

## WYBRANE ZAGADNIENIA TEORII PŁYT REISSNERA I TEORII PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

RYSZARD G A N O W I C Z (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

Problem płyt grubych, postawiony w klasycznej teorii sprężystości [1 i 2], nie został do chwili obecnej rozwiązany w sposób zadowalający. Wynika to ze złożoności problemu, w którym wymagane jest spełnienie warunków brzegowych zarówno na powierzchniach górnej i dolnej jak i bocznych. Jako pewne uproszczenie dopuszcza się w teorii płyt grubych spełnienie warunków brzegowych na powierzchniach bocznych w sensie średnim, to znaczy, żąda się spełnienia ich na krzywej ograniczającej płytę dla wielkości wypadkowych. Uproszczenie to, opierające się na zasadzie Saint-Venanta, pozwoliło na rozwiązanie tylko niewielu przypadków [2].

Najdalsze uproszczenia wprowadza tak zwana klasyczna teoria płyt cienkich ogólnie biorąc anizotropowych. Teoria ta jest rozbudowana niezwykle szeroko i dla wielu technicznie ważnych przypadków daje dobre, w porównaniu z doświadczeniem, przybliżenie. Ma ona jednak szereg niedostatków między innymi dlatego, że nie uwzględnia się w niej odkształceń wywołanych siłami poprzecznymi. Niedokładność tę wielu autorów starało się usunąć na przestrzeni ostatnich lat dwudziestu. Powodem tych starań są potrzeby wynikające z praktyki inżynierskiej, mianowicie w coraz większym stopniu wprowadza się do konstrukcji elementy płytowe, powłokowe i belkowe z tworzyw sztucznych jak i elementy o projektowanej niejednorodnej strukturze wewnętrznej. Należą tutaj elementy wielowarstwowe, które projektuje się w ten sposób, że pewnym warstwom przypisuje się określony charakter pracy. Na przykład pewne warstwy przenoszą, ogólnie biorąc, naprężenia normalne, a inne, zgodnie z ich cechami wytrzymałościowymi, naprężenia styczne. Konstrukcje takie, powszechnie używane w lotnictwie, coraz częściej pojawiają się w budownictwie lądowym, pomijanie więc odkształceń wywołanych siłami poprzecznymi w warstwie, gdzie występują tylko te siły, jest niemożliwe do przyjęcia.

Teoria płyt cienkich nie zdaje też egzaminu w analizie stanu naprężenia płyt jednorodnych o wymiarach spotykanych w konstrukcjach stropów grzybkowych czy płyt fundamentowych, dlatego też ukazało się dużo prac dotyczących płyt grubych na podłożu sprężystym, np. prace [3 i 4].

Doświadczenia wykazują, że w przypadkach omówionych wyżej, analiza stanu naprężenia, przeprowadzona w oparciu o teorię płyt cienkich, daje obraz fałszywy.

W związku z powyższym szereg autorów [5–10] wprowadziło pewne modele płyt, w których uwzględnia się odkształcenia postaciowe. Zamierzeniem tych autorów było podanie teorii opisującej zjawisko zginania płyt przy uwzględnieniu odkształceń wywołanych siłami poprzecznymi, przy czym powinna to być teoria możliwa do wykorzystania praktycznego. W pierwszym rzędzie wymienić należy tutaj prace E. REISSNERA [5], który:

a) zakłada, że naprężenia normalne  $\sigma_x, \sigma_y$  oraz styczne  $\tau_{xy}$  mają rozkład prostoliniowy wzdłuż grubości płyty, a styczne  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  mają przebieg paraboliczny,

b) wprowadza średnie wartości odkształceń, które oblicza z porównania pracy wypadkowych sił na średnich (sprowadzonych) przemieszczeniach z pracą odpowiednich naprężeń na rzeczywistych przemieszczeniach,

c) uwzględnia naprężenia normalne  $\sigma_z$  prostopadłe do powierzchni środkowej płyty.

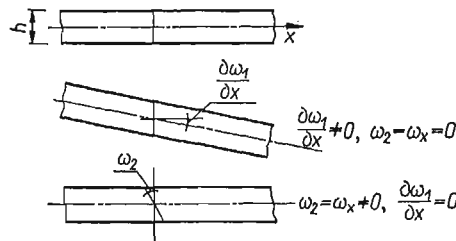
W teorii tej otrzymuje się następujące związki między przemieszczeniami sprowadzonymi i rzeczywistymi [11]:

$$\omega_1 = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dot{w} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz \quad \text{sprowadzone ugięcie,}$$

$$\omega_2 = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u \frac{2z}{h} dz \quad \text{sprowadzony kąt obrotu względem osi } x,$$

$$\omega_3 = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v \frac{2z}{h} dz \quad \text{sprowadzony kąt obrotu względem osi } y.$$

Sprowadzone kąty obrotu pokazano schematycznie na rys. 1. W przypadku gdy  $\omega_2 = -\partial\omega_1/\partial x$ , naprężenia styczne wynoszą zero.



Rys. 1

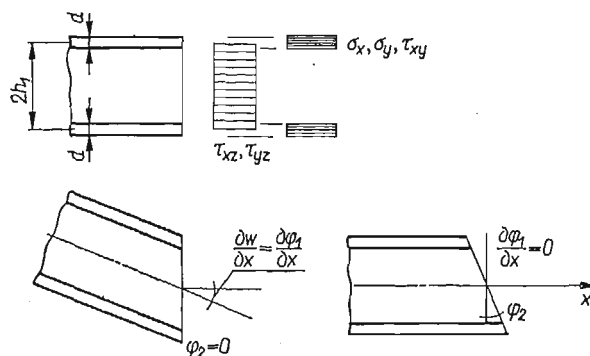
Dalszą grupę prac stanowią te, w których zakłada się, że płyta zbudowana jest z materiału poprzecznie izotropowego, przy czym w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyta jest nieściśliwa. Należy tu wymienić prace A. KROMMA [6]. Poza tym J. L. BOAL i E. REISSNER [7] zajmowali się także takim modelem płyty, rozważając jednak warunki brzegowe na krzywej ograniczającej nie tylko w sensie średnim i dlatego nazwali ten problem «dwi i pół wymiarowym».

Indywidualne podejście do zagadnienia płyt grubych wykazali W. Z. WŁASOW i N. N. LEONTIEW [3]. Wprowadzili oni tzw. teorię bimomentową, której pierwszym przybliżeniem jest teoria płyt cienkich.

Szeroką klasę płyt, w których uwzględnia się odkształcenia wywołane siłami poprzecznymi, stanowią płyty trójwarstwowe. Teoria tych płyt rozwija się w chwili obecnej nie-

zwykle szeroko. W teoriach tych płyt najczęściej zakłada się, że warstwy skrajne są symetryczne i spełniają założenia teorii płyt cienkich, natomiast warstwa środkowa, stałej grubości, jest nieściśliwa i pracuje jedynie na odkształcenia postaciowe. Podstawowe równania takich płyt można znaleźć w pracach N. J. HOFFA [12], ALEKSANDROWA [13] oraz C. LIBOVE'a i S. B. BATDORFA [14]. Opierając się na tych modelach wielu autorów uzyskało konkretne rozwiązania [15 i 16].

Najbardziej technicznie uzasadniony jest trochę uproszczony model płyty trójwarstwowej, mianowicie taki, w którym zakłada się, że warstwy skrajne przenoszą jedynie naprężenia normalne i styczne poziome stałe na grubości warstwy (brak sztywności na zginanie warstw skrajnych), a warstwa środkowa pracuje jedynie na naprężenia styczne  $\tau_{1z}$ . Na rysunku 2 pokazano schematycznie rozkład naprężeń oraz odkształcenia takiej płyty. Jak widać z tego rysunku, rozkład naprężeń omawianej płyty trójwarstwowej przypomina belkę dwuteową. Co ciekawsze, tak zdefiniowany model płyty trójwarstwowej jest szczególnym przypadkiem płyty reissnerowskiej ze względu na pewną analogię odpowiednich zależności. Wykażemy to w pracy.



Rys. 2

Praca niniejsza poświęcona jest wyprowadzeniu podstawowych rozwiązań dla płyt reissnerowskich i dzięki prostej analogii dla płyt trójwarstwowych o warstwach skrajnych bez sztywności na zginanie. Twierdzenie E. BETTIEGO o wzajemności prac i rozwiązania podstawowe, wyprowadzone w niniejszej pracy, nie są znane (według rozeznania autora) w literaturze omawianych płyt.

Jak wiadomo, twierdzenie E. Bettiego i rozwiązania podstawowe osobliwe znajdują zastosowanie przy konstruowaniu rozwiązań wielu problemów brzegowych teorii sprężystości oraz teorii płyt cienkich.

Celem podania analogicznych zależności dla płyt reissnerowskich i dla płyt trójwarstwowych jest wykazanie, że także w teorii tych płyt wiele problemów brzegowych można rozwiązać w oparciu o twierdzenie o wzajemności przemieszczeń i podstawowe rozwiązania osobliwe. W ten sposób teoria omawianych płyt pomimo bardziej złożonego modelu może być bliższa zagadnieniom technicznym ze względu na wspólny z teorią płyt cienkich sposób rozwiązywania problemów brzegowych.

Punkt 2 podaje podstawowe zależności bez specjalnego uzasadnienia ze względu na możliwość znalezienia ich w literaturze. W punkcie 3 podano wywód podstawowej

dla całej pracy zasady E. Bettiego. Natomiast omówienie problemów poruszanych w dalszym ciągu pracy podano w punkcie 5.

## 2. Równania podstawowe

Poniżej podamy zasadnicze związki dotyczące zarówno płyt reissnerowskich jak i płyt trójwarstwowych spełniających założenia podane w p. 1. Równania równowagi podamy w różnych postaciach, które mogą być przydatne do uzyskania konkretnych rozwiązań.

Punktem wyjściowym otrzymania równań równowagi będą zależności między siłami wewnętrznymi i omówionymi w punkcie poprzednim przemieszczeniami sprowadzonymi. Dla płyt reissnerowskich otrzymujemy [11]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m_x &= D \left[ \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \frac{6\nu}{5h} \frac{\nu(1+\nu)}{E} \right], & q_x &= \frac{5h}{6} G \left( \omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right), \\ m_y &= D \left[ \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{6\nu}{5h} \frac{\nu(1+\nu)}{E} \right], & q_y &= \frac{5h}{6} G \left( \omega_3 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right), \\ m_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

gdzie:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E, G, \nu \text{ — stałe materiałowe.}$$

W dalszym ciągu pracy zajmiemy się płytami reissnerowskimi poddanymi działaniu obciążenia normalnego  $p(x, y)$  oraz momentów rozłożonych  $X_M(x, y)$  i  $Y_M(x, y)$ . Dla wyciętego z takiej płyty elementu (rys. 3) otrzymamy następujące równania równowagi:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x + X_M &= 0, \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y + Y_M &= 0, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p &= 0. \end{aligned}$$

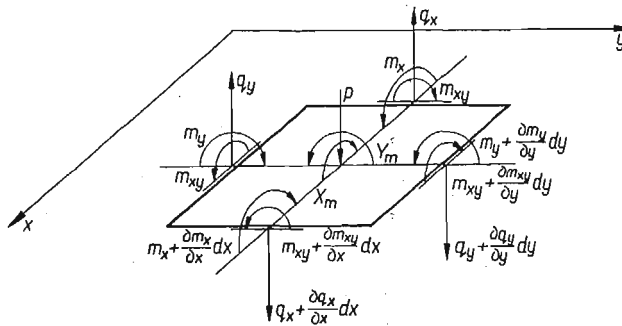
Wstawiając związki (2.1) do (2.2) otrzymamy następujący układ równań ze względu na niewiadome  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \omega_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} &= -\frac{6p}{5hG}, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left[ 1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega_2 - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} &= \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{6}{5hG} X_M, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + \left[ 1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \omega_3 &= \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{6}{5hG} Y_M. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań może być podstawą otrzymania rozwiązań dla konkretnych zadań przy spełnieniu odpowiednich warunków brzegowych.

Układ równań (2.3.) możemy także sprowadzić do trzech oddzielnych równań na trzy funkcje przemieszczeń. W tym celu należy posłużyć się znanym postępowaniem HILBERTA. Ze względu na wielokrotne używanie tego sposobu w literaturze [15, 17, 18] podamy poniżej jedynie końcowe rezultaty w postaci następujących trzech równań:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 &= \frac{p}{D}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2 &= -\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{X_M}{D}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_3 &= -\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{Y_M}{D}. \end{aligned}$$



Rys. 3

Natomiast przemieszczenia sprowadzone  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$  wyznaczyć możemy z następujących związków:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{h^2}{5} \nabla^2 \right) F_1 - \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2 - \frac{\partial}{\partial y} \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_3, \\ \omega_2 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 + \left[ \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( 1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) \right] F_2 + \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( 1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) F_3, \\ \omega_3 &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( 1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) F_2 + \\ &\quad + \left[ \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) \right] F_3. \end{aligned}$$

Układ równań (2.4) wraz ze związkami (2.5) równoważny jest układowi równań (2.3). Sposób wykorzystania układu równań (2.4) zostanie pokazany w dalszym ciągu pracy.

Zanalizujemy teraz przypadek jednorodnych równań układu (2.4)

$$(2.6) \quad \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Rozwiązanie takich równań możemy przedstawić w postaci sumy [19]

$$(2.7) \quad F_i = B_i + H_i,$$

gdzie

$$\nabla^2 \nabla^2 B_i = 0, \quad \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) H_i = 0.$$

Łatwo się przekonać, że dla funkcji  $H_i$  mamy  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  ze względu na powtarzanie się zależności  $\left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) F_i$  w związkach (2.5). Ponadto ze względu na to, że mamy do czynienia z zagadnieniem szóstego rzędu, rozwiązanie możemy skonstruować tylko za pomocą jednej funkcji biharmonicznej i jednej  $H_i$ . Stąd po wykonaniu przekształceń otrzymamy dla przypadku (2.6) następującą reprezentację niewiadomych (por. [15 i 20]):

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \left(1 - \frac{1}{1-\nu} \frac{h^2}{5} \nabla^2\right) B, \\ \omega_2 &= -\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}, & \nabla^2 \nabla^2 B &= 0, \\ \omega_3 &= -\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, & \left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) H &= 0. \end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze w przypadku powyższym problem rozwiązań szczególnych układu równań niejednorodnych, który należy rozpatrzyć w rozwiązaniach szczegółowych.

W przypadku płyt trójwarstwowych, spełniających założenia podane w punkcie pierwszym, otrzymuje się zależności zbliżone do podanych powyżej dla płyt reissnerowskich. Poniżej podamy te związki powołując się na wcześniejszą pracę autora [21].

Związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  są następujące:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} m_x &= D_t \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right), & q_x &= 2G_s h_1 \left( \varphi_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right), \\ m_y &= D_t \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), & q_y &= 2G_s h_1 \left( \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right), \\ m_{xy} &= D_t \frac{1-\nu_1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right), & D_t &= \frac{2Edh_1^2}{(1-\nu_1^2)}, \end{aligned}$$

gdzie  $E, \nu_1$  oznaczają stałe materiałowe warstw skrajnych, a  $G_s = G_{xz} = G_{yz}$  moduł odkształcenia postaciowego warstwy środkowej.

Postępując podobnie jak poprzednio, otrzymujemy następujące przemieszczeniowe równania równowagi:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} &= -\frac{p}{2G_s h_1}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \varphi_2 - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} &= \frac{X_M}{2G_s h_1}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \varphi_3 &= \frac{Y_M}{2G_s h_1}, \end{aligned}$$

gdzie  $\eta = Edh_1/G_s(1+\nu_1)$ .

Po sprowadzeniu powyższego układu równań do równań na funkcje przemieszczeń otrzymujemy:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{\eta}{2} \nabla^2 \right) \Gamma_1 &= \frac{p}{D_t}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{\eta}{2} \nabla^2 \right) \Gamma_2 &= -\frac{X_M}{D_t}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{\eta}{2} \nabla^2 \right) \Gamma_3 &= -\frac{Y_M}{D_t}. \end{aligned}$$

Z porównania wyprowadzonych związków dla płyt Reissnera z podanymi powyżej dla płyt trójwarstwowych widać, że te ostatnie łatwo otrzymać z pierwszych zastępując

$$(2.12) \quad \frac{h^2}{5} \rightarrow \eta, \quad D \rightarrow D_t, \quad F_i \rightarrow \Gamma_i, \quad \omega_i \rightarrow \varphi_i$$

oraz pomijając bezpośredni wpływ obciążenia  $p$  na momenty zginające, a także wpływ  $\partial p / \partial x$  i  $\partial p / \partial y$  w równaniach (2.3) i (2.4).

Na podstawie tych krótkich rozważań widzimy, że płyty trójwarstwowe, spełniające założenia podane w punkcie pierwszym, są szczególnym przypadkiem płyt reissnerowskich. Dlatego w dalszym ciągu pracy będziemy zajmowali się tymi ostatnimi podając ewentualnie rozwiązania dla płyt trójwarstwowych bez dodatkowego ich uzasadnienia.

Omówienie warunków brzegowych zagadnienia zostanie przeprowadzone w punkcie czwartym.

### 3. Twierdzenie E. Bettiego o wzajemności prac

W punkcie niniejszym zajmiemy się wyprowadzeniem twierdzenia E. Bettiego dla płyt reissnerowskich. Omawiane twierdzenie nie jest znane w literaturze przedmiotu. Twierdzenie to leży u podstaw znanej metody punktów osobliwych («Singularitätenmethode»), którą zresztą do teorii sprężystości pierwszy wprowadził E. BETTI [1]. Zastosowanie tego twierdzenia w teorii sprężystości i mechanice budowli jest niezwykle szerokie. Pozwala ono na skonstruowanie szeregu rozwiązań problemów brzegowych teorii sprężystości. W pracy niniejszej wykorzystamy to twierdzenie do skonstruowania rozwiązania dla dość ogólnego problemu brzegowego płyt Reissnera a także płyt trójwarstwowych.

Twierdzenie E. Bettiego dla omawianych płyt spełnia podobną rolę co znany wzór Greena

$$(3.1) \quad \int_D \int \int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = \int_S \int \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

w teorii funkcji harmoniczych, czy też wzór [22]

$$(3.2) \quad \begin{aligned} G \int_D \int \int \left[ \mathbf{u} \cdot \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \left( \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \right) \right] d\tau = \\ = - \int_S \int [\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}(v) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}(u)] ds \end{aligned}$$

w teorii równań przemieszczeniowych teorii sprężystości

$$(3.3) \quad \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{\mathbf{X}}{G} = 0.$$

Twierdzenie E. Bettiego wyprowadzimy w sposób podobny, jak to uczynili S. BERGMAN i M. SCHIFFER [22] dla otrzymania wzoru (3.2).

Wprowadźmy do rozważań wyrażenie na energię sprężystą nagromadzoną w elemencie zginanej płyty

$$(3.4) \quad dV = \frac{1}{2} \left[ m_x \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + m_y \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + m_{xy} \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right) + q_x \left( \omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right) + q_y \left( \omega_3 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Jeżeli wykorzystamy związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami spowodowanymi  $\omega_i$  (2.1), to otrzymamy na energię sprężystą, nagromadzoną w płycie rozpatrywanej wyrażenie następujące:

$$(3.5) \quad V = \frac{D}{2} \iint_B \left\{ \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right)^2 + (1-\nu) \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right)^2 + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \left[ \omega_2^2 + 2\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 + \omega_3^2 + 2\omega_3 \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \left( \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \right\} dx dy.$$

Wprowadźmy teraz do dalszych rozważań pewien funkcjonal zależny od dwóch grup funkcji  $\omega_i$  i  $\psi_i$

$$(3.6) \quad e\{\omega, \psi\} = \frac{D}{2} \iint_B \left\{ \frac{5(1-\nu)}{h^2} \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \omega_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \psi_2 + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_2 \psi_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \psi_3 + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_3 \psi_3 + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right\} dx dy$$

Związek między podanym wyżej funkcjonalem i pierwszą wariacją energii sprężystej zostanie omówiony w punkcie czwartym, na razie zauważymy, że funkcjonal ten związany jest z wyrażeniem na energię sprężystą (3.5) następująco:

$$(3.7) \quad V = e\{\omega, \omega\}.$$

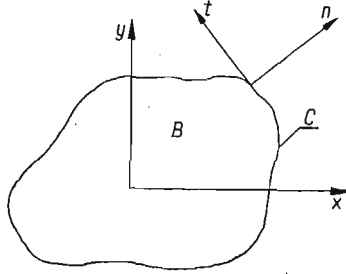
Załóżmy, że funkcje  $\omega_i, \psi_i$  są ciągłe wraz z pochodnymi do drugiego rzędu w pewnym płaskim obszarze  $B$  oraz ciągłe wraz z pochodnymi pierwszego rzędu na brzegu  $C$  (rys. 4). Natomiast o funkcji  $p(x, y)$  załóżmy, że jest ona ciągła wraz z pochodną pierwszego rzędu w  $B$  i ciągła na brzegu  $C$ .



Zastosujemy teraz do wyrażenia (3.6) przekształcenie Greena. Przykładowo zastosujemy to przekształcenie do całek:

$$(3.8) \quad \int_B \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx dy = - \int_B \int \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \psi_1 dx dy + \int_C \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \psi_1 \cos(n, x) ds,$$

$$\int_B \int p \frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx dy = - \int_B \int \frac{\partial p}{\partial x} \psi_2 dx dy + \int_C p \psi_2 \cos(n, x) ds.$$



Rys. 4

Jak widać z powyższego, dążymy do takiego przekształcenia funkcjonału (3.6), żeby uzyskać w wyrażeniach podcałkowych funkcje  $\psi_i$  bez występowania ich pochodnych. Okazuje się to możliwe do przeprowadzenia dla całego wyrażenia (3.6). Wten sposób otrzymujemy

$$(3.9) \quad e\{\omega, \psi\} = -\frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_B \int \left( \nabla^2 \omega_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \psi_1 dx dy +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_B \int \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left[ 1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega_2 - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \psi_2 dx dy + \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_B \int \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + \left[ 1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \omega_3 - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} \right\} \psi_3 dx dy +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \int_C \left[ \left( \omega_2 + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left( \omega_3 + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) \cos(n, y) \right] \psi_1 ds +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_C \left[ \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \cos(n, x) + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) \cos(n, y) \right] \psi_2 ds +$$

$$+ \frac{D}{2} \int_C \left[ \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \omega_3}{\partial y} + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] \psi_3 ds +$$

$$+ \frac{D}{2} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_C [p \psi_2 \cos(n, x) + p \psi_3 \cos(n, y)] ds.$$

Przedstawimy teraz funkcje  $\omega_2, \omega_3$  oraz  $\psi_2, \psi_3$  na brzegu  $C$  przez funkcje  $\omega_n, \omega_t$  i  $\psi_n, \psi_t$  z pomocą następujących związków:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \omega_2 &= \omega_n \cos(n, x) - \omega_t \cos(n, y), \\ \omega_3 &= \omega_n \cos(n, y) + \omega_t \cos(n, x). \end{aligned}$$

Interpretacja fizyczna tego przedstawienia stanie się jasna w dalszym ciągu wywodu zasady (twierdzenia) E. Bettiego.

Jeżeli ponadto weźmiemy pod uwagę, że (rys. 4)

$$(3.11) \quad \begin{aligned} m_n &= m_x \cos^2(n, x) + m_y \cos^2(n, y) + 2m_{xy} \cos(n, x) \cos(n, y), \\ m_{nt} &= (m_y - m_x) \cos(n, x) \cos(n, y) + m_{xy} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)], \\ q_n &= q_x \cos(n, x) + q_y \cos(n, y), \end{aligned}$$

to po wykonaniu prostych działań otrzymamy na funkcjonał  $e\{\omega, \psi\}$  wyrażenie następujące:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} e\{\omega, \psi\} &= -\frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \iint_B \left( \nabla^2 \omega_1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) \psi_1 dx dy + \\ &+ \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \iint_B \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \left[ 1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega_2 - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} \psi_2 dx dy + \frac{D}{2} \frac{5(1-\nu)}{h^2} \iint_B \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ 1 - \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{h^2}{10} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \omega_3 - \frac{6\nu(1+\nu)h}{25E(1-\nu)} \frac{\partial p}{\partial y} \right\} \psi_3 dx dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_C [q_n(\omega) \psi_1 + m_n(\omega) \psi_n + m_{nt}(\omega) \psi_t] ds. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz zauważyć na podstawie wyrażenia (3.6), że funkcjonał  $e\{\omega, \psi\}$  nie ulega zmianie przy przestawieniu funkcji  $\omega_i$  z funkcjami  $\psi_i$ , a z równości  $e\{\omega, \psi\} = e\{\psi, \omega\}$  przy uwzględnieniu (3.12) otrzymamy wzór dla płyt Reissnera analogiczny do tożsamości Rayleigha-Greena dla izotropowych płyt cienkich [22]

$$(3.13) \quad D \iint_B [(\nabla^2 \nabla^2 u)v - u \nabla^2 \nabla^2 v] dx dy = \int_C \left[ M_n(u) \frac{\partial v}{\partial n} - V_n(u)v - M_n(v) \frac{\partial u}{\partial n} + V_n(v)u \right] ds.$$

Tożsamości, o której mówiliśmy wyżej dla płyt Reissnera, nie przedstawimy, bowiem widoczna jest ona w sposób dostatecznie wyraźny z równania (3.12) przy  $e\{\omega, \psi\} = e\{\psi, \omega\}$ .

Wielkości  $m_n, m_{nt}, q_n$  oraz  $m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y$ , określone związkami (3.11), które należy rozumieć zgodnie ze wzorami (2.1), przedstawiają odpowiednie wielkości sił wewnętrznych związanych z polem przemieszczeń  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ . Ponieważ na razie nie zakładaliśmy, że pole to spełnia równania równowagi, więc interpretacja tych związków jako sił wewnętrznych płyty Reissnera jest niemożliwa. Związki te należy jedynie rozumieć jako pewne określone funkcje pola  $\omega_i$ .

Przejdziemy teraz do wyznaczenia wyrażenia zasady o wzajemności prac. Założymy, że na płytę działa obciążenie  $p(\omega)$  oraz momenty  $X_M(\omega)$ ,  $Y_M(\omega)$ . Towarzyszyć temu obciążeniu będą przemieszczenia sprowadzone  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ , które teraz oczywiście spełniają równania równowagi (2.3). Stan ten określimy jako stan  $S(\omega)$ . Następnie oddzielnie analogicznie określimy stan  $S(\psi)$ , związany z obciążeniem  $p(\psi)$ ,  $X_M(\psi)$ ,  $Y_M(\psi)$  i przemieszczeniami sprowadzonymi  $\psi_i (i = 1, 2, 3)$  spełniającymi także równania równowagi (2.3).

Wykorzystując zależności (3.12) i tożsamość  $e\{\omega, \psi\} = e\{\psi, \omega\}$  otrzymujemy:

$$(3.14) \quad \iint_B [p(\omega)\psi_1 + X_M(\omega)\psi_2 + Y_M(\omega)\psi_3] dx dy + \int_C [q_n(\omega)\psi_1 + m_n(\omega)\psi_n + m_{nt}(\omega)\psi_t] ds = \\ = \iint_B [p(\psi)\omega_1 + X_M(\psi)\omega_2 + Y_M(\psi)\omega_3] dx dy + \int_C [q_n(\psi)\omega_1 + m_n(\psi)\omega_n + m_{nt}(\psi)\omega_t] ds,$$

co przedstawia poszukiwaną przez nas zasadę o wzajemności prac E. Bettiego dla płyt Reissnera.

Jasne także jest, że wielkości wprowadzone przez nas zależnościami (3.10) i (3.11) przedstawiają kolejno (rys. 4):

- $\omega_n$  sprowadzony kąt obrotu względem stycznej do krzywej brzegu  $C$ ,
- $\omega_t$  sprowadzony kąt obrotu względem normalnej do krzywej brzegu  $C$ ,
- $m_n, m_{nt}$  odpowiednie momenty względem osi  $n$  i  $t$  na brzegu  $C$ ,
- $q_n$  siłę poprzeczną na brzegu  $C$ .

Na zakończenie tego punktu omówimy jeszcze zasadę E. Bettiego o wzajemności prac dla płyt trójwarstwowych. Wyprowadzenie tej zasady podał autor w pracy [23]. Tok wywodu jest analogiczny do podanego powyżej dla płyt Reissnera. Pewne uproszczenie daje fakt, że w teorii płyt trójwarstwowych momenty zginające nie są bezpośrednio związane z obciążeniem normalnym  $p$  [por. (2.9) i (2.1.)].

Poniżej podamy jedynie wyrażenie analogiczne do (3.12), które wystarcza do określenia zasady E. Bettiego dla płyt trójwarstwowych po uwzględnieniu wywodu tej zasady dla płyt Reissnera:

$$(3.15) \quad e_i\{\varphi, \Phi\} = -G_s h_1 \iint_B \left( \nabla^2 \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) \Phi_1 dx dy + \\ + G_s h_1 \iint_B \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left( 1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi_2 - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y} \right] \Phi_2 dx dy + \\ + G_s h_1 \iint_B \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\eta}{2} \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \left( 1 - \frac{\eta}{1-\nu_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi_3 \right] \Phi_3 dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_C [q_n(\varphi)\Phi_1 + m_n(\varphi)\Phi_n + m_{nt}(\varphi)\Phi_t] ds.$$

Samo twierdzenie o wzajemności prac dla płyt trójwarstwowych przedstawia w sposób oczywisty wyrażenie (3.14).

