

PLASTYCZNOŚĆ CIAŁ O SKOKOWEJ NIEJEDNORODNOŚCI

JAN RYCHLEWSKI (WARSZAWA)

I. Wprowadzenie

1. Temat pracy	45
2. Model złącza dwu materiałów	46
3. Pewne dane doświadczalne	50

II. Płaski stan odkształcenia

4. Podstawowe równania	53
5. Analiza stanu naprężenia i prędkości ruchu w otoczeniu powierzchni kontaktu	56
6. Początkowe płynięcie plastyczne klina o skokowej niejednorodności	61
7. Działanie gładkiego sztywnego stempla na półprzestrzeń	83
8. Przeciąganie warstwowego pasma przez gładką matrycę	88

III. Skręcanie

9. Podstawowe równania w pewnym układzie krzywoliniowym	92
10. Skokowa niejednorodność; warunki dla naprężeń na powierzchniach kontaktu	94
11. Analogie Nádai'a dla prętów o skokowej niejednorodności	96
12. Rozwiązania lokalne	98
13. Nośność graniczna pręta kołowego	99
14. Nośność graniczna pręta prostokątnego	106

IV. Nośność graniczna płyt

15. Sformułowanie problemu	113
16. Płyta izotropowa ze słabszym środkiem	116
17. Płyta izotropowa o mocniejszym środku	121
Literatura	123

I. Wprowadzenie

1. Temat pracy

Ośrodek sprężysto-plastyczny o wybranym prawie konstytutywnym nazywamy *niejednorodnym*, gdy parametry (moduły) występujące w tym prawie zależą od współrzędnych materialnych rozpatrywanej cząstki. Gdy zmienne są moduły opisujące własności plastyczne, ośrodek nazywamy *plastycznie niejednorodnym*.

Badania w dziedzinie teorii ciał plastycznie niejednorodnych, zapoczątkowane pracami [1 i 2], dotyczyły przypadku ciągłej zależności modułów od współrzędnych, spowodowanej takimi przyczynami, jak niejednorodność składu, obróbka powierzchniowa, temperatura, bombardowanie strumieniami cząstek elementarnych i innymi. Przeglądu osiągnięć i problemów nierozwiązanych dokonano w pracach [3 i 4].

Istnieje jednak obszerna klasa problemów praktycznych, przy których analizie występuje konieczność rozważenia odkształceń plastycznych ciał z powierzchniami, na których własności plastyczne doznają skoku (niejednorodność skokowa).

Pierwszą grupę stanowią tu problemy wytrzymałości konstrukcji złożonych z części wykonanych z różnych materiałów, w szczególności konstrukcji metalowych klejonych.

Drugą bardzo obszerną grupę stanowią problemy wspólnej obróbki plastycznej różnych metali. Szczególnie aktualne są zagadnienia obróbki wyrobów bimetalicznych (ciągnięcie drutu z wkładkami, walcowanie warstwowych blach itp), głównie dla potrzeb przemysłu chemicznego, przemysłu elektrotechnicznego, budowy reaktorów itp. W tej dziedzinie istnieje bogate piśmiennictwo techniczne, natomiast opracowanie mechaniki tych procesów nie wyszło poza ramy przybliżonych ujęć inżynierskich (por. np. [5–8]). Ten stan rzeczy znalazł odbicie w pracy [9].

Próbie ujęcia niektórych aspektów mechaniki procesów deformacji plastycznej ciał o skokowym rozkładzie własności stanowią prace [10–16]. Niniejsze opracowanie poświęcone jest przedstawieniu podstawowych wyników tych prac⁽¹⁾. Poniżej podany zostanie sposób włączenia zagadnień skokowej niejednorodności do teorii ciał idealnie plastycznych, dokonana zostanie analiza pola naprężenia i prędkości ruchu w otoczeniu powierzchni kontaktu części o różnych granicach plastyczności oraz przedstawiony będzie sposób rozwiązania szeregu problemów brzegowych dla płaskiego stanu odkształcenia i dla skręcania.

