

ANALIZA ZJAWISKA «PRZESKOKU» W ZAKRESIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM  
NA MODELU UKŁADU KRATOWEGO MISESA

J. LEDZIŃSKI, Z. WASZCZYŚYŃ (KRAKÓW)

I. Wstęp

Przy rozpatrywaniu szeregu zagadnień stateczności ustrojów mechanicznych występuje konieczność wyjścia poza teorię Eulera. Już w ramach stateczności statycznej występują zagadnienia wymagające innego podejścia i przyjęcia odpowiedniego modelu nadającego się do matematycznej analizy. Właśnie takim zagadnieniem jest utrata stateczności związana ze zjawiskiem *przeskoku*.

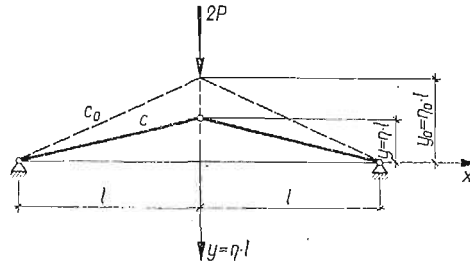
Zjawisko to występuje w ustrojach, w których przy pewnym krytycznym obciążeniu następuje przeskok z jednego stanu równowagi w drugi, przy czym — w odróżnieniu od utraty stateczności w sensie Eulera — ustrój może nie zmieniać postaci (np. w ustroju złożonym z prętów prostoliniowych teoretycznie również po przeskoku mogą nie występować pręty zakrzywione). Przeskok jest związany na ogół z wystąpieniem dużych przemieszczeń i jego badanie jest związane z koniecznością oparcia się na nieliniowej teorii ugięć skończonych. Stosowanie metod opartych na badaniu sąsiednich postaci równowagi (teoria Eulera) jest związane z założeniem małych przemieszczeń i może doprowadzić do całkowicie błędnych wyników; analizę tego zagadnienia można znaleźć w pracy K. A. MICHAJLICZENKI [2]. Z wymienionych przyczyn utrata stateczności związana z powstaniem przeskoku została nazwana w literaturze *utratą stateczności drugiego rodzaju*, w odróżnieniu od *utraty stateczności pierwszego rodzaju*, którą można badać w oparciu o teorię Eulera; klasyfikację taką podaje szereg autorów — por. np. S. D. LEJTES [1], A. A. PIKOWSKI [8].

Przeskok może powstać w często stosowanych ustrojach takich jak kraty i łuki o małej wyniosłości, powłoki cylindryczne i kuliste itp. Matematyczna analiza zagadnienia jest bardzo skomplikowana, gdyż zachodzi tu konieczność odrzucenia zasady zeszywnienia i uwzględnienia geometrycznych nieliniowości. Z tego powodu istnieje bardzo niewiele ścisłych rozwiązań, otrzymanych w dodatku dla liniowo sprężystych materiałów.

W obecnej pracy postaramy się zanalizować zjawisko przeskoku w przypadku materiału o dowolnej charakterystyce  $\sigma-\epsilon$ . W celu uniknięcia trudności natury matematycznej zajmiemy się szczegółowo tak zwanym *układem kratowym Misesa*. Jest to ustrój złożony z dwóch prętów połączonych między sobą przegubowo (rys. 1), obciążony siłą skupioną w węzle środkowym. Jest to uproszczony model R. Misesa; stateczność drugiego rodzaju badał R. MISES w pracy [3], a następnie wraz z J. RATZERSDORFEREM w pracy [4] rozważając stateczność kratownic i ramownic. Model ten dzięki swej prostocie pozwala poprzez elementarne rachunki ująć analitycznie zjawisko przeskoku i jest przytaczany w większości

prac dotyczących stateczności (por. np. A. PFLÜGER [7], J. G. PANOWKO i J. J. GUBANOWA [6]).

Ten prosty model pozwala na analizę zagadnienia w przypadku nieliniowej charakterystyki  $\sigma - \epsilon$ . Ponadto daje on możliwość uwzględnienia zjawiska odciążenia i efektu Bauschingera, dzięki czemu otrzymujemy pewne jakościowe wnioski dotyczące możliwości powstania i przebiegu przeskoku w ustrojach zbudowanych z materiałów sprężysto-plastycznych.



Rys. 1

Zajmiemy się szczegółowo analizą układu kratowego Misesa wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego z wielokrotnym liniowym wzmocnieniem. Model ten umożliwia dobrą aproksymację własności materiałów rzeczywistych.