#### 4. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe dla płyt Reissnera wyprowadzimy w oparciu o znane z rachunku wariacyjnego pojęcie naturalnych warunków granicznych. Dlatego zanim przejdziemy do ich omówienia, zwrócimy uwagę na ścisły związek między wprowadzonym w punkcie

poprzednim funkcjonałem  $e\{\omega, \psi\}$  i pierwszą wariacją energii sprężystej nagromadzonej w płycie.

Rozpatrzmy płytę poddaną działaniu obciążenia  $p$ ,  $X_M$  i  $Y_M$ . Energię sprężystą nagromadzoną w płycie przedstawia wyrażenie (3.5). Obliczając pierwszą wariację energii sprężystej otrzymamy

$$(4.1) \quad \delta V = D \iint_B \left\{ \frac{5(1-\nu)}{h^2} \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial x} + \omega_3 \frac{\partial \delta \omega_1}{\partial y} \right] + \right. \\ + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \delta \omega_2 + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_2 \delta \omega_2 + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial y} + \\ + \nu \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial y} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \delta \omega_3 + \nu \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial x} + \frac{5(1-\nu)}{h^2} \omega_3 \delta \omega_3 + \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \delta \omega_2}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} p \frac{\partial \delta \omega_3}{\partial y} \right\} dx dy.$$

Porównując wyrażenie powyższe z funkcjonałem (3.6) widzimy, że

$$(4.2) \quad \delta V = 2e\{\omega, \delta \omega\}.$$

Ponadto na założonych wariacjach przemieszczeń  $\delta \omega_i (i = 1, 2, 3)$  otrzymamy pracę obciążenia  $p$ ,  $X_M$  i  $Y_M$

$$(4.3) \quad \delta L = p \delta \omega_1 + X_M \delta \omega_2 + Y_M \delta \omega_3.$$

Na podstawie powyższego i zależności z punktu poprzedniego otrzymamy, że podane w punkcie drugim niniejszej pracy równania równowagi (2.3) przedstawiają układ równań Eulera zagadnienia wariacyjnego znalezienia minimum całkowitej energii płyty:

$$(4.4) \quad \delta U = \delta V - \delta L = 0.$$

Warunek powyższy wymaga zerowania się jeszcze następującego wyrażenia:

$$(4.5) \quad \int_C (q_n \delta \omega_1 + m_n \delta \omega_n + m_{nt} \delta \omega_t) ds,$$

które wynika z zależności (3.12) przy uwzględnieniu (4.2). Otrzymujemy stąd naturalne warunki graniczne, które pozwalają na określenie następujących jednorodnych warunków brzegowych dla płyt Reissnera:

$$(4.6) \quad \begin{array}{ll} 1. q_n = m_n = m_{nt} = 0, & 5. \omega_1 = \omega_n = m_{nt} = 0, \\ 2. q_n = m_n = \omega_t = 0, & 6. \omega_1 = \omega_n = \omega_t = 0, \\ 3. \omega_1 = m_n = m_{nt} = 0, & 7. q_n = \omega_n = m_{nt} = 0, \\ 4. \omega_1 = m_n = \omega_t = 0, & 8. q_n = \omega_n = \omega_t = 0. \end{array}$$

Przez analogię do płyt cienkich, przyjmując za decydujące warunki umieszczone w pierwszych dwóch kolumnach (4.6), można by określić:

warunki 1,2 jako «krawędź swobodną»,  
warunki 3,4 jako «swobodne podparcie»,  
warunki 5,6 jako «zamocowanie».

Jednak ze względu na fakt występowania dwóch typów warunków brzegowych w każdej z wyżej wymienionych grup określenia powyższe nie mogą być ściśle. Dlatego podając warunki brzegowe dla płyt reissnerowskich nie można posługiwać się wyżej podanymi określeniami przeniesionymi z płyt cienkich. Należy natomiast podać ściśle warunki według (4.6). Wydaje się możliwe natomiast używanie przykładowo takich określeń jak «krawędź wolnopodparta z przeponą» zamiast warunku typu 4.

Powyżej nie podaliśmy określenia («nazwy») warunków brzegowych typu 7 i 8 (4.6) ze względu na to, że takiego prostego określenia nie mają też analogiczne warunki brzegowe dla płyt cienkich

$$(4.7) \quad V_n = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0,$$

gdzie  $V_n$  jest sprowadzoną siłą poprzeczną.

Wnioski punktu niniejszego bez dodatkowych wyprowadzeń rozszerzamy na płyty trójwarstwowe, w których także wystąpi osiem typów warunków brzegowych identycznych z podanymi wyżej (4.6).

### 5. Zagadnienia podstawowe

Przedstawimy teraz zagadnienie, którego rozwiązaniem zajmiemy się w dalszym ciągu pracy. Mianowicie będziemy dążyć do wyznaczenia przemieszczeń sprowadzonych  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) w obszarze  $B$  za pomocą wielkości brzegowych (wielkości  $\omega_i$  i ich pochodnych na brzegu  $C$ ). Zagadnienie omówimy dla płyt Reissnera, co łatwo można rozszerzyć na płyty trójwarstwowe.

Wracając do naszego problemu stwierdzamy, że celem naszym będzie znalezienie wzorów analogicznych do następujących znanych zależności, wynikających ze wzorów Greena, które są podstawą dyskusji nad funkcjami harmonicznymi:

$$(5.1) \quad u(Q_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS$$

dla przestrzeni trójwymiarowej czy

$$(5.2) \quad u(Q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left( u \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \frac{\partial u}{\partial n} \ln r \right) ds$$

dla przestrzeni dwuwymiarowej.

Analogiczne zresztą wzory są znane także dla równań teorii płyt cienkich [22],

$$(5.3) \quad w(Q_0) = \frac{1}{8\pi} \int_C \left\{ -M_n \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n} + V_n S(P, Q) + M_n [S(P, Q)] \frac{\partial w}{\partial n} - V_n [S(P, Q)] w \right\} ds,$$

gdzie  $S(P, Q) = r^2 \ln r$  (por. też [24]).

We wszystkich tych wzorach występują funkcje osobliwe, jak  $u = 1/r$  we wzorze (5.1),  $u = \ln r$  we wzorze (5.2) czy  $S(P, Q) = r^2 \ln r$  we wzorze (5.3). Funkcje te nazywamy rozwiązaniami osobliwymi danego zagadnienia czy też osobliwościami podstawowymi

[25, 26 i 27]. Spełniają one równania danego zagadnienia w całym rozpatrywanym obszarze z wyjątkiem jednego punktu, w którym wykazują osobliwość decydującą o słuszności wzorów podanych powyżej.

Interpretując pod względem fizycznym rozwiązanie osobliwe teorii sprężystości wiemy, że przedstawiają one rozwiązanie dla danego obszaru przy pewnych obciążeniach skupionych. Przykładowo rozwiązanie  $w = r^2 \ln r$  w teorii płyt cienkich jest rozwiązaniem płyty nieograniczonej obciążonej siłą skupioną.

Przechodząc do teorii płyt Reissnera, w celu znalezienia wzorów analogicznych do omówionych powyżej, będziemy musieli znaleźć rozwiązania takich płyt przy obciążeniu skupionym oraz udowodnić możliwość wykorzystania tych rozwiązań do określenia przemieszczeń spowodowanych za pomocą wartości brzegowych.

Powołajmy się teraz na wyprowadzoną w punkcie trzecim niniejszej pracy zasadę o wzajemności prac. Spójrzmy na wzór (3.14) wyrażający tę zasadę, biorąc pod uwagę pojęcie zasady prac wirtualnych. Określmy stan  $S(\omega)$  jako stan obciążeń rzeczywistych, a stan  $S(\psi)$  jako stan obciążeń wirtualnych. Założymy dodatkowo, że stan rzeczywisty  $S(\omega)$  związany jest jedynie z obciążeniami brzegowymi. Wtedy rozwiązania  $\omega_i (i = 1, 2, 3)$  będą w obszarze  $B$  funkcjami regularnymi. Oznaczając więc zgodnie z tym co powiedziano wyżej  $\psi_i = \bar{\omega}_i$  otrzymamy

$$(5.4) \quad \iint_B (\bar{p}\omega_1 + \bar{X}_M\omega_2 + \bar{Y}_M\omega_3) dx dy = \int_C (q_n\bar{\omega}_1 + m_n\bar{\omega}_n + m_m\bar{\omega}_t - \bar{q}_n\omega_1 - \bar{m}_n\omega_n - \bar{m}_m\omega_t) ds.$$

Jeżeli będziemy chcieli znaleźć wielkość przemieszczenia pionowego  $\omega_1(Q_0)$ , to należy przyjąć  $\bar{p} = \delta(Q_0)$ ,  $\bar{X}_M = \bar{Y}_M = 0$ . Analogicznie, jeżeli będziemy szukać  $\omega_2(Q_0)$ , to przyjmujemy  $\bar{X}_M = \delta(Q_0)$ ,  $\bar{p} = \bar{Y}_M = 0$ . Podobnie postąpimy szukając  $\omega_3(Q_0)$ .

Przy tak określonym obciążeniu, wykorzystując znane własności funkcji Diraca  $\delta(Q_0)$ , otrzymamy kolejno po lewej stronie równości (5.4):

$$(5.5) \quad \iint_B \delta(Q_0)\omega_1 dx dy = \omega_1(Q_0).$$

Problemem więc jest znalezienie rozwiązań płyty dla obciążeń skupionych  $p = \delta(Q_0)$ ,  $X_M = \delta(Q_0)$ ,  $Y_M = \delta(Q_0)$ . Rozwiązania takie wstawione po prawej stronie równości (5.4) pozwolą kolejno na obliczenie  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  za pomocą wielkości brzegowych.

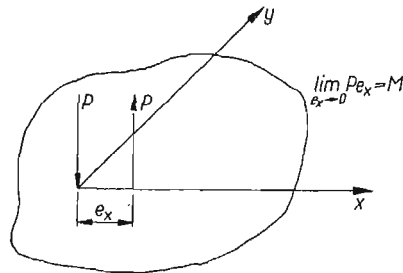
Rozumowanie powyższe pokrywa się z wielokrotnie stosowanym w mechanice budowli. Mianowicie, jeżeli chcemy znaleźć jakieś przemieszczenie danego ustroju, to aby skorzystać z równań zasady prac wirtualnych, powinniśmy znać rozwiązanie dla tego ustroju przy działaniu obciążenia skupionego w kierunku poszukiwanego przemieszczenia.

Cały powyższy wywód nie ma potrzebnej ścisłości, daje jednak wskazówkę, na jakiej drodze należy szukać danego rozwiązania osobliwego. Dlatego po znalezieniu w punkcie następnym zgodnie z podanymi powyżej sugestiami rozwiązań osobliwych, w punkcie siódmym wykazemy prawidłowość uzyskanych wyników przez udowodnienie, że wykazują one odpowiednie osobliwości do zastosowania ich do wzorów wiążących wielkości  $\omega_i$  z wielkościami brzegowymi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na pewną różnicę w przypadku obciążenia momentem skupionym w teorii płyt Reissnera w stosunku do teorii płyt cienkich. Mianowicie jeżeli

wprowadzimy analogicznie jak w teorii płyt cienkich definicję momentu skupionego jako granicę  $M_x = \lim_{e_x \rightarrow 0} P e_x$  (rys. 5), to w wyniku otrzymamy moment skupiony pracujący na przemieszczeniu  $\partial\omega_1/\partial x$  (rys. 6).

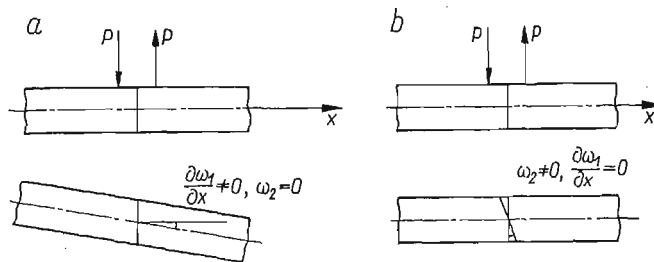
W przypadku pokazanym na rys. 6a praca  $L = M \frac{\partial\omega_1}{\partial x} \neq 0$ , a w przypadku pokazanym na rys. 6b praca  $L = M \frac{\partial\omega_1}{\partial x} = 0$ . Jak można zorientować się z powyższego, rozwiązanie zagadnienia płyty obciążonej tak zdefiniowanym momentem, użyte po prawej



Rys. 5

stronie równości (5.4), doprowadzi do wyznaczenia odkształcenia  $\partial\omega_1/\partial x$ . To oczywiście nie wprowadza nowości w stosunku do obliczenia ugięcia  $\omega_1$ , ponieważ po zróżniczkowaniu tego ostatniego z łatwością otrzymamy  $\partial\omega_1/\partial x$ . Natomiast nadal nie będziemy znali wielkości  $\omega_2$ .

Widzimy więc, że interesować nas będzie w pierwszym rzędzie obciążenie momentem skupionym zdefiniowanym w oparciu o obciążenie  $X_M \rightarrow \delta(Q_0)$  czy  $Y_M \rightarrow \delta(Q_0)$ , a nie



Rys. 6

w oparciu o parę sił pionowych. W dalszym ciągu pracy obciążenie  $X_M = M\delta(Q_0)$  i  $Y_M = M\delta(Q_0)$  będziemy nazywali momentami skupionymi, natomiast obciążenie zdefiniowane jako  $\lim_{e \rightarrow 0} P e$  momentem skupionym parą sił pionowych.

Powyższe rozważania nad definicją momentu skupionego są ważne także dla płyt trójwarstwowych. Poza tym moment skupiony  $X_M = M\delta(Q_0)$  czy  $Y_M = M\delta(Q_0)$  ma w teorii tych płyt prostą interpretację fizyczną jako para sił skupionych, przyłożonych poziomo w warstwach skrajnych.

## 6. Rozwiązanie podstawowe

Zgodnie z sugestiami podanymi w punkcie poprzednim przystąpimy teraz do rozwiązania zagadnienia nieograniczonej płyty Reissnera obciążonej kolejno siłą skupioną, momentem skupionym pary sił pionowych oraz momentem skupionym.

**6.1. Obciążenie siłą skupioną.** Rozwiązanie wyprowadzimy w oparciu o układ równań (2.4). Przyjmiemy  $X_M = Y_M = 0$ , następnie wykonamy podwójną nieskończoną transformację Fouriera [28]:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} N^*(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi, \zeta) e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\xi d\zeta, \\ N(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \end{aligned}$$

układu równań (2.4).

