s = K\partial T/\partial s$ ($s = x, y, z, t$), otrzymamy równanie uproszczone

$$\frac{c}{K}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \sum_{s=x,y,z} \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} - A = 0. \tag{2.11}$$

Równanie to można traktować jako ważne dla ośrodka o jednostkowym przewodnictwie cieplnym i o współczynniku pojemności cieplnej:

$$\bar{c} = \frac{c}{K}(\theta).$$

Z powyższego wynika, że nieliniowe zagadnienie dla ośrodka o przewodnictwie i pojemności cieplnej, zależnych od temperatury, można zawsze sprowadzić do przypadku o stałym współczynniku przewodnictwa cieplnego. Dlatego też w przypadkach izotropii termicznej wystarczy rozważać zagadnienia, w których tylko współczynnik pojemności cieplnej c jest zależny od temperatury. Układ równań różniczkowych (2.7) uprości się wówczas przez podstawienie

$$\beta_s' = 0, \qquad \alpha_s' = 1, \qquad K_s = K_{0s} = K_0, \tag{2.12}$$

do postaci

$$\sum_{i=1}^{n} \Big[\dot{a}_i\alpha A_{ik} + \dot{a}_i\beta\Big(C_{ik} + \sum_{j=1}^{n} a_j D_{ijk}\Big) + a_i B_{ik}\Big] = Z_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Współczynniki B_{ik} i Z_k oznaczają tu:

$$\begin{aligned} B_{ik} &= \sum_{s=x,y,z} \frac{K_{0s}}{c_0} B_{iks} = -\varkappa_0 \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}\right) \varphi_k\, dx\,dy\,dz, \\ Z_k &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{A}{c_0} + \varkappa_0 \left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2}\right)\right] \varphi_k\, dx\,dy\,dz, \qquad \varkappa_0 = \frac{K_0}{c_0}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

3. Wyznaczanie pierwszego przybliżenia

Zgodnie z założeniem (2.5) pierwsze przybliżenie przyjmujemy w postaci

$$T_1^* = \varphi_0(x, y, z) + a_1(t)\varphi_1(x, y, z). \tag{3.1}$$

Rozważmy najpierw zagadnienie ośrodka termicznie izotropowego. Układ równań (2.13) sprowadza się w tym przypadku do jednego równania nieliniowego

$$\dot{a}_1 \alpha A_{11} + a_1 B_{11} = Z_1 - \beta \dot{a}_1 (C_{11} + a_1 D_{111}), \tag{3.2}$$

dla którego można otrzymać ścisłe rozwiązanie.

a. Dla szczególnego przypadku $Z_1 = 0$, równanie (3.2) można scałkować elementarnie otrzymując rozwiązanie przy warunku początkowym: $t = 0$, $a_1 = a_1(0)$ w postaci

$$a_1(t) = a_1(0) \exp\left\{\frac{-B_{11}t + \beta D_{111}[a_1(0) - a_1]}{\alpha A_{11} + \beta C_{11}}\right\}. \tag{3.3}$$

b. Dla ogólnego przypadku $Z_1 \neq 0$ równanie (3.2) drogą podstawienia

$$\beta D_{111} v_1(\lambda) = \beta[D_{111} a_1(t) + C_{11}] + B_{11} t + \alpha A_{11}, \tag{3.4}$$

$$\beta D_{111} \lambda = \int Z_1(t)\,dt + \frac{B_{11}}{D_{111}}\left(C_{11} + \frac{\alpha}{\beta} A_{11}\right) t,$$

można doprowadzić do prostszej postaci

$$\frac{dv_1}{d\lambda}\left(v_1 - t\frac{B_{11}}{\beta D_{111}}\right) = 1. \tag{3.5}$$

Tak na przykład dla ośrodka, w którym ciepło jest generowane tylko w chwili początkowej, $t = 0$, w intensywności $A(x, y, z, t) = A_0\ (x, y, z)\delta(t)$ (δ — funkcja Diraca) w przypadku $\varphi_0 = 0$ mamy

$$\int Z_1(t)\,dt = \int \frac{\delta(t)}{c_0}\left(\int\int\int A_0 \varphi_1 \,dx\,dy\,dz\right) dt = \int F_0 \delta(t)\,dt = F_0.$$

Stąd za pomocą (3.4) otrzymamy z równania (3.5) równanie liniowe

$$\frac{d\lambda}{dv_1} + \frac{\beta D_{111}}{(\alpha A_{11} + \beta C_{11})}\lambda = v_1 + \frac{F_0}{(\alpha A_{11} + \beta B_{11})},$$

z warunkiem początkowym $\lambda = 0$, $\beta D_{111} v_1(0) = \alpha A_{11} + \beta C_{11}$ i o znanym rozwiązaniu.