W pracy oprzemy się na następujących założeniach:

- 1) symetryczny układ kratowy Misesa (rys. 1) posiada stały przekrój  $F$ ;
- 2) układ jest nieważki, obciążony jedynie pionową siłą skupioną  $2P$  przyłożoną w węzle środkowym;
- 3) ustrój posiada idealne przegubowe połączenia i jego pręty nie mogą ulec wyboczeniu; w prętach wystąpi tylko jednoosiowy, jednorodny stan naprężenia;
- 4) materiał prętów jest jednorodny, sprężysto-plastyczny i wykazuje efekt Bauschingera.

## 2. Wyznaczenie zależności między ugięciem i siłą obciążającą dla materiału o dowolnej charakterystyce $\sigma - \epsilon$

Rozważmy symetryczny układ kratowy Misesa o wstępnej strzałce  $y_0$  jak zaznaczono na rys. 1. Po przyłożeniu obciążenia pionowego  $2P$  pręty ulegną skróceniu i węzeł środkowy przemieści się wzdłuż osi  $y$ . Odształcenie pręta zapiszemy w mierze Cauchy'ego

$$(2.1) \quad \epsilon = \frac{c - c_0}{c_0}.$$

Po uwzględnieniu geometrycznych związków możemy (2.1) zapisać w postaci

$$(2.2) \quad \epsilon = \frac{\sqrt{l^2 + y^2}}{\sqrt{l^2 + y_0^2}} - 1.$$

W dalszym ciągu będziemy posługiwali się bezwymiarową strzałką ugięcia

$$(2.3) \quad \eta = \frac{y}{l}.$$

Wprowadzenie oznaczenia (2.3) pozwala ostatecznie wyrazić odkształcenia prętów jako funkcję ugięcia; ze związku (2.2) otrzymamy mianowicie

$$(2.4) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1+\eta^2}{1+\eta_0^2}} - 1,$$

gdzie przez  $\eta_0 = y_0/l$  oznaczono wstępną strzałkę ugięcia.

Z warunku równowagi prętów możemy napisać związek

$$(2.5) \quad P = \frac{y}{c} R = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} R,$$

w którym  $R$  oznacza siłę osiową występującą w prętach układu, równą co do wielkości całkowitemu oddziaływaniu. Związek (2.5) możemy podzielić przez wielkość pola powierzchni przekroju  $F_0$  oraz moduł Younga  $E_0$ . Otrzymamy w ten sposób równanie

$$(2.6) \quad \frac{P}{E_0 F_0} = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\sigma}{E_0},$$

gdzie  $\sigma = R/F_0$  odpowiada naprężeniu w prętach, wywołanemu działaniem siły  $R$ . Jeśli znamy charakterystykę materiału  $\sigma = \sigma(\varepsilon)^{(*)}$ , to wobec zależności (2.4) podającej związek między odkształceniem a wstępną strzałką i ugięciem w postaci funkcji  $\varepsilon = \varepsilon(\eta; \eta_0)$ , możemy otrzymać ogólne równanie

$$(2.7) \quad p = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{1}{E_0} \sigma[\varepsilon(\eta; \eta_0)].$$

W równaniu (2.7) wprowadziliśmy ponadto bezwymiarową siłę obciążającą

$$(2.8) \quad p = \frac{P}{E_0 F_0}.$$

Równanie (2.7) napisane w postaci bezwymiarowej pozwala stwierdzić możliwość wystąpienia przeskoku. Dzięki wprowadzeniu strzałki ugięcia  $\eta$  jako zmiennej niezależnej otrzymujemy (przy znanej charakterystyce materiału  $\sigma(\varepsilon)$ ) funkcję jednoznaczną, dla której warunek przeskoku ma postać

$$(2.9) \quad \frac{dp}{d\eta} = 0.$$

W odniesieniu do równania (2.7) oraz po uwzględnieniu związku (2.4) warunek (2.9) zapiszemy w następującej, ogólnej postaci:

$$(2.10) \quad \sigma[\varepsilon(\eta; \eta_0)] + \frac{\eta^2 \sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{1+\eta_0^2}} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0.$$

Z tak otrzymanego równania (2.10) można wyznaczyć strzałkę ugięcia odpowiadającą ekstremalnej sile  $p_m = p_k$ , przy której może nastąpić przeskok.

(\*) W charakterystyce materiału należy przyjmować naprężenie umowne  $\sigma = R/F_0$ , gdzie  $F_0$  jest polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta przed odkształceniem.

W przypadku przyjęcia siły obciążającej  $p$  jako zmiennej niezależnej nie możemy tak prosto ocenić możliwości powstania przeskoku. Ponadto okazuje się, że w ogólnym przypadku nie możemy w sposób ścisły rozwikłać równania (2.7) ze względu na  $\eta$ . Z tych względów w dalszym ciągu będziemy się posługiwać równaniem (2.7), wyrażającym siłę obciążającą jako funkcję strzałki ugięcia  $p = p(\eta; \eta_0)$ .