Po wykonaniu działań i wykorzystaniu zależności (2.5) i (6.1) otrzymamy poszukiwane przemieszczenia w postaci następującej:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \omega_i &= \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}, \\ \omega_1^{(1)} &= \frac{1}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \frac{h^2}{5(1-\nu)}(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_2^{(1)} &= \frac{i}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_3^{(1)} &= \frac{i}{2\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_1^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_2^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \\ \omega_3^{(2)} &= -\frac{i}{2\pi} \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} p^*(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Powyżej przyjęto rozłożenie funkcji  $\omega_i$  na dwie grupy funkcji, z których pierwsza (z indeksem 1) oznacza wpływ funkcji  $F_1$ , a druga (z indeksem 2) wpływ funkcji przemieszczeń  $F_2$  i  $F_3$ . Cel tego rozłożenia znajdzie uzasadnienie poniżej, gdzie przedyskutujemy oddzielnie poszczególne składniki rozwiązania (6.2).

Przejdziemy teraz do obciążenia siłą skupioną  $P$ . Przyjmiemy więc, że  $p(x, y) = P\delta(x)\delta(y)$  i otrzymamy stąd  $p^*(\alpha, \beta) = P/2\pi$ . Wstawiając tak określoną transformatę obciążenia do zależności (6.2) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie (funkcje  $\omega_i$ ) w postaci całkowitej.



Aby wyznaczyć poszukiwane przemieszczenia w postaci jawnej musimy umieć obliczyć następujące całki:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} R_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{(a^2+\beta^2)^2} da d\beta, & R_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iae^{-i(ax+\beta y)}}{(a^2+\beta^2)^2} da d\beta, \\ R_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(ax+\beta y)}}{a^2+\beta^2} da d\beta, & R_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iae^{-i(ax+\beta y)}}{a^2+\beta^2} da d\beta. \end{aligned}$$

Całki powyższe nie istnieją jako całki niewłaściwe, nie możemy im także przypisać wartości głównej według Cauchy'ego. Okazuje się jednak, że można przypisać im pewną wartość. Mianowicie można wydzielić z nich tzw. «część skończoną». (p.f.—the finite part).

Określenie to znane jest w literaturze i pierwszy raz pojawiło się dzięki J. HADAMARDOWI [29]. W polskiej literaturze korzystał z tego pojęcia W. NOWACKI [17] i H. ZORSKI [30].

Przypomnijmy tu definicję, jakiej użył NOWACKI, który część skończoną całki rozbieżnej

$$(6.4) \quad \int_a^b f(a) da$$

określa następująco:

Niech  $\int_{a+\varepsilon}^b f(a) da$  dla  $\varepsilon > 0$  będzie całką zbieżną; zakładając  $f(a) = g(a) + h(a)$ ;  $G'(a) = g(a)$  i zbieżność całki  $\int_a^b h(a) da$ , część skończoną całki rozbieżnej (6.4) definiujemy następująco:

$$(6.5) \quad \text{p.f.} \int_a^b f(a) da = G(b) + \int_a^b h(a) da.$$

Okazuje się, że część skończoną całki rozbieżnej można otrzymać przez formalne wielokrotne całkowanie jej przez części. Możliwość uzyskania w ten sposób części skończonej pewnej całki rozbieżnej wykażemy poniżej. Jest to istotne ze względu na fakt, że definicja powyższa (6.5), na której się zresztą oprzemy, nie podaje drogi uzyskania rozłożenia funkcji  $f(a)$  na  $h(a)$  i  $g(a)$ .

Zanalizujmy podaną powyżej definicję części skończonej całki rozbieżnej. Zajmiemy się całką rozbieżną w postaci:

$$(6.6) \quad \int_0^b \frac{\varphi(a)}{a^p} da,$$

gdzie  $p > 1$  jest całkowite.

Założymy, że funkcja  $\varphi(a)$  ma pochodne do rzędu  $p$  i jest ograniczona razem ze swoimi pochodnymi w przedziale  $\langle 0, b \rangle$ . Poza tym założymy, że  $\varphi^{(k)}(a) < \frac{A}{a^l}$  przy  $a \rightarrow \infty$ ,  $l > 1$ .

Zajmiemy się na razie całką zbieżną  $\int_{\varepsilon}^b \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha$ . Całkując przez części otrzymamy

$$(6.7) \quad \int_{\varepsilon}^b \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha = \frac{1}{1-p} \frac{\varphi(b)}{b^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\varphi'(b)}{b^{p-2}} - \dots \\ - \frac{1}{1-p} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-1}} + \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} - \dots + \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p-1)}(b) \ln b - \\ - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p-1)}(\varepsilon) \ln \varepsilon - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_{\varepsilon}^b \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha d\alpha.$$

Oznaczmy teraz zgodnie z definicją podaną uprzednio

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} = f(\alpha) = g(\alpha) + h(\alpha),$$

$$h(\alpha) = - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha$$

i przejdźmy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$  biorąc pod uwagę, że zgodnie z (6.5) odrzucamy wartości  $G(0)$ . Otrzymamy w takim przypadku następujący wzór na obliczenie części skończonej przy  $p > 1$ :

$$(6.8) \quad \text{f.p.} \int_0^b \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha = \frac{1}{1-p} \frac{\varphi(b)}{b^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(2-p)} \frac{\varphi'(b)}{b^{p-2}} + \dots + \\ + \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \varphi^{(p-1)}(b) \ln b - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_0^b \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha d\alpha.$$

Całka występująca po prawej stronie powyższego wyrażenia jest zbieżna na mocy uczynionych wyżej założeń dotyczących funkcji  $\varphi(\alpha)$ .

Jeżeli będziemy stosowali wyżej podany wzór na obliczenie części skończonej całki (6.6) w przypadku  $b \rightarrow \infty$ , to otrzymamy dla  $p > 1$ :

$$(6.9) \quad \text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha^p} d\alpha = - \frac{(-1)^n}{(1-p)(2-p)\dots(n-p)} \int_0^{\infty} \varphi^{(p)}(\alpha) \ln \alpha d\alpha.$$

Całka występująca po prawej stronie wyrażenia (6.9) jest całką zbieżną, ponieważ założyliśmy, że  $\varphi^{(k)}(\alpha) < A/\alpha^l$  przy  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $l > 1$ .

Łatwo zauważyć, że zgodnie z (6.5) część skończona całki rozbieżnej zdefiniowana jest z dokładnością do  $H(\alpha)|_{\alpha=0} < M$ . Niemniej wyniki uzyskane za pomocą tej definicji są prawidłowe, co udowodnimy w p. 7 niniejszej pracy. Wytłumaczyć to można faktem, że dodatkowe ewentualne człony rozwiązania typu  $H(\alpha)$  są częściami regularnymi naszego rozwiązania. Na powyższy fakt pewnych niedomagań definicji części skończonej zwrócić już uwagę J. HADAMARD [29].

Zauważymy, że jeżeli chcemy obliczyć część skończoną całki

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a} da,$$

to całkując formalnie przez części otrzymujemy [por. (6.8)]

$$\text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(a)}{a} da = - \int_0^{\infty} \varphi'(a) \ln a da.$$

Przykładowo otrzymamy:

$$\text{f.p.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta} d\beta = z \int_0^{\infty} e^{-\beta z} \ln \beta d\beta = -(C + \ln z), \quad \text{re } z > 0;$$

$C$  jest stałą Eulera, co pokrywa się z dokładnością do stałej  $C$  z częścią skończoną otrzymaną przez ZORSKIEGO [30].

Przejdźmy teraz do problemu całek  $R_1, R_2, R_3, R_4$  (6.3). Poniżej, wykorzystując poprzednio omówione pojęcie części skończonej całki rozbieżnej, obliczymy przykładowo całkę  $R_1$ :

$$(6.10) \quad R_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta y} d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha.$$

Po wzięciu pod uwagę [31], że

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha = \frac{\pi}{4|\beta^3|} (1 + x|\beta|) e^{-x|\beta|},$$

otrzymamy:

$$(6.11) \quad R_1 = \pi \operatorname{re} \int_0^{\infty} \frac{1 + x\beta}{\beta^3} e^{-\beta z} d\beta, \quad z = x + iy.$$

Skorzystamy teraz z zależności (6.9) i otrzymamy:

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta^3} d\beta &= -\frac{1}{2} z^2 (C + \ln z), \\ \text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta z}}{\beta^2} d\beta &= z(C + \ln z), \end{aligned} \quad \text{re } z > 0,$$

gdzie  $C$  jest stałą Eulera. Stąd ostatecznie:

$$\text{p.f.} R_1 = \pi \frac{x^2 + y^2}{2} (C + \ln |z|).$$

Pozostałe całki (6.3) otrzymujemy wykorzystując zależności:

$$R_2 = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) R_1, \quad R_3 = - \frac{\partial R_1}{\partial x}, \quad R_4 = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) R_3 = - \frac{\partial R_2}{\partial x}.$$

Stąd:

$$(6.13) \quad \begin{aligned} R_1 &= \pi \frac{x^2+y^2}{2} (C + \ln \sqrt{x^2+y^2}), & R_2 &= -2\pi(\ln \sqrt{x^2+y^2} + 1 + C), \\ R_3 &= -\pi x \ln \sqrt{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2} x(1+2C), & R_4 &= 2\pi \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

W zależnościach powyższych i w dalszym ciągu pracy całki należy rozumieć w sensie «części skończonej» pomimo nie zaznaczenia tego symbolem p.f. Oczywiście całki te jak wspomniano dają rozwiązanie naszego zagadnienia z dokładnością do części regularnej.

Ostatecznie, wstawiając otrzymane powyżej wartości całek do zależności (6.2) przy  $p^* = P/2\pi$ , otrzymujemy rozwiązanie problemu:

$$(6.14.1) \quad \omega_1^{(1)} = \frac{P}{16\pi D} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) - \frac{Ph^2}{20(1-\nu)\pi D} [\ln(x^2+y^2) + 2],$$

$$\omega_2^{(1)} = -\frac{P}{8\pi D} x [\ln(x^2+y^2) + 1], \quad \omega_3^{(1)} = -\frac{P}{8\pi D} y [\ln(x^2+y^2) + 1];$$

$$(6.14.2) \quad \omega_1^{(2)} = \frac{3P\nu(1+\nu)}{10\pi Eh} [\ln(x^2+y^2) + 2],$$

$$\omega_2^{(2)} = -\frac{3P\nu(1+\nu)}{10\pi Eh} \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \omega_3^{(2)} = -\frac{3P\nu(1+\nu)}{10\pi Eh} \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

W rozwiązaniu powyższym pominięto stałą Eulera  $C$ , która nie wpływa na rozwiązanie osobliwe.

Łatwo sprawdzić, że otrzymane powyżej rozwiązanie, będące sumą rozwiązań (6.14.1) i (6.14.2), spełnia układ równań (2.4) przy  $X_M = Y_M = 0$  z wyjątkiem punktu  $(0, 0)$  oraz warunek równoważenia się sił tnących z siłą  $P$  dla obszaru zawierającego wewnątrz punkt  $(0, 0)$ :

$$(6.15) \quad \int_C q_n ds = P.$$

Ponadto okazuje się, że warunki powyższe spełnia samodzielnie także rozwiązanie (6.14.1), podczas gdy rozwiązanie (6.14.2) daje

$$(6.16) \quad \int_C q_n ds = 0.$$

Powstaje więc pytanie, które z tych rozwiązań jest poszukiwanym rozwiązaniem przy działaniu siły skupionej. Mianowicie

$$\omega_i = \omega_i^{(1)} \quad \text{czy} \quad \omega_i = \omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Warto tu wspomnieć prace E. STERNBERGA i R. A. EUBANKSA [32,33], którzy zajmowali się problemem siły skupionej w teorii sprężystości i udowodnili, że jeżeli zażądać od rozwiązania od siły skupionej:

- a) spełnienia równań zagadnienia,
- b) spełnienia warunków brzegowych,
- c) regularności, z wyjątkiem punktu przyłożenia siły skupionej oraz równowagi siły skupionej z siłami brzegowymi dla dowolnego obszaru otaczającego punkt osobliwy, to takie postawienie problemu jest niejednoznaczne.

Rozwiązanie jednoznaczne otrzymują oni przez żądanie dodatkowej cechy, jaką ma spełnić. Cechą tą, według wyżej wspomnianych autorów, jest odpowiedni rząd naprężeń w otoczeniu siły skupionej. Zwróćmy uwagę na fakt, że szukamy rozwiązania problemu przy obciążeniu  $p(x, y) = \delta(x)\delta(y)P$ . W równaniach zagadnienia (2.4) występuje samo obciążenie  $p(x, y)$  jak i jego pochodne. Problem polega na tym, czy należy uwzględnić te pochodne, czy nie. Rozstrzygnięcie tego problemu jest trudne. Tradycyjne sformułowanie problemu, tzn. według podanych wyżej punktów a, b, c, nie daje odpowiedzi na powyższe pytanie.

Jak widać z powyższego, nasze pytanie nie może znaleźć odpowiedzi bez dodatkowych rozważań. Rozważania takie przeprowadzimy w dalszym ciągu pracy, a na razie zanalizujemy rozwiązanie (6.14.2) i ustalmy pewne cechy tego rozwiązania na drodze rozumowania natury fizycznej.

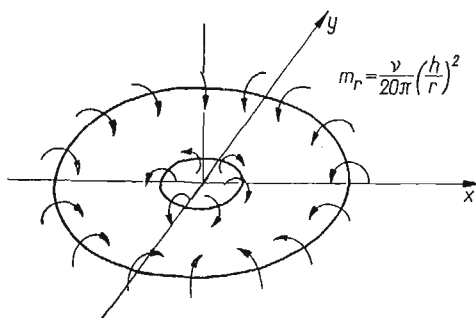
Weźmy pod uwagę związki między siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami sprowadzonymi (2.1). Otrzymamy dla rozwiązania (6.14.2) następujące wyrażenia na siły wewnętrzne ( $P = 1$ ):

$$(6.17) \quad \begin{aligned} m_x^{(2)} &= -\frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & m_{xy}^{(2)} &= \frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \\ m_y^{(2)} &= -\frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & q_x^{(2)} &= q_y^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

lub przechodząc do współrzędnych biegunowych (rys. 7)

$$(6.18) \quad m_r^{(2)} = \frac{\nu h^2}{20\pi} \frac{1}{r^2}, \quad m_{r\phi}^{(2)} = 0, \quad q_r^{(2)} = 0.$$

Otrzymaliśmy więc stan, który można zdefiniować jako «centrum zginania» przez analogię do znanego w teorii sprężystości rozwiązania centrum ściskania.