Dla różnych równań różniczkowych typu (3.5) gotowe rozwiązania są podane w literaturze [5] [2].

c. *Przykład.* Ogrzewanie muru, którego jedna ściana jest utrzymywana stale w temperaturze $T = \theta_0$, a druga równoległa ściana w odległości l niech będzie izolowana. Warunek początkowy jest dany w postaci $t = 0$, $T = 0$. Początek współrzędnej x zakładamy na ścianie o temperaturze θ_0. Zgodnie z warunkami brzegowymi przyjmujemy pierwsze przybliżenie:

$$T_1^* = \theta_0 + a_1(t) \sin\frac{\pi x}{2l}. \tag{3.6}$$

[2] Str. 236–245.

Po wyznaczeniu współczynników (2.8) i (2.14) oraz stałej początkowej $a_1(0)$ z warunku (2.10) w postaci $a_1(0) = 4\theta/\pi$ rozwiązanie (3.3) przyjmie postać następującego związku:

$$a_1(t) = \frac{-4\theta_0}{\pi}\exp\left\{\frac{-1}{(\alpha+\beta\theta_0)}\left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \varkappa_0 t + \beta\frac{8}{3\pi}\left(\frac{4\theta_0}{\pi}+a_1\right)\right]\right\}. \tag{3.7}$$

Za pomocą tej zależności można też wyznaczyć tzw. «czas przejścia», po którym ściana izolowana ($x = l$) zaczyna się ogrzewać. Ponieważ w tym przypadku musi być $\theta_0 + a_1(t_1) = 0$, więc otrzymamy

$$\frac{\varkappa_0 t_1}{l^2} = (\alpha+\beta\theta_0)\frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) - \beta\theta_0\frac{32}{3\pi^3}\left(\frac{4}{\pi}-1\right). \tag{3.8}$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia liniowego otrzymamy także ze związków (3.7) i (3.8) przez podstawienie $\alpha = 1$, $\beta = 0$:

$$a_1(t) = \frac{-4\theta_0}{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\varkappa_0 t\right], \qquad \frac{\varkappa_0 t_1}{l^2} = \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) = 0{,}0979. \tag{3.9}$$

Dla porównania z wynikami BIOTA załóżmy, że dla granicznych zmian temperatur występujących w danym przykładzie $T = -\theta_0\left(\frac{4}{\pi}-1\right)$ i $T = \theta_0$ współczynnik pojemności cieplnej zmienia się od $c = c_0$ do $c = 2c_0$, czyli $\alpha = \left(2-\frac{\pi}{4}\right)$, $\beta = \pi/4\theta_0$. Rozwiązanie (3.7) oraz «czas przejścia» (3.8) przyjmą tu postać

$$\begin{gathered} a_1(t) = \frac{-4\theta_0}{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\frac{\varkappa_0 t}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\pi}+\frac{a_1}{\theta_0}\right)\right], \\ \frac{\varkappa_0 t_1}{l^2} = \frac{8}{\pi^2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) - \frac{8}{3\pi^2}\left(\frac{4}{\pi}-1\right) = 0{,}122\,. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Powyższy «czas przejścia» otrzymamy też z (3.9) przez podstawienie wartości współczynnika pojemności cieplnej równej 1,25 c_0. BIOT[3] otrzymał wynik $\varkappa_0 t_1/l^2 = 0{,}113$.

d. *Przykład.* Ochładzanie muru z poprzedniego przykładu. Przyjmujemy teraz warunek początkowy $t = 0$, $T = \theta_0$ oraz warunki brzegowe $x = 0$, $T = 0$ i $x = l$, $\partial T/\partial x = 0$. Pierwsze przybliżenie ze względu na jednorodne warunki brzegowe zakładamy w postaci wyrażenia;

$$T_1^* = a_1(t)\sin\frac{\pi x}{2l}. \tag{3.11}$$

Po wyznaczeniu współczynników A_{11}, B_{11}, D_{111} ze wzorów (2.8), (2.14) oraz z zależności (2.10) stałej początkowej $a_1(0) = 4\theta_0/\pi$, rozwiązanie zagadnienia (3.3) otrzymamy w postaci następującej:

$$a_1(t) = \frac{4\theta_0}{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\frac{\varkappa_0 t}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{8}{3\pi}\left(\frac{4\theta_0}{\pi}-a_1\right)\right]. \tag{3.12}$$

Ze związku $a_1 = \theta_0$ otrzymamy czas przejścia:

$$\frac{\varkappa_0 t_1}{l^2} = \alpha\frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) + \beta\theta_0\frac{32}{3\pi^2}\left(\frac{4}{\pi}-1\right). \tag{3.13}$$

[3] Str. 869, wzór (9.15). Uwaga. Łatwo sprawdzić, że podany tam wynik liczbowy 0,106 jest błędny.