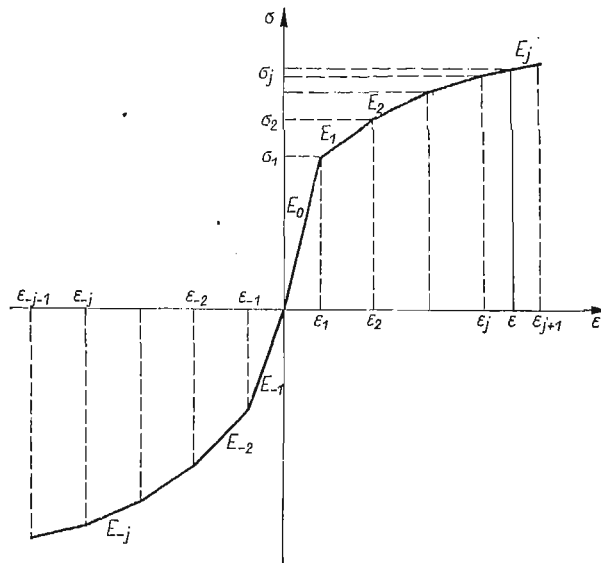
### 3. Wyznaczenie zależności $p-\eta$ dla materiału sprężysto-plastycznego z wielokrotnym wzmocnieniem liniowym

**3.1. Proces obciążenia wewnętrznego.** Zanim przejdziemy do określenia materiału, zastanowimy się nieco dokładniej nad charakterem procesu zachodzącego w materiale prętów.

Przy zwiększaniu się ugięcia w pręcie początkowo będą wzrastały również odkształcenia (a właściwie moduł odkształcenia) aż do osiągnięcia wartości

$$(3.1) \quad \varepsilon_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}} - 1,$$

odpowiadającej maksymalnemu skróceniu w położeniu  $\eta = 0$  (por. rys. 1). Proces związany ze zwiększaniem się bezwzględnej wartości odkształcenia będziemy nazywali *procesem obciążenia wewnętrznego*. Użyliśmy celowo określenia *proces wewnętrzny* ze względu na



Rys. 2

brak korelacji między wzrostem obciążenia zewnętrznego i wzrostem modułu odkształcenia w pewnych przedziałach  $\eta$ ; np. przy  $\eta = 0$  siła obciążająca  $p = 0$  pomimo tego, że odkształcenie  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$ . Proces ten będzie zachodził w przypadku skracania się prętów układu, co można ująć analitycznie poprzez warunek

$$(3.2) \quad \frac{d\varepsilon}{d\eta} \leq 0.$$

Znak nierówności w (3.2) jest związany z przyjętym zwrotem osi  $\eta$  oraz wartością  $\eta_0$ : przy zwiększaniu się strzałki  $\eta$  odkształcenie  $\varepsilon$  będzie malało w sensie algebraicznym. W przypadku  $\eta_0 < 0$  proces obciążenia wewnętrznego będzie zachodził dla  $\eta \leq 0$ .

Zajmiemy się teraz szczególnym materiałem, którego charakterystyka  $\sigma-\varepsilon$  została przedstawiona na rys. 2. Rzeczywista krzywa  $\sigma(\varepsilon)$  została tutaj aproksymowana linią łamaną. Taki model <sup>(2)</sup> pozwala otrzymać dobre przybliżenie nawet przy stosunkowo niewielkiej liczbie punktów załamania. Taki odcinkowo-liniowo-sprężysty model znacznie upraszcza obliczenia, pozwala uwzględnić różne właściwości materiału przy ściskaniu i rozciąganiu, a ponadto pozwala uwzględnić zjawisko odciążenia i efekt Bauschingera występujące w materiałach sprężysto-plastycznych.

Naprężenie  $\sigma$  zapiszemy równaniem

$$(3.3) \quad \sigma = \sigma_j + (\varepsilon - \varepsilon_j) E_j \quad \text{dla} \quad \varepsilon_j \leq \varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{j+1}.$$

Równanie to możemy podstawić do (2.7), a po podstawieniu jeszcze  $\varepsilon$  z równania (2.4) otrzymamy związek

$$(3.4) \quad p = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \left[ a_j + \left( \sqrt{\frac{1+\eta^2}{1+\eta_0^2}} - 1 - \varepsilon_j \right) a_j \right],$$

w którym wprowadzono dalsze bezwymiarowe wielkości charakteryzujące materiał

$$(3.5) \quad a_j = \frac{\sigma_j}{E_0}, \quad \alpha_j = \frac{E_j}{E_0}.$$

Równanie (3.4) możemy przedstawić w ogólnej postaci

$$(3.6) \quad p = A_j \eta + B_j \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}},$$

gdzie parametry  $A_j$  i  $B_j$  będą funkcjami wstępnej strzałki ugięcia  $\eta_0$  oraz stałych materiałowych  $a_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\varepsilon_j$

$$(3.7) \quad A_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{1+\eta_0^2}}, \quad B_j = a_j - (1 + \varepsilon_j) \alpha_j.$$