Rys. 7

Jak widać z powyższej analizy, rozwiązanie (6.14.2)  $\omega_i^{(2)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) przedstawia obciążenie osobliwe samorównoważne, którego dodanie do dowolnego stanu osobliwego, spełniającego żądania typu podanych wyżej dla siły skupionej w teorii sprężystości a, b, c nie zaburza tych ostatnich (str. 74).

Wydaje się, że podane powyżej rozwiązanie jest dobrą ilustracją tez zawartych w wyżej wspomnianej pracy [32].

W przypadku przez nas rozważanym rozwiązanie «centrum zginania» pojawiło się ze względu na specyficzny, przybliżony charakter uwzględniania naprężeń  $\sigma_z$ , prost-

padłych do powierzchni płyty. Naprężenia te pojawiają się w teorii Reissnera tylko na obszarze działania obciążenia  $p$ . Ze względu na powyższe rozważania określimy, na razie intuicyjnie, rozwiązania z indeksem 1 (6.14.1) jako rozwiązanie od siły skupionej, a w dalszym ciągu uzasadnimy to założenie.

Natomiast rozwiązanie z indeksem 2 (6.14.2) określimy jako osobliwość dodatkową.

Dla przypadku obciążenia siłą skupioną otrzymujemy, po wykorzystaniu (6.14.1) i (2.1), następujące rozwiązania dla sił wewnętrznych:

$$(6.19) \quad \begin{aligned} m_x &= -\frac{P}{8\pi} \left[ \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1 \right] - \frac{P\nu}{8\pi} \left[ \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + 1 \right], \\ m_y &= -\frac{P}{8\pi} \left[ \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + 1 \right] - \frac{P\nu}{8\pi} \left[ \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1 \right], \\ m_{xy} &= -\frac{P(1-\nu)}{4\pi} \frac{xy}{x^2+y^2}, \\ q_x &= -\frac{P}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}, \quad q_y = -\frac{P}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Analogiczne postępowanie pozwala znaleźć rozwiązania zagadnienia nieograniczonej płyty trójwarstwowej obciążonej siłą skupioną. Rozwiązania takie uzyskał autor w pracy [21]. Można je otrzymać także ze związków (6.14.1) po wykorzystaniu analogii równań (2.4), (2.11) i (2.12) oraz uwag z punktu drugiego niniejszej pracy. Warto nadmienić, że postępowanie powyżej podane nie doprowadzi w płycie trójwarstwowej do pojawienia się rozwiązania «centrum zginania». Wynika to z faktu, że w płytach tych pomijamy naprężenia normalne  $\sigma_z$ . Rozwiązania dla płyty trójwarstwowej w przypadku obciążenia siłą skupioną mają postać następującą:

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{P}{16\pi D_t} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) - \frac{P}{8\pi G_s h_1} [\ln(x^2+y^2) + 2], \\ \varphi_2 &= -\frac{P}{8\pi D_t} x [\ln(x^2+y^2) + 1], \quad \varphi_3 = -\frac{P}{8\pi D_t} y [\ln(x^2+y^2) + 1]. \end{aligned}$$

Siły wewnętrzne są identyczne z podanymi wyżej dla płyt reissnerowskich (6.19). Ponadto zauważymy, że są one identyczne ze znanymi siłami wewnętrznymi dla płyt izotropowych cienkich. Istotna różnica między rozwiązaniami dla omawianych płyt, a rozwiązaniami znanymi z teorii płyt cienkich tkwi w wyrażeniu na ugięcia  $\omega_1, \varphi_1$ .

**6.2. Obciążenie momentem skupionym pary sił pionowych.** Obciążenie to definiujemy jako graniczny przypadek działania dwóch sił skupionych przeciwnie skierowanych, gdy odległość ich zmierza do zera. Wobec powyższego rozwiązanie poszukiwane dla przypadku obciążenia płyty nieograniczonej momentem  $M$  (rys. 5) otrzymamy przez proste różniczkowanie rozwiązania dla przypadku działania siły skupionej (6.14.1)

$$(6.21) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{M}{8\pi D} x [\ln(x^2+y^2) + 1] - \frac{Mh^2}{10(1-\nu)\pi D} \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \omega_2 &= -\frac{M}{8\pi D} \left[ \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 1 \right], \\ \omega_3 &= -\frac{M}{8\pi D} \frac{2xy}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Wielkości statyczne w tym przypadku otrzymamy z następujących zależności:

$$(6.22) \quad \begin{aligned} m_x &= -\frac{M}{4\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \left[ (1+\nu) + (1-\nu) \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right], & q_x &= -\frac{M}{2\pi} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ m_y &= -\frac{M}{4\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \left[ (1+\nu) - (1-\nu) \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right], & q_y &= \frac{M}{2\pi} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\ m_{xy} &= -\frac{M(1-\nu)}{4\pi} \frac{y}{(x^2+y^2)^2} (y^2-x^2). \end{aligned}$$

Łatwo przekonać się, że spełnione są warunki równowagi dla wyciętej płyty zawierającej wewnątrz punkt osobliwy (rys. 5):

$$\int_C q_n ds = 0, \quad \int_C \sum_i M_{xi} ds = 0, \quad \int_C \sum_i M_{yi} ds = M.$$

Te same wyniki otrzymać można także i dla płyty trójwarstwowej.

**6.3. Obciążenie momentem skupionym.** Definicję tego momentu skupionego podano w punkcie piątym niniejszej pracy. Rozwiązania przeprowadzimy dla momentu skupionego  $X_M = M\delta(x)\delta(y)$  w oparciu o równania (2.4), które dla przypadku  $p = Y_M = 0$  przybierają postać następującą:

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_1 &= 0, & \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2 &= -\frac{X_M}{D}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wobec tego, że mamy do czynienia z rozwiązaniem płyty nieograniczonej, interesuje nas cała szczególna układu (6.23). Stąd przyjmiemy  $F_1 = F_3 = 0$ , a poszukiwane przemieszczenia określimy ze związków:

$$(6.24) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) F_2, & \omega_2 &= \left[ \nabla^2 \left( 1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( 1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) \right] F_2, \\ \omega_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( 1 + \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 \right) F_2, \end{aligned}$$

które wynikają z zależności (2.5). Przyjmijmy do rozwiązania obciążenie  $X_M = M\delta(x)\delta(y)$ .

Zastosujmy do równania (6.23.2) i zależności (6.24) podwójną nieskończoną transformację Fouriera (6.1). Otrzymamy w takim przypadku

$$(6.25) \quad F_2^*(\alpha, \beta) = -\frac{M}{2\pi D} \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (\alpha^2 + \beta^2) \right]}$$

i transformaty przemieszczeń sprowadzonych

$$\begin{aligned}
 \omega_1^*(a, \beta) &= -\frac{M}{2\pi D} \frac{ia}{(a^2 + \beta^2)^2}, \\
 \omega_2^*(a, \beta) &= \frac{M}{2\pi D} \frac{1}{a^2 + \beta^2} - \frac{M}{2\pi D} \frac{\beta^2}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} + \\
 &\quad + \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\beta^2}{(a^2 + \beta^2) \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]}, \\
 \omega_3^*(a, \beta) &= \frac{M}{2\pi D} \frac{\alpha\beta}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} - \\
 &\quad - \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{10} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha\beta}{(a^2 + \beta^2) \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]}.
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

Przemieszczenia wyznaczymy, jeżeli potrafimy obliczyć następujące całki:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta, \quad R_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ia e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta, \\
 R_5 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta, \\
 R_6 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2) \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta, \\
 R_7 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2)^2 \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta, \\
 R_8 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta e^{-i(\alpha x + \beta y)}}{(a^2 + \beta^2) \left[ 1 + \frac{h^2}{10} (a^2 + \beta^2) \right]} d\alpha d\beta.
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

Część tych całek istnieje jako całki niewłaściwe, mianowicie całki  $R_6$  i  $R_8$ .



Po wykorzystaniu tablic [31] otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (6.28) \quad R_0 &= \frac{10}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^2 e^{-i(ax+\beta y)}}{(\alpha^2 + \beta^2) \left[ \frac{10}{h^2} + \alpha^2 + \beta^2 \right]} d\alpha d\beta = \\
 &= \frac{40}{h^2} \int_0^{\infty} \beta^2 \cos \beta y d\beta \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(\alpha^2 + \beta^2) \left( \beta^2 + \frac{10}{h^2} + \alpha^2 \right)} d\alpha = 2\pi \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta x} \cos \beta y d\beta - \\
 &- 2\pi \int_0^{\infty} \beta^2 \cos \beta y \frac{\exp \left( -x \sqrt{\beta^2 + \frac{10}{h^2}} \right)}{\sqrt{\beta^2 + \frac{10}{h^2}}} d\beta = 2\pi \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right].
 \end{aligned}$$

Analogicznie obliczając całkę  $R_8$  otrzymamy

$$(6.29) \quad R_8 = 2\pi \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right],$$

gdzie  $\gamma = \sqrt{10/h^2}$ ,  $K_\nu(z)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela II rodzaju.

Obliczając pozostałe całki (6.27) wykorzystać musimy pojęcie części skończonej, omówione w 6.1 niniejszego punktu. Wymaga to wykonania szeregu żmudnych przekształceń, przy których uwzględnić trzeba podane poprzednio części skończone całek (6.12).

Poniżej podamy jedynie końcowe wyniki obliczeń:

$$\begin{aligned}
 (6.30) \quad R_2 &= -2\pi (\ln \sqrt{x^2 + y^2} + 1 + C), \quad R_3 = -\pi x \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\pi}{2} x(1 + 2C), \\
 R_5 &= -\pi \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \pi \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \frac{\pi}{2} (1 + 2C) + \\
 &+ \pi \frac{h^2}{5} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\
 R_7 &= -\pi \frac{xy}{x^2 + y^2} - \pi \frac{h^2}{5} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right].
 \end{aligned}$$

Następnie wykorzystując wzory na transformacje odwrotne oraz pomijając stałą Eulera  $C$  otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 (6.31) \quad \omega_1 &= \frac{M}{8\pi D} x [\ln(x^2 + y^2) + 1], \\
 \omega_2 &= -\frac{M}{8\pi D} \left[ \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} + 1 \right] - \\
 &- \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right], \\
 \omega_3 &= -\frac{M}{4\pi D} \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2 + y^2}) \right].
 \end{aligned}$$

Znając przemieszczenia łatwo wyznaczmy wielkości sił wewnętrznych w płycie nieograniczonej, obciążonej momentem skupionym. Wykorzystując związki (2.1) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 q_x &= \frac{M}{2\pi} \left\{ \frac{\cos 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] + \gamma^2 \sin^2 \varphi K_0(\gamma r) \right\}, \\
 q_y &= \frac{M}{2\pi} \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{r^2} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 2\varphi K_0(\gamma r) \right\}, \\
 m_x &= -\frac{M \cos \varphi}{4\pi} \frac{1}{r} [(1 + \nu) + 2(1 - \nu) \sin^2 \varphi] - \\
 &\quad - \frac{M h^2}{2\pi} \frac{1}{5} \left\{ \frac{\cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)}{r^3} [2 - 2\gamma r K_1(\gamma r) - \gamma^2 r^2 K_0(\gamma r)] + \gamma^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi K_1(\gamma r) \right\}, \\
 (6.32) \quad m_y &= -\frac{M \cos \varphi}{4\pi} \frac{1}{r} [(1 + \nu) - 2(1 - \nu) \sin^2 \varphi] + \\
 &\quad + \frac{M h^2}{2\pi} \frac{1}{5} \left\{ \frac{\cos \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi)}{r^3} [2 - 2\gamma r K_1(\gamma r) - \gamma^2 r^2 K_0(\gamma r)] + \gamma^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi K_1(\gamma r) \right\}, \\
 m_{xy} &= \frac{M(1 - \nu)}{4\pi} \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{r} + \\
 &\quad + \frac{M h^2}{2\pi} \frac{1}{5} \left\{ \frac{\sin \varphi (\sin^2 \varphi - 3 \cos^2 \varphi)}{r^3} [2 - 2\gamma r K_1(\gamma r) - \gamma^2 r^2 K_0(\gamma r)] + \frac{1}{2} \gamma^3 \sin \varphi \cos 2\varphi K_1(\gamma r) \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}.$$

Podamy jeszcze wielkości sprowadzonych przemieszczeń oraz pewne wielkości statyczne dla okręgu o promieniu  $r$ . Wielkości te będą potrzebne w dalszym ciągu pracy. Wykorzystując zależności (3.10) i (3.11) oraz to, że dla okręgu  $\cos(n, x) = \cos \varphi = x/r$ ,  $\cos(n, y) = \sin \varphi = y/r$  (rys. 8) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= -\omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi = \frac{M \sin \varphi}{8\pi D} (\ln r^2 + 1) + \\
 &\quad + \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1 - \nu)} \sin \varphi \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right], \\
 (6.33) \quad \omega_n &= \omega_2 \cos \varphi + \omega_3 \sin \varphi = -\frac{M \cos \varphi}{8\pi D} (\ln r^2 + 3) + \\
 &\quad + \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1 - \nu)} \cos \varphi \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{r} K_1(\gamma r) \right], \\
 q_n &= \frac{M}{2\pi} \cos \varphi \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{r} K_1(\gamma r) \right].
 \end{aligned}$$

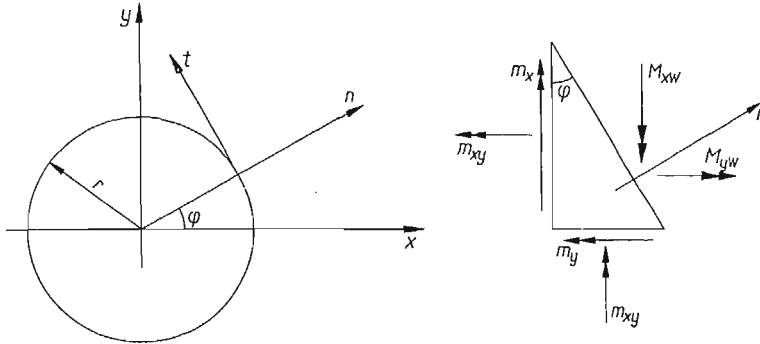
Oznaczając przez  $M_{xw}$  i  $M_{yw}$  składowe momentów brzegowych:

$$(6.34) \quad M_{xw} = m_x \cos \varphi + m_{xy} \sin \varphi, \quad M_{yw} = m_y \sin \varphi + m_{xy} \cos \varphi$$

otrzymamy na podstawie zależności (6.32)

$$(6.35) \quad M_{xw} = -\frac{M}{4\pi r} (1 + \nu \cos 2\varphi) - \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \cos 2\varphi \left[ \frac{2}{r^3} - \frac{2\gamma}{r^2} K_1(\gamma r) - \frac{\gamma^2}{r} K_0(\gamma r) \right] - \frac{M}{2\pi} \gamma \sin^2 \varphi K_1(\gamma r),$$

$$M_{yw} = -\frac{M\nu \sin 2\varphi}{4\pi r} - \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \sin 2\varphi \left[ \frac{2}{r^3} - \frac{2\gamma}{r^2} K_1(\gamma r) - \frac{\gamma^2}{r} K_0(\gamma r) - \frac{1}{4} \gamma^3 K_1(\gamma r) \right].$$



Rys. 8

Przejdziemy teraz do sprawdzenia warunku równowagi dla płyty ograniczonej brzegiem  $C$ , wyciętej z płyty nieograniczonej w ten sposób, że punkt  $(0, 0)$  znajdzie się wewnątrz płyty wyciętej. Nie naruszając ogólności sprawdzimy równowagę dla przypadku, gdy  $C$  jest okręgiem o promieniu  $r$ .