Jako szczególny przypadek wzorów (3.12) i (3.13) otrzymamy rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia liniowego przez podstawienie $\alpha = 1$, $\beta = 0$:

$$a_1(t) = \frac{4\theta_0}{\pi}\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \varkappa_0 t\right] \tag{3.14}$$

oraz czas przejścia identyczny z wartością (3.9) otrzymaną dla przykładu ogrzewania muru. Z powyższych związków wynika identyczność sposobu przebiegu procesu ogrzewania i ochładzania dla zagadnienia liniowego oraz zasadnicza różnica tych przebiegów w zagadnieniu nieliniowym.

Dla porównania wyników liczbowych z procesem ogrzewania załóżmy, że dla granicznych zmian temperatur z niniejszego przykładu ($T = 4\theta_0/\pi$ i $T = 0$), współczynnik pojemności cieplnej zmienia się znowu od $c = 2c_0$ do $c = c_0$, czyli $\beta\theta_0 = \pi/4$, $\alpha = 1$. Wzory (3.12) i (3.13) przyjmą wtedy postać

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{4}{\pi}\theta_0 \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \varkappa_0 t + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{\pi} - \frac{a_1}{\theta_0}\right)\right], \\ \frac{\varkappa_0 t_1}{l^2} &= \frac{4}{\pi^2}\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) + \frac{8}{3\pi^2}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) = 0{,}172. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Z porównania wartości (3.10) i (3.15) wynika, że dla zagadnienia nieliniowego proces ochładzania trwa o 41% dłużej od ogrzewania w tych samych granicach temperatur. Wartość liczbową czasu przejścia (3.15) otrzymamy z zagadnienia liniowego, jeżeli podstawimy do (3.9) średnią, efektywną wartość współczynnika pojemności cieplnej, równą 1,76 c_0[4].

Dla ośrodka termicznie anizotropowego w przypadku pierwszego przybliżenia według (3.1) układ (2.7) sprowadza się do równania następującego:

$$\begin{aligned} \alpha A_{11}\dot{a}_1 = &\left(Z_{1s} - \frac{a_1}{c_0}\sum_{s=x,y,z}\alpha_s' K_{0s} B_{11s}\right) + \\ &+ \left[-\beta\dot{a}_1(C_{11} + a_1 D_{111}) - \frac{a_1}{c_0}\sum_{s=x,y,z}\beta_s' K_{0s}(E_{11s} + a_1 G_{111s})\right]. \end{aligned}$$

Przybliżone rozwiązanie można tu otrzymać za pomocą metody perturbacji Poincarego, przy czym wyrażenie w nawiasie kwadratowym przedstawia część nieliniową sprawiającą trudność rozwiązania, którą należy przemnożyć przez mały parametr. Sposób postępowania, typowy dla tej metody, jest analogiczny do pokazanego poniżej obliczenia drugiego przybliżenia.

4. Wyznaczanie drugiego przybliżenia

$$T_2^* = \varphi_0(x, y, z) + a_1(t)\varphi_1(x, y, z) + a_2(t)\varphi_2(x, y, z). \tag{4.1}$$

Zajmiemy się tutaj tylko przypadkiem izotropii termicznej. Z zależności (2.13) otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych nieliniowych, których rozwiązanie przeprowadzimy metodą małego parametru. Sposób postępowania niech objaśni przykład ochładzania muru, dla którego uprzednio obliczono pierwsze przybliżenie.

[4] Por. [3], str. 869–870.

Warunki brzegowe i początkowe przyjmiemy jak w 3d. Przyjmujemy drugie przybliżenie w postaci

$$T_2^* = a_1(t)\sin\frac{\pi x}{2l} + a_2(t)\sin\frac{3\pi x}{2l}. \tag{4.2}$$

Ze związku (2.10) za pomocą danego warunku początkowego wyznaczamy stałe początkowe

$$\frac{a_1(0)}{\theta_0} = \frac{3a_2(0)}{\theta_0} = \frac{4}{\pi}. \tag{4.3}$$

Po wyznaczeniu współczynników (2.8) i (2.14) układ dwóch równań różniczkowych (2.13) przedstawimy w postaci

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\left(\frac{\varkappa_0\pi^2}{\alpha 4l^2}\right)a_1 - \mu\frac{8}{\pi\theta_0}\left[\dot{a}_1\left(\frac{a_2}{15} - \frac{a_1}{3}\right) + \dot{a}_2\left(\frac{a_1}{15} - \frac{9a_2}{35}\right)\right], \\ \dot{a}_2 &= -\left(\frac{\varkappa_0 9\pi^2}{\alpha 4l^2}\right)a_2 - \mu\frac{8}{\pi\theta_0}\left[\dot{a}_1\left(\frac{a_1}{15} - \frac{9a_2}{35}\right) + \dot{a}_2\left(\frac{-9a_1}{35} - \frac{a_2}{9}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.4}$$

gdzie $\mu = \beta\theta_0/\alpha$.