Parametry  $A_j$  i  $B_j$  są ważne w przedziale  $\eta_j \leq \eta \leq \eta_{j+1}$ , przy czym granice tego przedziału możemy obliczyć z równania (2.4) rozwiązując je ze względu na  $\eta$ ; otrzymamy

$$(3.8) \quad \eta_j = \mp \sqrt{(1 + \varepsilon_j)^2 (1 + \eta_0^2) - 1}.$$

Znak minus odpowiada  $\eta_0 \leq \eta_j \leq 0$  i wiąże się z procesem obciążenia wewnętrznego. Oczywiście należy przyjąć znak plus, gdyby w wyjściowym położeniu  $\eta_0 > 0$ .

Prosta postać równania (2.13) pozwala łatwo obliczyć wielkość strzałki odpowiadającej sile ekstremalnej, która może spowodować przeskok. Z warunku (2.10) obliczymy

$$(3.9) \quad \eta_m = \mp \sqrt{\left( -\frac{B_j}{A_j} \right)^{2/3} - 1} \quad \text{dla} \quad \eta_j \leq \eta_m \leq \eta_{j+1},$$

<sup>(2)</sup> Model ten przyjęliśmy z pracy J. ORKISZA i M. ŻYCKOWSKIEGO [5].

gdzie znaki należy przyjmować jak w (3.8). Po podstawieniu (3.9) do (3.6) otrzymamy równanie dla siły ekstremalnej

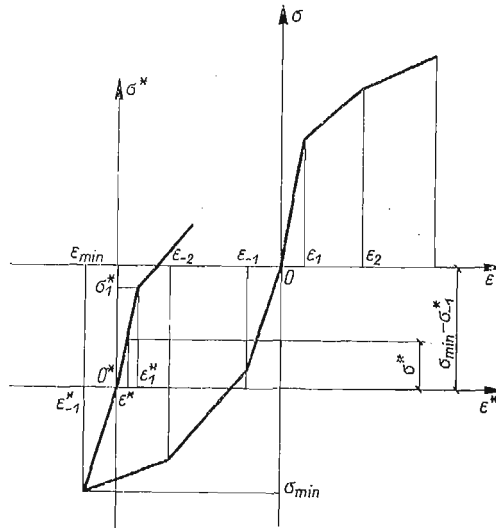
$$(3.10) \quad p_m = \mp \sqrt{\left(\frac{B_j}{A_j}\right)^{2/3} - 1(A_j + \sqrt{-A_j B_j^2})}.$$

**3.2. Proces odciążenia wewnętrznego.** W przypadku niespełnienia warunku (3.2) w materiale układu będzie zachodził proces odciążenia wewnętrznego. Aby zapisać analitycznie zachodzące przy tym związki, wprowadzimy nowy układ  $(\varepsilon^*; \sigma^*)$  związany z pierwotnymi zależnościami (por. rys. 3)

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^* + (\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{-1}^*), \\ \sigma &= \sigma^* + (\sigma_{\min} - \sigma_{-1}^*), \end{aligned}$$

w których  $\sigma_{\min}$  oznacza naprężenia minimalne odpowiadające  $\varepsilon_{\min}$  obliczonemu według (3.1). W nowym układzie naprężenie  $\sigma$  można zapisać równaniem analogicznym do (3.3),

$$(3.12) \quad \sigma^* = \sigma_j^* + (\varepsilon^* - \varepsilon_j^*) E_j^* \quad \text{dla } \varepsilon_j^* \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_{j+1}^*.$$



Rys. 3

Po podstawieniu (3.12) do (3.11) i uwzględnieniu związków (2.4) i (3.1) otrzymamy równanie dla naprężenia

$$(3.13) \quad \sigma = (\sigma_{\min} - \sigma_{-1}^* + \sigma_j^*) + \left( \varepsilon_{-1}^* - \varepsilon_j^* - \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} \right) E_j^* + \sqrt{\frac{1 + \eta_0^2}{1 + \eta_0^2}} E_j^*,$$

które możemy podstawić do równania (2.7). Otrzymamy równanie dla siły  $p$  znowu w postaci (3.6), w której występują parametry  $A_j^*$  i  $B_j^*$

$$(3.14) \quad \begin{aligned} A_j^* &= \frac{a_j^*}{\sqrt{1 + \eta_0^2}}, \\ B_j^* &= (a_{\min} - a_{-1}^* + a_j^*) + \left( \varepsilon_{-1}^* - \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_0^2}} - \varepsilon_j^* \right) a_j^*. \end{aligned}$$