Sprawdzimy teraz kolejno (rys. 8):

1) warunek równowagi sił pionowych

$$\int_{C_r} q_n ds = \frac{M}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0;$$

2) warunek równowagi momentów względem osi  $y$

$$\begin{aligned} \int_{C_r} (q_n r \cos \varphi - M_{xw}) ds &= \frac{M}{2\pi} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \\ &+ \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{M}{2\pi} r \gamma K_1(\gamma r) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = M; \end{aligned}$$

3) warunek równowagi momentów względem osi  $x$

$$\int_{C_r} (q_n r \sin \varphi - M_{y_w}) ds = \frac{M}{2\pi} [1 - \gamma r K_1(\gamma r)] \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) - \frac{\gamma^3}{4} r K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0.$$

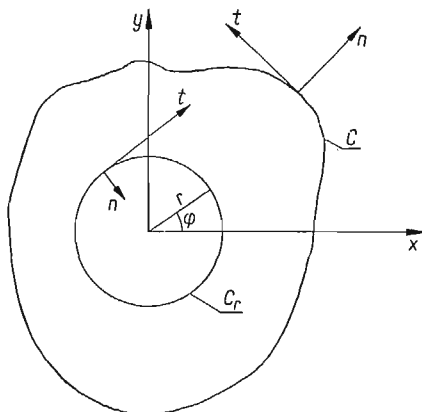
Jak widać z powyższego, rozwiązanie spełnia warunki wymagane tradycyjnie od rozwiązań przy obciążeniu skupionym.

Jak wykazaliśmy poprzednio sformułowanie to nie prowadzi do rozwiązań jednoznacznych.

Udowodnienie, że rozwiązania te przedstawiają poszukiwane przez nas rozwiązania przy obecności obciążeń skupionych przeprowadzimy w punkcie następnym w oparciu o twierdzenie o wzajemności prac.

### 7. Dowód wzorów podstawowych

Przejdziemy teraz do wykazania, że otrzymane przez nas w punkcie poprzednim rozwiązanie pozwalają na podanie przemieszczeń sprowadzonych danej płyty Reissnera przy danych na jej brzegu wielkościach brzegowych.



Rys. 9

Zajmiemy się płytą o obszarze  $B$  ograniczoną krzywą  $C$  (rys. 9). Niech na brzegu  $C$  tej płyty będą dane następujące wielkości:  $m_n$ ,  $m_t$ ,  $q_n$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_t$ . Ogólnie biorąc wielkości te nie są niezależne (tylko trzy z nich są dowolne). Pytanie nasze brzmi: jaki jest związek między wielkościami przemieszczeń sprowadzonych  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) w obszarze  $B$ , a danymi powyżej wielkościami na brzegu  $C$ ?

Odpowiemy na to pytanie obliczając kolejno  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  w obszarze  $B$ .

**7.1. Obliczenie przemieszczenia pionowego  $\omega_1$ .** Zastosujemy twierdzenie o wzajemności prac do dwóch stanów. Jednym z nich niech będzie stan omówiony powyżej związany z danymi wielkościami brzegowymi. Stan ten symbolicznie oznaczymy jako  $S(\omega)$ . Jako drugi stan przyjmijmy stan odpowiadający obciążeniu siłą skupioną płyty nieograniczonej (6.14.1), (6.19)  $S(\omega_0)$ . Rozwiązanie to wykazuje osobliwość w punkcie przyłożenia siły

skupionej  $(0, 0)$ , nie możemy więc zastosować twierdzenia E. Bettiego dla całego obszaru płyty  $B$ . Wytnijmy z niej obszar zawierający wewnątrz punkt  $(0,0)$  i ograniczony okręgiem  $C_r$  o promieniu  $r$ . Zastosujmy teraz twierdzenie o wzajemności prac (3.14) do obszaru ograniczonego brzegiem  $C$  i  $C_r$  (rys. 9). Uwzględniając to, że w obszarze tym dla obu stanów  $p = X_M = Y_M = 0$ , otrzymamy:

$$(7.1) \quad \int_{C+C_r} (q_n \omega_{10} + m_n \omega_n + m_{nt} \omega_{t0} - q_{n0} \omega_1 - m_{n0} \omega_n - m_{nt0} \omega_t) ds = 0.$$

Indeksem 0 oznaczono powyżej wielkości związane z obciążeniem siłą skupioną. Zanalizujmy teraz zachowanie się zależności (7.1) przy dążeniu promienia  $r$  do zera.

Zanim wykonamy tę analizę, podamy odpowiednie wielkości rozwiązania osobliwego na brzegu  $C_r$ :

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \omega_{n0} &= \omega_{20} \cos \varphi + \omega_{30} \sin \varphi = -\frac{Pr}{8\pi D} (\ln r^2 + 1), \\ \omega_{t0} &= -\omega_{20} \sin \varphi + \omega_{30} \cos \varphi = 0, \\ m_{n0} \omega_n + m_{nt0} \omega_t &= (m_{x0} \cos \varphi + m_{xy0} \sin \varphi) \omega_2 + (m_{y0} \sin \varphi + m_{xy0} \cos \varphi) \omega_3 = \\ &= -\frac{P}{8\pi} \cos \varphi [(1+\nu)(\ln r^2 + 1) + 2] \omega_2 - \frac{P}{8\pi} \sin \varphi [(1+\nu)(\ln r^2 + 1) + 2] \omega_3, \\ q_{n0} &= -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Zależności powyższe otrzymano po wykorzystaniu związków (3.10), (3.11), (6.14.1) i (6.19).

Prześledzimy teraz zachowanie się poszczególnych składników wyrażenia (7.1) przy  $r \rightarrow 0$ . Zauważmy ponadto, że dla brzegu  $C_r$   $ds = -rd\varphi$ .

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_n \omega_{10} ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{16\pi D} \int_{C_r} q_n r^2 \ln r^2 ds - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Ph^2}{20(1-\nu)\pi D} \int_{C_r} q_n (\ln r^2 + 2) ds = \\ &= -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{16\pi D} r^3 \ln r^2 \int_0^{2\pi} q_n d\varphi + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Ph^2 r}{20(1-\nu)\pi D} (\ln r^2 + 2) \int_0^{2\pi} q_n d\varphi. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę ciągłość funkcji  $q_n(\omega)$  otrzymamy  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_n \omega_{10} ds = 0$ .

Analogicznie postępując po uwzględnieniu zależności (7.2) otrzymujemy:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_n \omega_{n0} ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Pr^2}{8\pi D} (\ln r^2 + 1) \int_0^{2\pi} d\varphi = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_{nt} \omega_{t0} ds &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_{n0} \omega_1 ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{P}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_1 d\varphi = P\omega_1(0, 0), \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (m_{n0} \omega_n + m_{nt0} \omega_t) ds &= 0. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc po wykonaniu przejścia granicznego  $r \rightarrow 0$  w wyrażeniu (7.1) i po przyjęciu  $P = 1$  otrzymujemy wzór podstawowy dla określenia ugięcia  $\omega_1(Q_0)$  za pomocą wielkości brzegowych:

$$(7.5) \quad \omega_1(Q_0) = \int_C (q_n \omega_{10} + m_n \omega_{n0} + m_{nt} \omega_{t0} - q_{n0} \omega_1 - m_{n0} \omega_n - m_{nt0} \omega_t) ds.$$

Wykazaliśmy więc, że rozwiązanie (6.14.1) ma wymaganą osobliwość dla wyrażenia wielkości  $\omega_1(Q_0)$  w danym obszarze  $B$  za pomocą wielkości brzegowych.

Ugięcie w dowolnym punkcie obszaru płyty  $Q_0(x, y)$  obliczymy ze związku (7.5), jeżeli dokonamy przesunięcia układu współrzędnych. Wtedy wielkość z indeksem 0 będziemy uważali za funkcje dwóch punktów np.:

$$\omega_{10} = \frac{1}{16\pi D} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \ln [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] - \frac{h^2}{20(1-\nu)\pi D} \{ \ln [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] + 2 \}.$$

Punkt  $Q_1(x_1, y_1)$  znajduje się na krzywej  $C$ .

Pozostaje jeszcze pytanie, czy jeżeli dodamy do rozwiązania osobliwego przed chwilą diskutowanego rozwiązanie «centrum zginania», wynik ulegnie zmianie i w jaki sposób. Okazuje się, że jeżeli we wzorze (7.1) wstawimy zamiast rozwiązania z indeksem 0 rozwiązanie osobliwe «centrum zginania» (6.14.2), (6.18), to w wyniku przejścia granicznego otrzymamy:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (q_n \omega_{10}^{(2)} + m_n \omega_{n0}^{(2)} + m_{nt} \omega_{t0}^{(2)} - q_{n0}^{(2)} \omega_1 - m_{n0}^{(2)} \omega_n - m_{nt0}^{(2)} \omega_t) ds \rightarrow \infty.$$

Oznacza to, że rozwiązanie «centrum zginania» jest nieprzydatne do zbudowania wzoru (7.5). Porównując wnioski powyższe z zależnościami (5.4) i dalszymi widzimy, że działanie siły skupionej opisuje rozwiązanie (6.14.1).

Dyskusję powyższą warto porównać z przykładem podanym przez E. STERNBERGA i R. A. EUBANKSA [32] dla przypadku centrum ściskania.

**7.2. Obliczenie  $\omega_2$ .** Postępując analogicznie jak poprzednio rozpatrzmy dwa stany obciążeń. Jednym z nich niech będzie stan  $S(\omega)$  określony przez wielkości brzegowe. Natomiast jako drugi stan przyjmiemy obciążenie momentem skupionym  $X_M$ , przyłożonym w początku układu współrzędnych. Początek układu umieścimy w obszarze  $B$  zajętej przez płytę (rys. 9). Stan ten symbolicznie oznaczymy jako  $S(\omega_0^M)$ . Zastosujmy teraz twierdzenia E. BÉTTIEGO do obszaru ograniczonego brzegiem  $C$  i okręgiem współśrodkowym z punktem przyłożenia momentu skupionego. Zagadnienie sprowadza się do zanalizowania wzoru:

$$(7.6) \quad \int_{C+C_r} (q_n \omega_{10}^M + m_n \omega_{n0}^M + m_{nt} \omega_{t0}^M - q_{n0}^M \omega_1 - m_{n0}^M \omega_n - m_{nt0}^M \omega_t) ds = 0$$

przy  $r \rightarrow 0$ .

Powyżej indeksami  $0^M$  oznaczono wielkości związane z obciążeniem momentem skupionym  $X_M$  (6.29).

Musimy więc teraz obliczyć granicę całki (7.6) po krzywej  $C_r$  przy  $r \rightarrow 0$ . Zanim przeprowadzimy to obliczenie, podamy potrzebne do dalszych rozważań związki między zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$ . Będzie nas interesowało zachowanie się tych funkcji i ich pewnych kombinacji dla wskaźnika  $\nu = 0, 1$  przy  $z \rightarrow 0$ .

Przedstawimy te funkcje rozkładając je na część regularną i część osobliwą [34]

$$\begin{aligned}
 K_0(z) &= -I_0(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right), \\
 K_1(z) &= I_1(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{z}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k+1} \right] + \frac{1}{z},
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

$$I_0(z) = 1 + \left( \frac{z}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{z}{2} \right)^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k},$$

$$I_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{1!2!} \left( \frac{z}{2} \right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left( \frac{z}{2} \right)^5 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)} \left( \frac{z}{2} \right)^{1+2k}.$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności podamy poniżej granice pewnych kombinacji zmodyfikowanych funkcji Bessela przy  $z \rightarrow 0$ . Wyrażenia te [granice potrzebne będą w dalszym ciągu pracy przy szacowaniu wyżej wspomnianych całek wyrażenia (7.6)] przedstawimy kolejno

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\gamma r} - K_1(\gamma r) \right] &= 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\gamma r} - K_1(\gamma r) - \gamma r K_0(\gamma r) \right] &= 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{\gamma^2 r^2} - \frac{2}{\gamma r} K_1(\gamma r) - K_0(\gamma r) \right] &= 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} r K_1(\gamma r) &= \frac{1}{\gamma}.
 \end{aligned}
 \tag{7.8}$$

Obliczmy teraz granice poszczególnych składników wyrażenia (7.6) po krzywej  $C_r$  przy  $r \rightarrow 0$ .