Przyjmujemy model ciała sztywno idealnie-plastycznego, izotropowego i nieściśliwego. Praca należy zatem do dziedziny nazywanej zazwyczaj *matematyczną teorią idealnej plastyczności*. W związku z tym nie są w niej analizowane liczne aspekty natury *par excellence* fizycznej rozpatrywanych procesów, np. istota zjawisk powierzchniowych na styku dwu odmiennych części ciała.

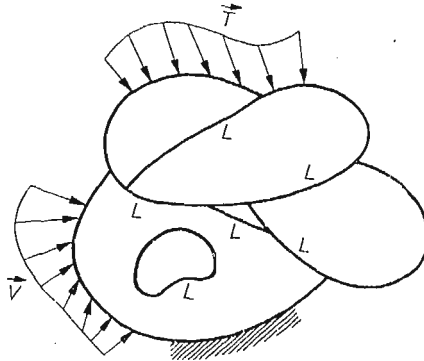
Z drugiej strony, problemy skokowej niejednorodności prowadzą do wielu nierozwiązanych problemów matematycznych, np. w teorii równań quasi-liniowych o nieciągłych współczynnikach. Celem naszym jest podanie opisu mechaniki badanych zjawisk, a nie czysto matematycznych aspektów otrzymany układów równań.

2. Model złącza dwu materiałów

W ramach przyjętej koncepcji jedyną stałą fizyczną, opisującą własności ośrodka, jest granica plastyczności K . Jest jednak rzeczą zupełnie oczywistą, że podanie granicy plastyczności po obu stronach powierzchni kontaktu nie daje informacji wystarczającej do opisu zachowywania się ciała jako całości. Co więcej, trudności poprawnego sformułowania problemu i istotne własności ciał o skokowej niejednorodności kryją się właśnie we własności styków.

⁽¹⁾ Współautorem pracy [15] jest J. A. KÖNIG, współautorem pracy [16] jest M. ARCISZ.

Zadaniem praktycznym ze skokową niejednorodnością plastyczną, które nas będą interesowały z punktu widzenia możliwości zastosowań teorii idealnej plastyczności, można na ogół nadać postać następującego problemu brzegowego: rozpatrujemy ciało, podzielone skończoną liczbą powierzchni kontaktu na części o różnych granicach plastyczności (rys. 1.1); na części S_T powierzchni ciała dany jest rozkład sił powierzchniowych νT_i z dokładnością do mnożnika ν , na części S_v dane są prędkości przemieszczeń V_i ; należy znaleźć stan naprężenia i prędkości przemieszczeń ciała przy jego ruchu plastycznym oraz odpowiednie wartości mnożnika ν dla sił powierzchniowych. Terminem «ruch plastycz-



Rys. 1.1

ny» obejmujemy umownie również przypadek, gdy części ciała poruszają się jak bryły sztywne, a na powierzchniach kontaktu występują skoki prędkości i deformacje skupione.

Sformułowany powyżej cel badania narzuca sposób opisu własności złąc: brakującą informacją jest opis warunków na powierzchni kontaktu, umożliwiających wzajemny ruch stykających się części.

Skokowa niejednorodność plastyczna może być użyta jako matematyczny model następujących realnych warunków:

1) dwa materiały przedzielone są cienką (idealizowaną jako nieskończenie cienką) warstwą trzeciego materiału, którym może być klej do metalu, smar, warstwa izolacji termicznej lub elektrycznej itp.,

2) dwa materiały połączone są za pomocą odpowiedniego zabiegu technologicznego, np. zgrzewania, spawania na zimno, spawania wybuchowego lub też stykają się wykazując znaczną przyczepność adhezyjną [17],

3) dwa materiały stykają się nie będąc złączonymi, przy czym styk charakteryzuje pewien współczynnik tarcia,

4) wewnątrz tego samego materiału mamy wąską strefę silnej zmiany granicy plastyczności.