Współczynniki te będą ważne dla  $\eta^*$  spełniających nierówność  $\eta_j^* \leq \eta^* \leq \eta_{j+1}^*$ . Granice tego przedziału  $\langle \eta_j^*, \eta_{j+1}^* \rangle$  wyznaczmy na podstawie równań (3.11) i (2.4); otrzymamy równanie

$$(3.15) \quad \eta_j^* = \pm \sqrt{[(\varepsilon_j^* - \varepsilon_{-1}^*)\sqrt{1 + \eta_0^* + 1}]^2 - 1}.$$

Podobnie jak w (2.15) górny znak odpowiada  $\eta_0 < 0$ ; przy wstępnej strzałce  $\eta_0 > 0$  odciążenie wewnętrzne będzie zachodziło dla  $\eta_j^* > 0$ .

W czasie odciążenia wewnętrznego przy pewnej strzałce  $\eta_{j0}^*$

$$(3.16) \quad \eta_{j0}^* = \pm \frac{\sqrt{B_j^{*2} - A_j^{*2}}}{A_j^*}$$

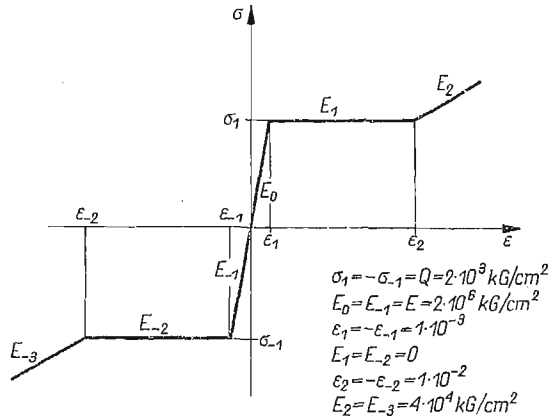
siła obciążająca  $p = 0$  [znaki w (3.16) przyjmujemy analogicznie jak w (3.15)].

Rozpatrywaliśmy proces odciążenia wewnętrznego, występujący przy monotonicznym wzroście strzałki ugięcia. Proces odciążenia może wystąpić nie tylko od stanu  $\eta = 0$ , lecz również przy innych strzałkach. Będzie on wtedy uzależniony od zmiany obciążenia zewnętrznego. W takim przypadku jako  $a_{min}$  i  $\varepsilon_{min}$  należy przyjmować wielkości odpowiadające początkowi procesu odciążenia.

Należy ponadto zwrócić uwagę, że można przyjąć w pewnym sensie (wykazują to doświadczenia dla materiałów sprężysto-plastycznych) jednakową charakterystykę materiału przed i w czasie odciążenia — wykres  $\sigma - \varepsilon$  o początku w punkcie  $O$  doznaje jakby sztywnego przesunięcia do punktu  $O^*$  (por. rys. 3). Oznacza to, że w podanych powyżej wyrażeniach  $\varepsilon_j^* = \varepsilon_j$ ,  $a_j^* = a_j$ ,  $u_j^* = u_j$  itd.

#### 4. Materiał sprężysto-plastyczny z jednokrotnym wzmocnieniem liniowym

Szczególnym przypadkiem materiału rozważanego w p. 3. jest materiał o charakterystyce pokazanej na rys. 4. Odpowiada on modelowi używanemu często przy badaniu



Rys. 4

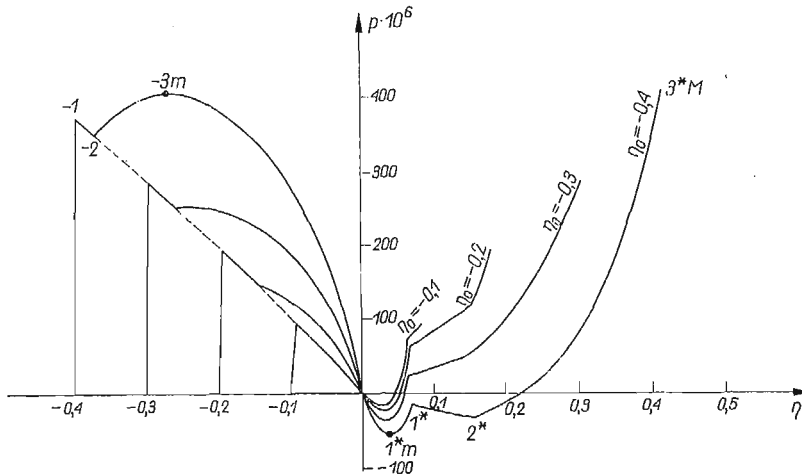
miękkiej stali i z tego powodu zajmiemy się nim nieco dokładniej. Współczynniki  $A_j$  i  $B_j$  zestawiono w tablicy 1. Uderza przy tym znaczne uproszczenie współczynników w zakresie sprężystym, a szczególnie w zakresie pełnego uplastycznienia. W tym ostatnim przypadku