Po wzięciu pod uwagę zależności (6.31), (6.33), (7.8) i regularności w obszarze  $B$  rozwiązania stanu  $S(\omega)$  otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_n \omega_{10}^M ds &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{8\pi D} r^2 (\ln r^2 + 1) \int_0^{2\pi} q_n \cos \varphi d\varphi = 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_n \omega_{n0}^M ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{8\pi D} r (\ln r^2 + 3) \int_0^{2\pi} m_n \cos \varphi d\varphi - \\
 &\quad - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[ \frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} m_n \cos \varphi d\varphi = 0, \\
 (7.9) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} m_{nr} \omega_{n0}^M ds &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{8\pi D} r (\ln r^2 + 1) \int_0^{2\pi} m_{nr} \sin \varphi d\varphi - \\
 &\quad - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[ \frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} m_{nr} \sin \varphi d\varphi = 0, \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} q_{n0}^M \omega_{11} ds &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \gamma K_1(\gamma r) \right] \int_0^{2\pi} \omega_1 \cos \varphi d\varphi = 0.
 \end{aligned}$$

Ostatnie dwie całki wyrażenia (7.6) przekształcimy, podobnie zresztą jak w przypadku obliczenia ugięcia  $v_1$  (7.2), następująco:

$$(7.10) \quad \int_{C_r} (m_{n0}^M \omega_n + m_{nr0}^M \omega_r) ds = \int_{C_r} (m_{x0}^M \cos \varphi + m_{xy0}^M \sin \varphi) \omega_2 ds + \int_{C_r} (m_{y0}^M \sin \varphi + m_{xy0}^M \cos \varphi) \omega_3 ds.$$

Wykorzystując teraz zależności (6.34), (6.35) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (m_{x0}^M \cos \varphi + m_{xy0}^M \sin \varphi) \omega_2 ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_2 d\varphi + \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_2 \cos 2\varphi d\varphi + \right. \\
 + \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{2\gamma}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) \right] &\int_0^{2\pi} \omega_2 \cos 2\varphi d\varphi + \gamma r K_1(\gamma r) \int_0^{2\pi} \omega_2 \sin^2 \varphi d\varphi \left. \right\} = M\omega_2(0, 0), \\
 \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (m_{y0}^M \sin \varphi + m_{xy0}^M \cos \varphi) \omega_3 ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{M\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega_3 \sin 2\varphi d\varphi + \right. \\
 + \frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[ \frac{2}{r^2} - \gamma \frac{2}{r} K_1(\gamma r) - \gamma^2 K_0(\gamma r) - \gamma^3 \frac{r}{4} K_1(\gamma r) \right] &\int_0^{2\pi} \omega_3 \sin 2\varphi d\varphi \left. \right\} = 0.
 \end{aligned}$$



Wracając teraz do analizy zależności (7.6) możemy stwierdzić, że po wykonaniu przejścia granicznego w tym wyrażeniu  $r \rightarrow 0$  i po przyjęciu  $M = 1$  otrzymamy:

$$(7.11) \quad \omega_2(Q_0) = \int_C (q_n \omega_{i0}^M + m_n \omega_{n0}^M + m_{ni} \omega_{i0}^M - q_{n0}^M \omega_1 - m_{n0}^M \omega_n - m_{ni0}^M \omega_i) ds.$$

Wielkości z indeksem  $0^M$  przedstawiają rozwiązanie płyty nieograniczonej, obciążonej momentem skupionym  $X_m = M\delta(x)\delta(y)$  przy  $M = 1$ .

Podobnie jak w punkcie poprzednim 7.1, jeżeli dokonamy przesunięcia układu współrzędnych i wielkości z indeksami  $0^M$  będziemy traktowali jako funkcje dwóch punktów  $Q_0(x, y)$  i  $Q_1(x_1, y_1)$ , otrzymamy ze wzoru (7.11) sprowadzony kąt obrotu  $\omega_2$  w dowolnym punkcie  $Q_0(x, y)$  obszaru  $B$ .

Rozszerzenie omówionego zagadnienia na płyty trójwarstwowe jest bardzo proste i nie wymaga dodatkowych wyjaśnień, wystarczy posłużyć się tylko wspomnianą uprzednio analogią między płytami Reissnera i płytami trójwarstwowymi (2.12).

### 8. Rozwiązanie szczegółowe

Podane w p. 6 rozwiązania podstawowe osobliwe dotyczą płyt nieograniczonych. Łatwo sprawdzić, że wzory podstawowe, podające rozwiązanie układu równań (2.3) za pomocą wielkości brzegowych, będą nadal aktualne, jeżeli zamiast rozwiązań podstawowych osobliwych zastosujemy rozwiązania będące sumą:

$$\omega_i = \omega_{i0} + \omega_{ir}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie rozwiązania z indeksem  $r$  przedstawiają funkcje regularne w obszarze zajmowanym przez płytę.

Jak już powiedzieliśmy wyżej, w zagadnieniu płyt Reissnera możemy założyć na brzegu tylko trzy niezależne wielkości, podczas gdy we wzorach (7.5) i (7.11) występuje ich sześć. W związku z powyższym rozwiązanie szczegółowe dla danej płyty przy określonym problemie brzegowym otrzymamy wykorzystując wzory podstawowe przy wykorzystaniu zamiast osobliwych rozwiązań podstawowych rozwiązania będącego sumą tego ostatniego i rozwiązania regularnego tak dobrane, aby były spełnione jednorodne warunki brzegowe danej płyty.

Zagadnienie znalezienia wyżej wspomnianego rozwiązania regularnego nie przedstawia pod względem matematycznym trudności. Możliwe jest tu zastosowanie metod numerycznych. Sposób powyższy jest znany i był wykorzystany przez PUCHERA [35], SUCHARA [36] oraz KRUGA i STEINA [37] przy budowaniu powierzchni wpływowych dla płyt cienkich.

Jeszcze wydatniej potrafimy uprościć rozwiązanie, jeżeli będziemy znali rozwiązanie zamknięte danej płyty obciążonej siłą skupioną i momentem skupionym przy spełnieniu jednorodnych warunków brzegowych danego zagadnienia, tzn. jeżeli będziemy znali funkcje Greena tego zagadnienia.

Sposób wykorzystania wzorów podstawowych (7.5) i (7.11) dla otrzymania rozwiązania pewnego problemu brzegowego omówimy na przykładzie. Niech będzie dana płyta zajmująca obszar  $B$ . Szukamy przemieszczeń  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) w obszarze płyty przy danych na brzegu płyty  $C$  następujących wielkościach:  $m_n(s) = f_1(s)$ ,  $\omega_1(s) = f_2(s)$ ,  $m_{ni}(s) = f_3(s)$ .

Założymy, że znamy rozwiązania zagadnienia naszej płyty obciążonej siłą skupioną  $P = 1$  oraz momentami skupionymi  $M_x = 1$  i  $M_y = 1$ . Niech rozwiązania te spełniają następujące warunki brzegowe:  $m_n(s) = \omega_1(s) = m_{nn}(s) = 0$ . Rozwiązanie naszego problemu otrzymamy więc wprost z zależności (7.5) i (7.11) np.

$$\omega_1(Q_0) = \int_C [f_1(s)\omega_{10} + f_3(s)\omega_{10} - f_2(s)q_{n0}] ds,$$

gdzie pod całkami występują tylko znane funkcje.

W punkcie niniejszym pokażemy rozwiązanie pewnego problemu brzegowego płyty Reissnera i trójwarstwowej, które otrzymamy w oparciu o powyższe rozumowanie.

**8.1. Półpłaszczyzna.** Rozważmy półpłaszczyznę ograniczoną prostą  $x = 0$ . Założymy następujące dane na brzegu ograniczającym naszą płytę:

$$\omega_1(0, y) = f_1(y), \quad m_x(0, y) = f_2(y), \quad \omega_y(0, y) = -\omega_r(0, y) = f_3(y).$$

Zadaniem naszym jest znalezienie przemieszczeń  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dla  $x > 0$  przy podanych wyżej wartościach brzegowych. Chcąc wykorzystać wzory (7.5) i (7.11), zgodnie z tym co już powiedziano wyżej, powinniśmy znać rozwiązanie osobliwe spełniające jednorodne warunki brzegowe  $\omega_{10} = m_{x0} = \omega_{30} = 0$  dla prostej  $x = 0$ . Rozwiązanie takie nazywamy funkcją Greena. Jeżeli więc potrafimy znaleźć funkcję Greena dla półpłaszczyzny przy danych powyżej warunkach brzegowych, to rozwiązanie problemu przedstawimy następująco:

$$\omega_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(y_1)\omega_{n0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) - f_1(y_1)q_{n0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) + f_3(y_1)m_{n0}^{(P)}(x, y, 0, y_1)] dy_1, \quad (8.1)$$

$$\omega_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(y_1)\omega_{n0}^{(X)}(x, y, 0, y_1) - f_1(y_1)q_{n0}^{(X)}(x, y, 0, y_1) + f_3(y_1)m_{n0}^{(X)}(x, y, 0, y_1)] dy_1$$

i analogicznie dla  $\omega_3(x, y)$ . Powyżej indeksem  $P$  oznaczono rozwiązanie dla siły  $P = 1$ , a indeksem  $X$  rozwiązanie dla momentu skupionego  $X_M$ .

Wracając do sposobu znalezienia tych rozwiązań zauważmy, że żądamy spełnienia dla nich warunków antysymetrii na prostej  $x = 0$ , czyli wolnego podparcia z przeponą [warunek 4 (4.6)]. Rozwiązanie otrzymamy więc obciążając płytę nieograniczoną siłą i momentami skupionymi, antysymetrycznie względem osi  $x = 0$ . Zauważmy jeszcze, że będą nas interesowały tylko pewne wielkości tych rozwiązań na prostej ograniczającej nasz obszar. Ażeby nie rozszerzać pracy, podamy więc jedynie te ostatnie. Wykorzystując zależności (6.14.1), (6.21), (6.31) i (6.34) oraz (3.10) i (3.11) otrzymamy:

$$\omega_{20}^{(Q)}(x, y, 0, y_1) = -\omega_{n0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1), \quad q_{x0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1) = -q_{n0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1), \quad (8.2.1)$$

$$m_{xy0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1) = m_{n0}^{(Q)}(x, y, 0, y_1);$$

$$\omega_{20}^{(P)}(x, y, 0, y_1) = \frac{1}{4\pi D} r_1 \cos\theta (\ln r_1^2 + 1),$$

$$q_{x0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos\theta}{r_1}, \quad (8.2.2)$$

$$m_{xy0}^{(P)}(x, y, 0, y_1) = \frac{1-\nu}{4\pi} \sin 2\theta;$$

$$\begin{aligned}
\omega_{z_0}^{(x)}(x, y, 0, y_1) &= -\frac{1}{4\pi D} (\ln r_1^2 + 2\cos^2\theta + 1) + \\
&\quad + \frac{1}{\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left\{ \frac{\cos 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] + \gamma^2 \sin^2\theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
(8.2.3) \quad q_{x_0}^{(x)}(x, y, 0, y_1) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\cos 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] + \gamma^2 \sin^2\theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
m_{xy_0}^{(x)}(x, y, 0, y_1) &= \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{\sin\theta \cos 2\theta}{r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{h^2}{5} \left\{ \frac{\sin\theta (\sin^2\theta - 3\cos^2\theta)}{r_1^3} \times \right. \\
&\quad \left. \times [2 - 2\gamma r_1 K_1(\gamma r_1) - \gamma^2 r_1^2 K_0(\gamma r_1)] + \frac{1}{2} \gamma^3 \sin\theta \cos 2\theta K_1(\gamma r_1) \right\}, \\
\omega_{z_0}^{(y)}(x, y, 0, y_1) &= -\frac{1}{4\pi D} \sin 2\theta + \frac{1}{\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 2\theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
(8.2.4) \quad q_{x_0}^{(y)}(x, y, 0, y_1) &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin 2\theta}{r_1^2} [1 - \gamma r_1 K_1(\gamma r_1)] - \frac{1}{2} \gamma^2 \sin 2\theta K_0(\gamma r_1) \right\}, \\
m_{xy_0}^{(y)}(x, y, 0, y_1) &= \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{\cos\theta \cos 2\theta}{r_1} - \frac{1}{\pi} \frac{h^2}{5} \left\{ \frac{\cos\theta (\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)}{r_1^3} \times \right. \\
&\quad \left. \times [2 - 2\gamma r_1 K_1(\gamma r_1) - \gamma^2 r_1^2 K_0(\gamma r_1)] - \frac{1}{2} \gamma^3 \cos\theta \cos 2\theta K_1(\gamma r_1) \right\},
\end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$r_1^2 = x^2 + (y_1 - y)^2, \quad \gamma = \sqrt{10/h^2},$$

( $\rho$ ) kolejno ( $P$ ), ( $X$ ), ( $Y$ ),

$$\sin\theta = \frac{y_1 - y}{r_1}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r_1}.$$

Wstawiając powyższe zależności do związków (8.1) otrzymujemy rozwiązanie problemu. Przykładowo podamy rozwiązanie dla przypadku  $f_2 = f_3 = 0$ ,  $\omega_1(G, y) = f_1(y)$ :

$$\begin{aligned}
\omega_1(x, y) &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(y_1)}{x^2 + (y_1 - y)^2} dy_1, \\
(8.3) \quad \omega_2(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(y_1 - y)^2 - x^2}{[x^2 + (y_1 - y)^2]^2} - \gamma \frac{(y_1 - y)^2 - x^2}{[x^2 + (y_1 - y)^2]^{3/2}} K_1(\gamma r_1) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma^2 \frac{(y_1 - y)^2}{[x^2 + (y_1 - y)^2]} K_0(\gamma r_1) \right\} f_1(y_1) dy_1
\end{aligned}$$

i podobnie dla  $\omega_3(x, y)$ .

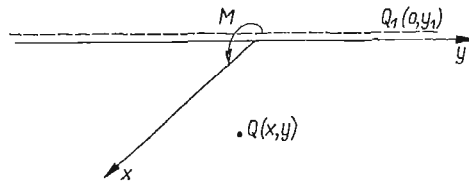
Oczywiście łatwo sprawdzić po wzięciu pod uwagę wyrażenia asymptotycznego dla dużych wartości argumentu [38]

$$(8.4) \quad K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(\nu, k)}{(2z)^k} + O(z^{-n-1}) \right],$$

$$(\nu, k) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} + k\right)}{k! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right)}, \quad (\nu, 0) = 1$$

że  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_2 = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$ , czego należało się spodziewać.

Podamy jeszcze rozwiązanie dla przypadku, gdy  $f_1 = f_3 = 0$ ,  $f_2 = M\delta(y_1)$  co odpowiada działaniu momentu skupionego w początku układu współrzędnych (rys. 10).



Rys. 10

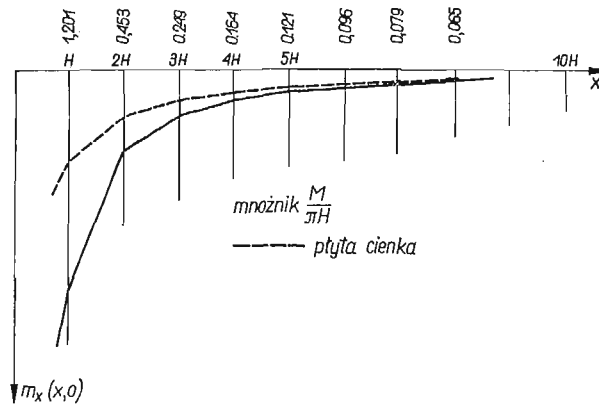
W tym przypadku obciążenia rozwiązanie podamy jedynie dla momentu  $m_x(x, y)$ :

$$(8.5) \quad m_x = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \left[ (1 + \nu) + (1 - \nu) \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right] +$$

$$+ \frac{M}{\pi} \frac{h^2}{5} \left\{ \frac{x^3 - 3x^2y}{(x^2 + y^2)^3} \left[ 2 - 2\gamma(x^2 + y^2)^{1/2} K_1(\gamma r) - \gamma^2(x^2 + y^2) K_0(\gamma r) \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma^3 \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} K_1(\gamma r) \right\}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Pozostałe wielkości łatwo otrzymamy po wykorzystaniu zależności niniejszego punktu.