Zgodnie ze znaną metodą «małego parametru» rozwiązanie przybliżone układu równań (4.4) można otrzymać w postaci

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{10}(t) + \mu a_{11}(t) + \mu^2 a_{12}(t) + \ldots, \\ a_2(t) &= a_{20}(t) + \mu a_{21}(t) + \mu^2 a_{22}(t) + \ldots. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dla $\mu = 0$ rozwiązanie pomocnicze układu (4.4) jest rozwiązaniem odpowiedniego zagadnienia liniowego i przy danych warunkach początkowych (4.3) jest równe

$$a_{10}(t) = \frac{4\theta_0}{\pi}e^{-zt}, \qquad a_{20}(t) = \frac{4\theta_0}{3\pi}e^{-9zt}, \tag{4.6}$$

gdzie $z = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\frac{\varkappa_0}{\alpha}$.

Ograniczając się do członów korekcyjnych pierwszego rzędu w (4.5) otrzymamy po prostych przeliczeniach następujące rozwiązanie ostateczne:

$$\frac{a_1(t)}{\theta_0} = \frac{4}{\pi}e^{-zt} + \frac{\beta\theta_0}{\alpha}\frac{128}{\pi^3}\left(\frac{15604}{48195}e^{-zt} - \frac{1}{3}e^{-2zt} + \frac{2}{81}e^{-10zt} - \frac{9}{595}e^{-18zt}\right),$$

$$\frac{a_2(t)}{\theta_0} = \frac{4}{3\pi}e^{-9zt} + \frac{\beta\theta_0}{\alpha}\frac{128}{\pi^3}\left(\frac{2492}{2835}e^{-9zt} - \frac{1}{105}e^{-2zt} - \frac{6}{7}e^{-10zt} - \frac{1}{81}e^{-18zt}\right).$$

Łatwo sprawdzić, że dla $t = 0$, otrzymamy stałe początkowe (4.3).

5. Uwagi końcowe

Powyższe przykłady ilustrują sposób przeprowadzenia przybliżonych obliczeń dla jednowymiarowych zagadnień przepływu ciepła; w sposobie traktowania zagadnień dwu lub trójwymiarowych w danej metodzie nie ma istotnych różnic, zmiana dotyczy jedynie przyjęcia funkcji przybliżeń φ_i. Już pierwsze przybliżenie daje wyniki dostatecznie bliskie rzeczywistości nawet dla czasów stosunkowo krótkich («czasy przejścia» w przykładach), dla dłuższych zaś czasów przybliżenia będą znacznie lepsze.

Literatura cytowana w tekście

1. J. H. AWBERY, *Temperature-Rise in a material of which the thermal properties vary with temperature,* The Proceedings of the Physical Society, **48** (1936), London.
2. M. R. HOPKINS, *Heat conduction in a medium having thermal properties depending on the temperature,* The Proceedings of the Physical Society, **50** (1938), London.
3. M. A. BIOT, *New methods in heat flow analysis with application to flight structures,* J. Aeronaut Sci., **24** (1957).
4. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids,* Oxford 1948.
5. N. H. ABEL, *Oeuvres complètes* Christiania 1839.

Р е з ю м е

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В случае когда коэффициенты теплопроводности и теплоемкости зависят от величины температуры, дифференциальное уравнение теплопроводности становится нелинейным. Приближенное решение предполагается в виде произведений неизвестных функций времени и принятых функций декартовых координат. С использованием принципа ортогональности данного дифференциального уравнения по отдельности к каждой из принятых функций, получена система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, из которых можно определить неизвестные функции времени. В качестве частных случаев из этих решений получаются решения для соответствующих линейных задач. Способы получения первого и второго приближений иллюстрируются примерами.

S u m m a r y

A CERTAIN APPROXIMATE METHOD OF SOLVING NON-LINEAR PROBLEMS OF HEAT CONDUCTION

The partial differential equation governing the flow of heat in a medium for which the thermal conductivity and heat capacity vary with temperature, is non-linear. The approximate solution is assumed in a product form of unknown time-dependent functions and presumed functions of the Cartesian coordinates. Applying the principle of orthogonality to the fundamental equation and to each of the assumed functions, a set of ordinary differential equations is obtained, the solution of which yields unknown functions. As particular cases the solutions of adequate linear problems are available. The method of computation of the first and second approximation is illustrated by examples.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1964 r.