Tablica 1

	Zakres					
	sprężysty		plastyczny		wzmocnienie	
	$A_{-1}$	$B_{-1}$	$A_{-2}$	$B_{-2}$	$A_{-3}$	$B_{-3}$
Obciążenie	$\frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	-1	0	$\varepsilon_{-1}$	$\frac{a_3}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	$\varepsilon_{-1} - (1+\varepsilon_{-2})a_3$
	$A_1^*$	$B_1^*$	$A_2^*$	$B_2^*$	$A_3^*$	$B_3^*$
Odciążenie	$\frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	$-\frac{a_{min}}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	0	$a_{min} + 2\varepsilon_1$	$\frac{a_3}{\sqrt{1+\eta_0^2}}$	$a_{min} + 2\varepsilon_1 - \left( \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{\sqrt{1+\eta_0^2}} \right) a_3$

w procesie obciążenia współczynnik  $B_{-2}$  jest niezależny od wstępnej strzałki ugięcia  $\eta_0$  (odpowiada to modelowi materiału sztywno-plastycznego).

Aby dokładniej zanalizować przyjęty model, wykonano obliczenia numeryczne i na ich podstawie sporządzono wykresy na rys. 5. Obliczenia te wykonano dla różnych wartości wstępnych strzałek  $\eta_0$ . Proces obciążenia wewnętrznego zachodzi dla  $\eta \leq 0$ . Monoto-



Rys. 5

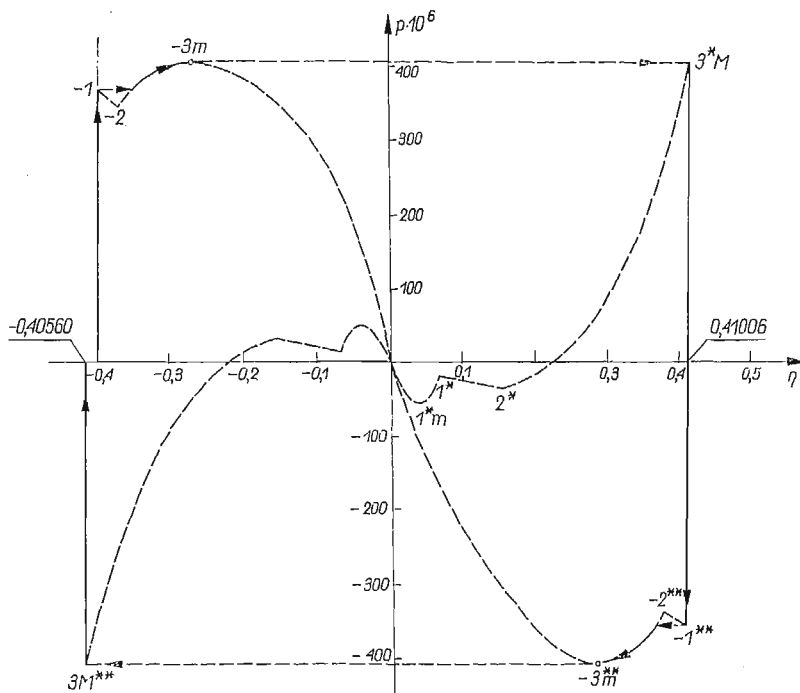
niczemu zwiększaniu strzałki towarzyszy początkowo wzrost siły aż do wartości  $p_{-1}$  (odpowiadającej punktowi  $-1$  na wykresach rys. 5), przy której napężenie w prętach układu osiąga granicę plastyczności  $Q$ . Następnie siła maleje, aby przy niektórych wartościach wstępnych strzałek znów wzrastać wskutek wzmocnienia materiału (widać to wyraźnie na wykresie odpowiadającym  $\eta_0 = -0,4$ ). Siłę odpowiadającą początkowi wzmocnienia oznaczyliśmy przez  $p_{-2}$ . Następnie siła maleje i przy  $\eta = 0$  siła  $p = 0$  (trzy przeguby układu Misesa są na jednakowym poziomie). Przy  $\eta \geq 0$  mamy już do czynienia



z procesem odciążenia wewnętrznego, któremu towarzyszy początkowo zmniejszanie, a potem wzrost siły  $p$ . Na wykresach zaznaczono punkty rozgraniczające poszczególne obszary.