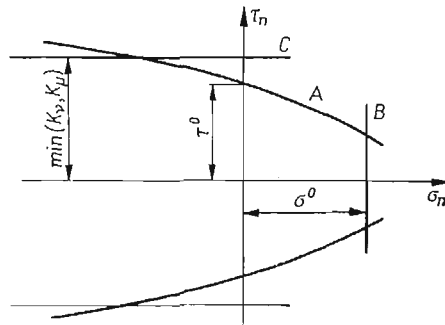
Rozpatrzmy więc złącze dwóch materiałów o granicach plastyczności K_v i K_μ , przedzielonych powierzchnią $L_{v\mu}$ o równaniu $F(x_i) = 0$. Stykające się materiały mogą wykazywać ponadto ciągłą niejednorodność.

Przyjmijmy, że dla wszystkich omówionych sytuacji o zniszczeniu złącza (o możliwości powstania nieciągłości prędkości na $L_{v\mu}$) decyduje naprężenie normalne σ_n oraz styczne τ_n , przy czym normalne naprężenie ściskające może osiągnąć dowolnie duże wartości.

Zależność graniczną między σ_n , τ_n przyjmiemy w postaci przedstawionej na rys. 1.2 (krzywa A i prosta B), gdzie τ_0 oznacza maksymalną wartość naprężenia stycznego, które może być przekazane przez powierzchnię kontaktu przy $\sigma_n = 0$, σ_0 zaś jest wytrzymałością rozdzielczą złącza na rozciąganie. Naprężenie styczne nie może być oczywiście większe od mniejszej z liczb K_v , K_μ (prosta C). Reasumując można stwierdzić, że złącze pozostaje «niezniszczone», gdy naprężenia σ_n , τ_n spełniają nierówności

$$(2.1) \quad \tau_n < \min(K_v, K_\mu), \quad \tau_n < f(\sigma_n), \quad \sigma_n < \sigma_0.$$

Gdy naprężenie styczne osiąga wartość $\tau_n = \min(K_v, K_\mu)$, pojawia się możliwość nieciągłości składowej stycznej prędkości przemieszczenia wskutek poślizgu w słabszym materiale, gdy $\tau_n = f(\sigma_n)$, poślizg może nastąpić na granicy materiałów, gdy $\sigma_n = \sigma_0$.



Rys. 1.2

możliwa jest nieciągłość składowej normalnej prędkości (kruche zniszczenie spoiny materiałów). Gdy złącze nie jest «zniszczone», ruch plastyczny obu materiałów jest możliwy, jednakże musi on spełniać warunki ciągłości wektora prędkości na powierzchni kontaktu $L_{v\mu}$. Wzajemne położenie krzywej A i prostych B , C zależy od konkretnych wartości liczbowych i może być zmienne nawet wzdłuż tej samej powierzchni kontaktu.

Złącze o opisanych powyżej własnościach nazwiemy modelem I.

Dla niektórych złącz wpływ naprężenia normalnego na wartość graniczną naprężenia stycznego jest nieznaczny i wówczas można przyjąć uproszczony «warunek zniszczenia», w którym A jest linią prostą równoległą do osi σ_n . Złącze o tych własnościach nazwiemy modelem II.

Model II odpowiada przypadkowi czwartemu. Może on być przyjęty jako uproszczenie dla niektórych sytuacji w przypadkach pierwszym i drugim, nie jest natomiast do przyjęcia np. dla niesmarowanego kontaktu z tarcem (przypadek trzeci).

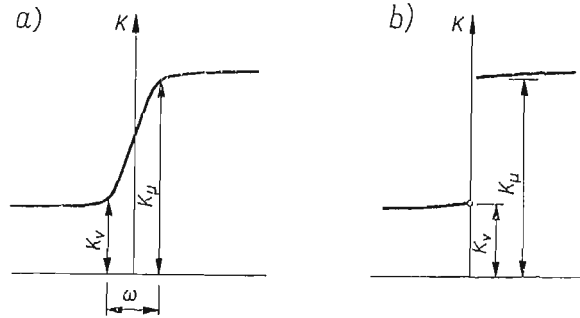
Wykażemy obecnie, że model II, w przypadku gdy wytrzymałość rozdzielczą σ_0 jest dostatecznie duża lub gdy σ_n jest dostatecznie małe (dla $\sigma_n < 0$ zawsze), można w zupełności zinterpretować w ramach teorii ośrodka idealnie plastycznego.