Rys. 11

Rozwiązanie podane powyżej (8.5) jest słuszne także dla płyty trójwarstwowej, należy tylko posłużyć się analogią między tymi płytami i płytą Reissnera (2.12).

Na rysunku 11 podano wykres  $m_x(x, 0)$  dla płyty trójwarstwowej o następujących charakterystykach:  $E = 1,8 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>,  $G_s = 1,0 \cdot 10^4$  kG/cm<sup>2</sup>,  $d = 3$  cm,  $h_1 = 10$  cm,  $\nu_1 = 0$ ,  $\eta = 1,35 H$ ,  $\gamma = 1,217 \frac{1}{H}$ ,  $H = 2h_1$ .

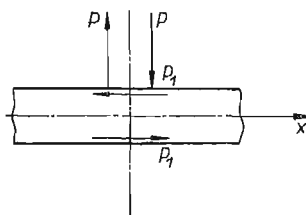
Dla porównania pokazano na tym samym rysunku wykres odpowiadający cienkiej płycie izotropowej.

Dodajmy na koniec, że rozwiązanie od momentu skupionego możemy także otrzymać wprost z rozwiązania (6.31), (6.34) wykorzystując antysymetrię działania momentu.

**8.2. O osobliwościach wyższego rzędu w teorii płyt Reissnera i trójwarstwowych.** Podamy poniżej rozwiązanie zagadnienia nieograniczonej płyty Reissnera poddanej działaniu obciążenia skupionego, równego różnicy momentu skupionego zdefiniowanego w oparciu o obciążenie  $X_m = M(Q_0)$  i momentu skupionego określonego jako granica  $M = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} P\epsilon_x$ .

Zadanie to ma raczej charakter teoretyczny, niemniej posłuży do zilustrowania tezy, że sformułowanie zagadnienia przy obciążeniach skupionych w teorii płyt nie może być oparte na tak zwanym sformułowaniu tradycyjnym, o którym była już mowa w p. 6 niniejszej pracy.

Zajmiemy się nieograniczoną płytą obciążoną jak pokazano schematycznie na rys. 12.



Rys. 12

Rozwiązanie dla takiego obciążenia otrzymamy odejmując od siebie odpowiednie rozwiązania, podane w p. 6 dla obu rodzajów momentu skupionego. Biorąc pod uwagę związki (6.21) i (6.31) otrzymamy:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \omega_1^{AM} &= \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \omega_2^{AM} &= -\frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \sqrt{x^2+y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K_0(\gamma \sqrt{x^2+y^2}) \right], \\ \omega_3^{AM} &= -\frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2+y^2}) \right]. \end{aligned}$$

Można wykazać, że w przypadku sprowadzenia problemu do szukania jednej funkcji biharmonicznej i jednej spełniającej równanie  $\left(1 - \frac{h^2}{10} \nabla^2\right) H = 0$ , jak pokazano w p. 2 (2.8), otrzymujemy dla omawianego przypadku:

$$(8.7) \quad \begin{aligned} B &= \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2+y^2}, \\ H &= \frac{M}{2\pi D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} K_0(\gamma \sqrt{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

W tym przypadku wielkości sił wewnętrznych łatwo wyznaczyć korzystając ze wzorów (2.1) i zależności (8.6) albo wykorzystując podane w p. 6 wielkości sił wewnętrznych dla obciążenia momentami skupionymi obu rodzajów. Poniżej podamy jedynie przykładowo dla współrzędnych biegunowych:

$$(8.8) \quad \begin{aligned} q_r &= -\frac{M}{2\pi} \gamma \frac{\cos\varphi}{r} K_1(\gamma r), \\ m_r &= -\frac{M}{2\pi} \frac{h^2}{5} \left[ \frac{2}{r^3} - \gamma \frac{2}{r^2} K_1(\gamma r) - \gamma^2 \frac{1}{r} K_0(\gamma r) \right] \cos\varphi. \end{aligned}$$

Można się przekonać, że rozwiązanie tego problemu, podane wyżej, spełnia równanie zagadnienia i jest regularne w całej płaszczyźnie z wyjątkiem punktu  $(0, 0)$ , poza tym wypadkowa wszystkich sił brzegowych, dla dowolnego obszaru zawierającego wewnątrz punkt przyłożenia obciążenia skupionego, jest równa zero. Jest to zrozumiałe ze względu na fakt, że obciążenie jest samorzównoważone. Wobec powyższego w sformułowaniu tradycyjnym stan ten powinien być równy «zeru», czego oczywiście nie można stwierdzić. Wydawać by się mogło, że zgodnie z zasadą Saint-Venanta różnica wynikająca z powyższego rozwiązania może nas nie interesować. Jednak i z tym nie można się zgodzić, ponieważ zasięg wpływu powyższego rozwiązania nie jest mniejszy niż poprzednich rozwiązań dla obciążeń, które nie były samorzównoważone. Poza tym rozwiązanie podane powyżej dla różnicy omawianych dwóch momentów nie jest fizycznie bez znaczenia. Rozwiązanie to w sposób istotny, w sensie twierdzenia o pracy wirtualnej, wpływa na poszukiwane wielkości przemieszczeń. Mianowicie, przy zastosowaniu rozwiązania momentem skupionym pary sił pionowych, we wzorach podstawowych, podanych w pracy, otrzymamy w wyniku wielkość  $\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$ , natomiast po dodaniu do powyższego rozwiązania, rozwiązania dla obciążeń zrównoważonych, będącego przedmiotem dyskusji, otrzymamy rozwiązanie  $\omega_2$ , czyli że sens fizyczny rozwiązania dyskutowanego jest wyraźny.

W zakończeniu pracy podajemy propozycję w sprawie dokładniejszego formułowania problemów z obciążeniami skupionymi w teorii płyt, w których uwzględniamy odkształcenia od sił poprzecznych.

### 9. Zakończenie

Podane w pracy rozwiązania i wzory mają charakter podstawowy. Mogą one znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu wielu problemów brzegowych teorii płyt Reissnera oraz teorii płyt trójwarstwowych.

W pracy starano się spojrzeć na zagadnienie płyt Reissnera i trójwarstwowych z jednolitego punktu widzenia, który jest kontynuacją znanego podejścia do równania harmonicznego, równań teorii sprężystości czy też równania teorii płyt cienkich. Związki podane w pracy mogą służyć do sporządzenia powierzchni wpływowych płyt Reissnera jak i płyt trójwarstwowych. Przykłady podane w pracy mają charakter ilustracyjny. Poza tym wyprowadzone związki pozwalają na sformułowanie szeregu problemów brzegowych dotyczących nieciągłych warunków brzegowych [24].

Praca ma jeszcze jeden aspekt. Mianowicie wykazano w niej, że tradycyjne sformułowanie problemu znalezienia rozwiązania zagadnienia płyty Reissnera lub trójwarstwowej,

przy obciążeniu siłą skupioną, nie zapewnia jednoznaczności rozwiązania. Pod tradycyjnym sformułowaniem rozumiemy, podobnie jak STERNBERG i EUBANKS [32], sformułowanie podane w niniejszej pracy.

W punkcie 6 otrzymano dwa rozwiązania zagadnienia płyty nieograniczonej, które spełniają tradycyjne żądania wymagane od rozwiązania dla takiej płyty obciążonej siłą skupioną. Rozstrzygnięcie, które z tych rozwiązań odpowiada obciążeniu siłą skupioną, otrzymano w oparciu o twierdzenie o wzajemności prac. Okazuje się, że rozwiązanie odpowiadające obciążeniu siłą skupioną powinno dodatkowo spełniać następującą zależność:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} (q_{n0} \omega_{1r} + m_{n0} \omega_{nr} + m_{nr0} \omega_{tr} - q_{nr} \omega_{10} - m_{nr} \omega_{r0} - m_{nr} \omega_{t0}) ds = P \omega_1(0, 0),$$

gdzie indeksem 0 oznaczono rozwiązanie zagadnienia płyty obciążonej siłą skupioną, a indeksem  $r$  dowolne regularne rozwiązanie dla rozpatrywanej płyty.

Podobne warunki powinny spełniać rozwiązania zagadnienia płyty obciążonej momentami skupionymi.

W tym sensie praca niniejsza jest kontynuacją problemów poruszanych przez E. STERNBERGA i R. A. EUBANKSA dla siły skupionej w teorii sprężystości na zagadnienia rozwiązań osobliwych płyt Reissnera i płyt trójwarstwowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, London 1927.
2. А. ЛУРЬЕ, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва 1955.
3. В. З. ВЛАСОВ, И. И. ЛВОНТЬЕВ, *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1960.
4. В. С. ГЛАЗЫРИН, *Применение теории Рейсснера к расчету неограниченных плит лежащих на упругом основании*, Строит. мех. и расчет сооружений, 2, 1964.
5. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech. 12, 1945.
6. A. KROMM, *Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik*, Ing. Arch. 21 (1953).
7. J. L. BOAL, E. REISSNER, *Three-dimensional Theory of Elastic Plates with Transverse Inextensibility*, University of South Carolina.
8. J. MOSSAKOWSKI, *Równania teorii Reissnera dla płyt ortotropowych*, Księga Jubileuszowa prof. dr W. Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.
9. А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, *О теории изгиба пластинок Райсснера*, Изв. АН СССР, 4, 1958.
10. Z. KAÇZKOWSKI, *Der Einfluss der Schubverzerrungen und des Drehbeharrungsvermögens auf die Schwingungsfrequenz von anisotropen Platten*, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Tech., 7, 8 (1960).
11. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, dodatek do wydania polskiego, Arkady, Warszawa 1961.
12. N. J. HOFF, *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, NACA, 1950, No. 2225.
13. АЛЕКСАНДРОВ, БРЮКЕР, КУРШИН, ПРУСАКОВ, *Расчет трехслойных панелей*, Москва 1960.
14. C. LUBOVE, S. B. WATDORF, *A General Small Deflection Theory for Flat Sandwich Plates*, NACA, April 1948, No. 899.
15. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte, prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inżyn. Lądowej, 1, 12 (1966).
16. H. MIKOŁAJCZAK, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, Roczn. WSR, Poznań 1965.
17. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
18. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, 1957.

19. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
20. Z. KAŹCZKOWSKI, *The Influence of Distortion and Rotational Inertia on the Vibration of a Plate having the Form of a Regular Polygon*, Konferencja ZMOC, PAN, Olsztyn 1961.
21. R. GANOWICZ, *O pewnym rozwiązaniu płyty trójwarstwowej*, Rozpr. Inżyn., 1966.
22. S. BERGMAN, M. SCHIFFER, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, A. Press, New York 1953.
23. R. GANOWICZ, *Twierdzenie o wzajemności prac dla pewnego typu płyt trójwarstwowych*, Rozpr. Inżyn., 1966.
24. J. IGNACZAK, W. NOWACKI, *Osobliwe równania całkowite termosprężystości*, Rozpr. Inżyn., 4, 13 (1965).
25. W. NOWACKI, *Green functions for a thermoelastic medium*, Bull. Acad. Polon. Scie., Série des Sci. Tech., 6, 12 (1964).
26. J. MOSSAKOWSKI, *Osobliwe rozwiązanie w teorii płyt ortotropowych*, Arch. Mech. Stos., 3, 6 (1954).
27. J. MOSSAKOWSKI, *Rozwiązania osobliwe dla płyt anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., 1, 7 (1955).
28. I. SNEDDON, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, 1951.
29. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem in Partial Differential Equations*, Yale Univer. Press, 1923.
30. H. ZORSKI, *Plates with discontinuous supports*, Arch. Mech. Stos., 10 (1958).
31. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Москва 1963.
32. E. STERNBERG, R. A. EUBANKS, *On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity*, J. Rat. Mech., 4 (1955).
33. E. STERNBERG, *On Some Recent Developments in the Linear Theory of Elasticity*, Structural Mechanics- Proceedings of the 1-st Symposium on Naval Struct. Mech., Pergamon Press 1960.
34. Д. С. КУЗНЕЦОВ, *Специальные функции*, Изд. Выш. Шк., Москва 1965.
35. A. PUCHER, *Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten*, Ing. Archiv., 12, 1941.
36. M. SUCHAR, *Computation by means of Polynomials of Influence Surfaces for Anisotropic Plates with Finite Dimensions*, Arch. Mech. Stos., 5, 10, (1958).
37. S. KRUG, P. STEIN, *Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten*, Springer-Verlag, 1961.
38. N. N. LEBIEDIEW, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.

#### Р е з ю м е

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК РЕЙСНЕРА И ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНОК

Темой работы является теория пластинок, учитывающая деформации, вызванные поперечными силами. Эта теория относится, в частности, к пластинкам, рассчитываемым по теории Рейснера, а также к трехслойным пластинкам.

Предполагается, что внешние слои рассматриваемых трехслойных пластинок являются изотропными, без жесткости на изгиб, тогда как срединный слой воспринимает исключительно поперечные усилия.

Главной целью работы является выведение основных формул, дающих возможность выразить решение для данной пластинки через краевые величины. Аналогичные формулы известны в теории гармонических функций (5.1), (5.2) и в теории тонких пластинок (5.3).

Основные формулы для обсуждаемых в работе пластинок получено на основе принципа взаимности работ, введенного в разделе 3 и на основе сингулярных решений. Сингулярные решения представлены в разделе 6 настоящей работы, в замкнутом виде. При построении сингулярных решений использовано двойное, бесконечное преобразование Фурье. При обращении преобразования использовано, введенное И. А. АДАМАРДОМ [29] понятие конечной части расходящегося интеграла.

Обсуждается однозначность решений для случая действия сосредоточенных сил.

Работа иллюстрируется примерами решений некоторых краевых задач.



## S u m m a r y

## SOME PROBLEMS OF REISSNER'S THEORY OF PLATES AND OF THE THREE-LAYER PLATES

In the paper the plates theory which includes strains due to shear forces has been considered. The theory concerns as particular cases, the plates calculated according to Reissner's theory, and the three-layer plates.

It has been assumed that in the three-layer plates the exterior layers are isotropic without flexural rigidity, while the shear forces can act on the middle layer only.

The main purpose of the paper is to derive the basic formulae which enable to express the solution for a plate by means of the boundary quantities. Similar formulae are known for the problems of the theory of harmonic functions (5.1), (5.2) and of the theory of thin plates (5.3).

The basic formulae for the considered plates have been obtained from the principle of reciprocity, derived in Chapter 3, and from the singular solutions. The latter have been obtained in the closed form in Chapter 6. In the construction of singular solutions the double infinite Fourier transforms have been applied. In order to find the inverse transforms, the concept of the finite part of a divergent integral has been used, as introduced by J. Hadamard [29].

The problem of the uniqueness of the solution in the case of concentrated loads applied has been also discussed.

The examples of the solutions of some boundary value problems have been included.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 marca 1966 r.*

---