Opisany przez nas proces obciążenia zewnętrznego można nazwać *kinematycznym*, gdyż jako zmienną niezależną przyjmowaliśmy bezwymiarową strzałkę ugięcia  $\eta$ , która wzrastała monotonicznie od wartości  $\eta = \eta_0$ .

W praktyce jednak o wiele częściej spotykamy się z obciążeniem statycznym. W tym przypadku monotonicznie wzrasta siła zewnętrzna  $p$  aż do wartości  $p = p_{-1}$ . Przy przekroczeniu tej siły następuje *przeskok* — układ przechodzi z jednej postaci równowagi w drugą. Okazuje się przy tym, że teoretycznie możliwe są tutaj dwa przypadki. Przy małych strzałkach siła  $p_{-1}$  będzie siłą krytyczną i ustrój przejdzie w skrajne położenie  $\eta_{3M}^*$ . Dla większych wstępnych strzałek (widać to wyraźnie przy  $|\eta_0| \approx 0,4$ ) mamy do czynienia z podwójnym przeskakiem. Mianowicie po przekroczeniu siły  $p_{-1}$  następuje pierwszy przeskok na gałąź odpowiadającą wzmocnieniu i siła może wzrastać aż do wartości maksymalnej  $p_{-3m}$

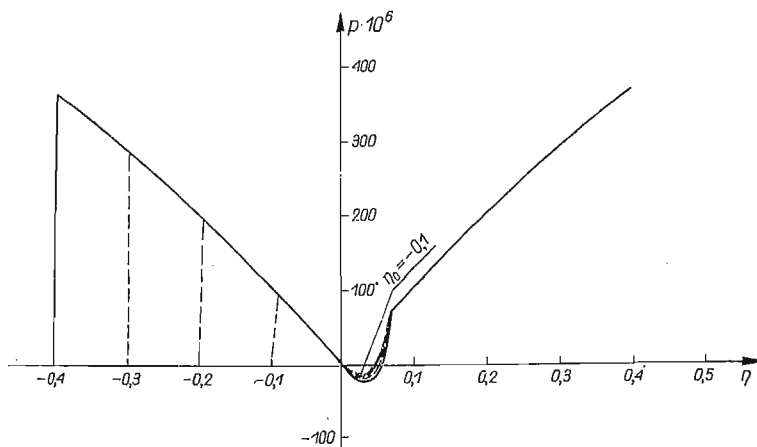


Rys. 6

(por. rys. 6). Przy tej sile może nastąpić drugi przeskok do postaci równowagi dla strzałki  $\eta_{3M}^*$ . Tak więc teoretycznie możemy mieć do czynienia z dwiema siłami krytycznymi  $p_{-1}$  i  $p_{3m}$ , przy których następują przeskoki.

Należy tu jednak od razu zaznaczyć, że podwójny przeskok jest możliwy tylko teoretycznie, gdyż może on powstać jedynie przy bardzo dużych odkształceniach, na ogół niedopuszczalnych w konstrukcjach inżynierskich. Podwójny przeskok będzie utrudniony również w przypadku wystąpienia dużej różnicy pomiędzy górną i dolną granicą plastycz-

ności. Wtedy siła  $p_{-1}$  podwyższy się i może być większa od  $p_{-3m}$  nawet przy dużych strzałkach; zaznaczono to na rys. 6. Ze zjawiskiem takim należy się liczyć np. w przypadku bardzo niskich temperatur nawet przy powolnym wzroście obciążenia (por. pracę M. ZAKRZEWSKIEGO [9]).



Rys. 7

Na rysunku 7 pokazano krzywe odpowiadające materiałowi idealnie sprężysto-plastycznemu (model Prandtla). W tym przypadku przeskok następuje z chwilą osiągnięcia granicy plastyczności, a więc tak samo jak w przypadku małych wstępnych strzałek przy materiale ze wzmocnieniem (podobnie będzie przy modelu sztywno-plastycznego materiału). Z powodu braku efektu Bauschingera krzywe dla pełnego uplastycznienia są symetryczne względem osi  $p$ .

Na rysunku 6 pokazano przebieg procesu odciążenia zewnętrznego dla  $\eta_0 = -0.4$ . Linią ciągłą zaznaczono odcinki styczne, a strzałką — kierunek procesu. Po drugim przeskoku i osiągnięciu  $\eta_{3M}^*$  zmniejszono siłę; przy  $\bar{\eta}_0$  siła  $p = 0$  i od tego momentu możemy rozpatrywać zadanie od nowa. Będziemy mianowicie mieli urząd o wstępnej strzałce  $\bar{\eta}_0 = 0.41006$  i zmienionej granicy plastyczności wskutek efektu Bauschingera.