Stwierdzamy najpierw, że gdy niejednorodność skokowa jest zdefiniowana jako sytuacja graniczna dla ciągłej monotonicznej niejednorodności w cienkiej warstwie (przy-

padek czwarty, rys. 1.3a), to wykres zmiany granicy plastyczności w kierunku normalnym do powierzchni kontaktu ma charakter przedstawiony na rys. 1.3b. Tak zdefiniowany styk, mieszczący się całkowicie w ramach teorii ciała idealnie plastycznego, nazwiemy *kontaktem z idealną przyczepnością*. Na płaszczyźnie σ_n, τ_n odpowiadają mu dwie proste

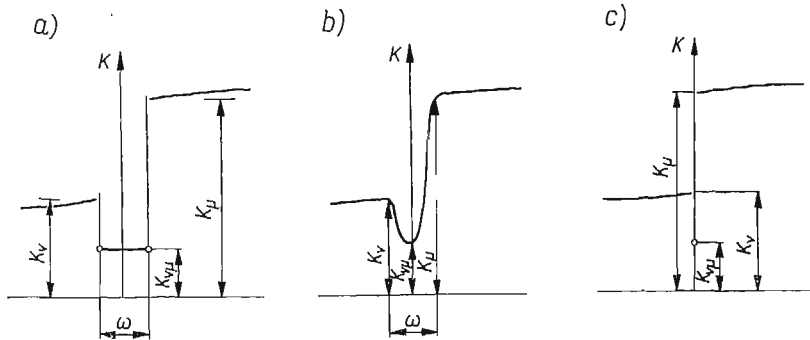
$$(2.2) \quad \tau_n = \pm \min(K_\mu, K_\nu).$$

Rozważmy teraz sytuację, gdy materiały o granicach plastyczności K_ν, K_μ są rozdzielone warstwą o grubości ω trzeciego materiału również idealnie plastycznego, o granicy plastyczności $K_{\nu\mu}$ ⁽²⁾, rys. 1.4a. O powierzchniach $L_{0\nu}, L_{0\mu}$ zakładamy, że są one



Rys. 1.3

powierzchniami kontaktu z idealną przyczepnością. Przejdźmy do granicy z grubością warstwy pośredniej, $\omega \rightarrow 0$. Łatwo stwierdzić, że otrzymujemy w granicy kontakt odpowiadający dokładnie modelowi II, przy czym $\tau_0 = K_{\mu\nu}$. Analogicznego przejścia granicznego można dokonać z sytuacji przedstawionej na rys. 1.4b, gdy przy $\omega \rightarrow 0$ $K_\mu, K_\nu, K_{\nu\mu}$ są ustalone.



Rys. 1.4

Styk idealnie gładki (bez tarcia) odpowiada w tym sensie przypadkowi przejścia granicznego $\omega \rightarrow 0$ dla $K_{\nu\mu} = 0$, tzn. gdy warstwa pośrednia jest cieczą idealną.

⁽²⁾ W pracy tej nie ma potrzeby użycia gdziekolwiek w istotny sposób oznaczeń tensorowych, dlatego będziemy używać wskaźników tak, jak to będzie wygodne w każdym przypadku.

Złącze opisywane modelem II jest zatem równoważne ośrodkowi plastycznemu o następującym rozkładzie granicy plastyczności w otoczeniu powierzchni kontaktu $L_{v\mu}$ opisanego równaniem $F(x_i) = 0$:

$$(2.3) \quad K = \begin{cases} K_v(P), & F < 0, \\ K_{v\mu}, & F = 0, \\ K_\mu(P), & F > 0. \end{cases}$$

Rozkład ten przedstawiony jest na rys. 1.4c.

Interesujący jest tu m.in. czysto matematyczny aspekt sprawy, przypisujemy mianowicie pewną granicę plastyczności powierzchni, a więc zbiorowi miary zera.

Gdy spełniony jest warunek

$$(2.4) \quad K_{v\mu} \geq \min(K_v, K_\mu),$$

to wartość $K_{v\mu}$ jest bez znaczenia, ponieważ o możliwości «zniszczenia styku» decyduje słabszy materiał. Jedyne wyjątek można by zrobić dla przypadku, gdy $K_{v\mu} = a \delta(F)$, gdzie $\delta(x)$ oznacza funkcję Diraca. Odpowiadałoby to modelowi takiej sytuacji, w której warstwa pośrednia z przejścia granicznego przedstawionego na rys. 1.4a jest wielokrotnie silniejsza od stykających się materiałów (bardzo cienka wkładka zbrojeniowa itp.). W przejściu granicznym warstwę tę należałoby traktować jako sztywną idealnie wiotką błonę, nakładającą odpowiednie więzy na sposób ruchu plastycznego otaczającego ośrodka.

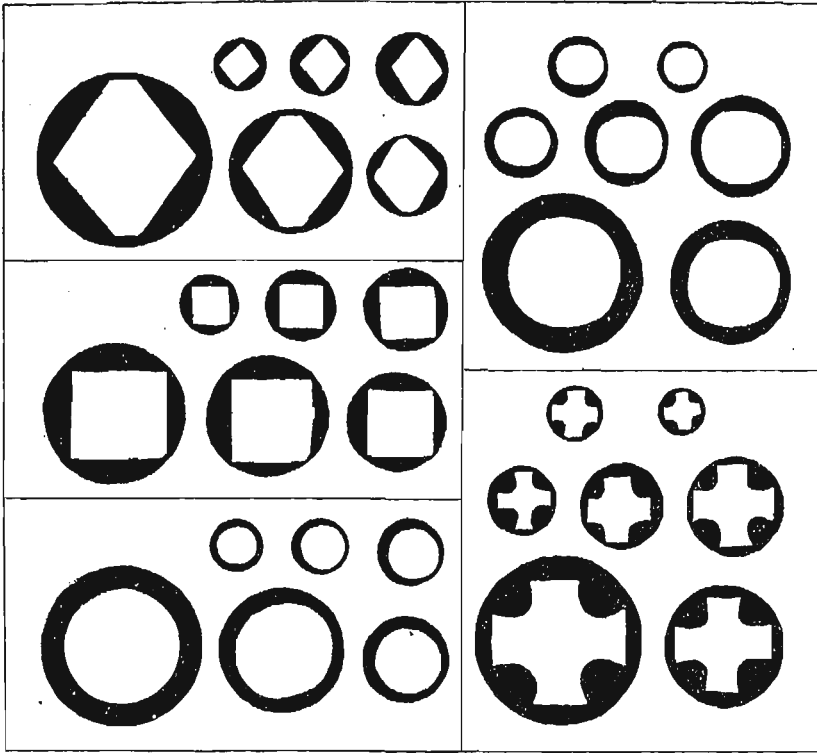
3. Pewne dane doświadczalne

Przedstawiony w pracy sposób ujęcia zagadnień skokowej niejednorodności plastycznej, opierający się na wykorzystaniu modelu sztywno-plastycznego ciała bez wzmocnienia i użyciu wprowadzonego modelu złącza, jest niewątpliwie daleko posuniętym uproszczeniem sytuacji rzeczywistych. Uproszczenie to jest dokonane świadomie, bowiem na obecnym etapie rozwoju teorii plastyczności nie mamy jeszcze dostatecznie wiarogodnych i zadowalających z teoretycznego punktu widzenia opisów ciał ze wzmocnieniem; opisy takie dopiero powstają. Autor ma jednak nadzieję, że w obu grupach zadań, wymienionych w p. 1, można znaleźć zastosowanie dla zależności wyprowadzonych w pracy.