### 5. Zakończenie

W pracy zajmowaliśmy się bardzo prostym przypadkiem przeskoku układu kratowego Misesa. Analiza była znacznie ułatwiona dzięki wprowadzeniu materiału z wielokrotnym liniowym wzmocnieniem, przez co trudności matematyczne zostały sprowadzone do poziomu trudności obliczenia urządzenia idealnie sprężystego.

Analiza układu zbudowanego z materiału z jednokrotnym liniowym wzmocnieniem wskazuje na możliwość powstania nowych zjawisk, takich jak podwójny przeskok względnie przeskok z chwilą osiągnięcia granicy plastyczności; ten ostatni wniosek jest szczególnie cenny w odniesieniu do często stosowanych modeli materiału idealnie sprężysto-plastycznego względnie sztywno-plastycznego. Ponadto w miarę zmniejszania się wstępnej strzałki rozszerza się przedział odpowiadający pełnemu uplastycznieniu; przy dostatecznie małej

strzałce wstępnej wzmocnienie w ogóle nie wystąpi i właśnie w tym przypadku można z powodzeniem zastosować model materiału idealnie sprężysto-plastycznego; widać to na rys. 5 przy  $\eta_0 = -0,1$ .

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. Д. ЛЕЙТЕС, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Издат. Наука, Москва 1964.
2. К. А. МИХАЙЛИЧЕНКО, *О расчете на устойчивость шарнирно-стержневых систем*, Известия АН СССР, Отд. тех. наук, **12** (1958)
3. R. MISES, *Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*, ZAMM, **3** (1923), 406–462.
4. R. MISES, J. RATZERSDORFER, *Die Knicksicherheit von Fachwerken*, ZAMM, **3**, **5** (1925), 218–231.
5. J. ORKISZ, M. ŻYCZKOWSKI, *Male ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inżyn. **4**, **11** (1963), 677–712.
6. И. Г. ПАНОВКО, И. И. ГУБАНОВА, *Устойчивость и колебания упругих систем*, Москва 1964.
7. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.
8. А. А. ПИКОВСКИЙ, *Статика стержневых систем со связными элементами*, Физматгиз Москва 1961.
9. M. ZAKRZEWSKI, *Granica plastyczności stali*, Przegląd Mechaniczny, **6** (1957), 227–232.

#### Резюме

#### АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ «СКАЧКА» В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ НА МОДЕЛИ РЕШЕТЧАТОЙ СИСТЕМЫ МИЗЕСА

Анализируется «скачок», т. е. переход из одного вида равновесия в другой, без изменения формы системы. Анализ проводился на упрощенной решетчатой системе Мизеса, состоящей из двух стержней, шарнирно соединенных и нагруженных, в середине узла, вертикальной сосредоточенной силой. Принята простая модель дает возможность учесть геометрические нелинейности а введение безразмерной стрелки прогиба в качестве независимой переменной, позволило вывести необходимые уравнения для произвольной характеристики материала.

Затем подробно рассматривается случай для материала с многократным линейным упрочнением, так для случая нагрузки как и для разгрузки, с одновременным учетом эффекта Баушингера.

Анализ материала с однократным линейным упрочнением и отчетливым интервалом полного перехода в пластическое состояние указывает на возможность появления скачка в момент достижения предела текучести. Теоретически вычисленный двойной скачок возникает при очень больших предварительных прогибах и на практике вряд ли появится. Численные расчеты позволили выполнить диаграмм, как для материала с однократным упрочнением так и для идеально упруго-пластического материала.

#### Summary

#### ANALYSIS OF THE "JUMP" PHENOMENON IN ELASTIC-PLASTIC DOMAIN BASED ON THE MISES TRUSS MODEL

The "jump" phenomenon consisting in passing from one configuration of equilibrium to another without change of the form of the system, has been considered in the present paper. The analysis is based on the simplified truss model of Mises consisting of two hinged rods loaded in the middle joint by a vertical concentrated force. The assumed simple model enables to account for the geometric non-linearities; taking as independent variable the dimensionless deflection of the system, the required equations are derived for arbitrary stress-strain relations.

The case of a material with multiple linear strain-hardening has been studied in detail, the process of loading and unloading and the Bauschinger effect being taken into consideration.

The analysis of materials with single linear strain-hardening and with a distinct plastic range indicates the possibility of arising of the jump phenomenon once the yield limit is reached. The theoretically evaluated double jump should take place in the case of large initial deflections, though this phenomenon does not expect to occur in practice.

Numerical calculations make it possible to draw the graphs for materials with single linear strain-hardening and for perfectly elastic-plastic bodies.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW  
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lipca 1965.*