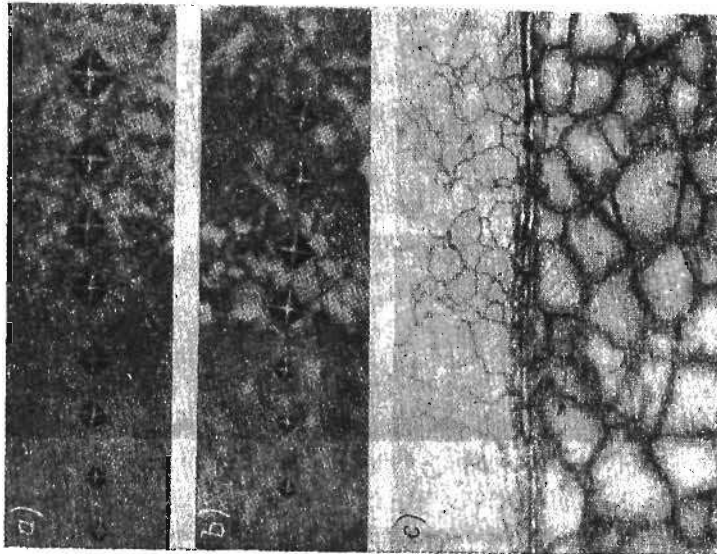
Dla zilustrowania powyższych wywodów przytoczymy kilka zdjęć złączy, uzyskanych na drodze «zimnego spawania» metali poprzez ich wspólną deformację plastyczną [18]. Na rysunku 1.5a przedstawiono w 400-krotnym powiększeniu strefę połączenia w procesie deformacji na gorąco stali 60 i stali St2kp. Widzimy tu silną zmianę twardości, a więc i granicy plastyczności, w wąskiej strefie. Inna sytuacja, dla stali 6XS i St2kp, przedstawiona jest na rys. 1.5b (powiększenie 400-krotne). Mamy tu do czynienia z wyraźnym skokiem granicy plastyczności. Na rysunku 1.5c (powiększenie 300-krotne) obserwujemy sytuację odmienną od obu poprzednich: na granicy łączonych metali, stali X23N18 i stopu EI437, powstała nowa bardzo wąska strefa.

Na rysunku 1.6. przedstawiono wg [9] przekroje wielokrotnie przeciąganych prętów ze stalowym rdzeniem w miedzianej otoczce. Zwróćmy uwagę na zachowane podobieństwo kolejnych przekrojów i zjawisko «pływania» sztywnego rdzenia w miękkiej otoczce.

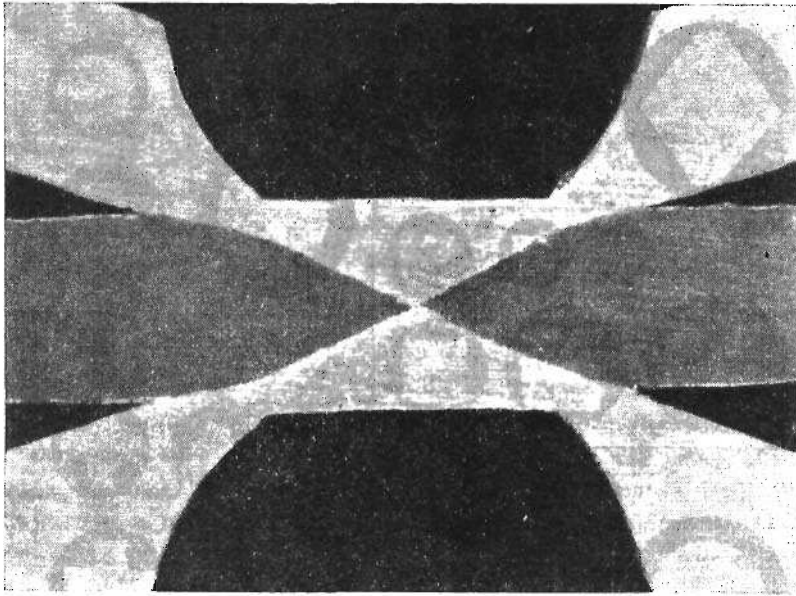
Na rysunkach 1.7 i 1.8a,b przedstawiono przekroje trzech pierwotnie równoległych warstw odkształconych przez dwa stemple [19]. Warstwy zewnętrzne są z aluminium,



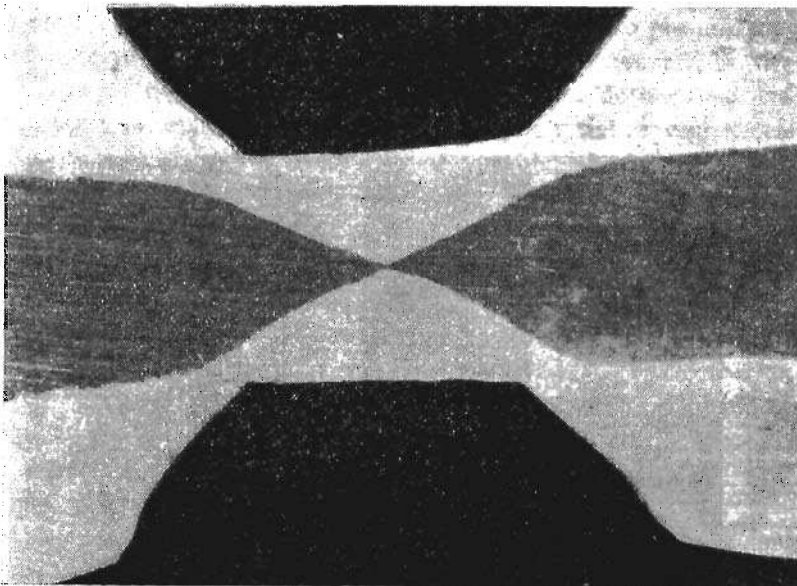
Rys. 1.6



Rys. 1.5

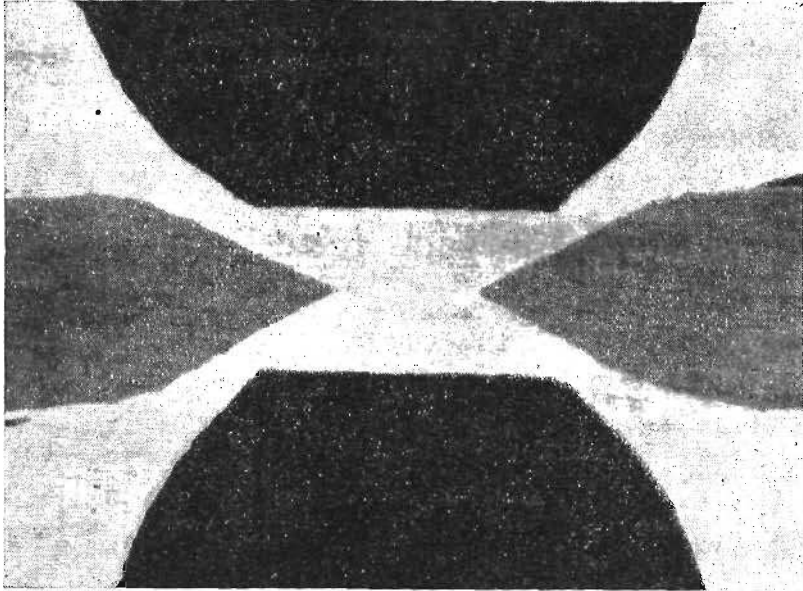


Rys. 1.7



Rys. 1.8a

warstwę środkową stanowi żelazo-armco (rys. 1.7) lub miedź (rys. 1.8a,b). Powstające trójkątne strefy miękkiego aluminium, w których ma miejsce przestrzenny stan ściskania, zbliżony do hydrostatycznego, z łatwością przecinają i następnie rozsuwają warstwę środkową o znacznie wyższej granicy plastyczności.



Rys. 1.8b

II. Płaski stan odkształcenia

4. Podstawowe równania

Stan ruchu, przy którym wektory prędkości przemieszczeń są równoległe do pewnej płaszczyzny i nie zależą od odległości od niej, tradycyjnie nazywamy płaskim stanem odkształcenia⁽³⁾. Przyjmijmy w płaszczyźnie płynięcia dowolny ortogonalny krzywoliniowy układ współrzędnych Eulera γ, δ oznaczając przez φ kąt nachylenia linii γ ($\delta = \text{const}$) do osi x kartezjańskiego układu odniesienia.

W płaskim stanie odkształcenia niejednorodnego ośrodka sztywno-plastycznego bez wzmocnienia i nieściśliwego poszukujemy pięciu nieznanymi funkcji: dwóch składowych fizycznych wektora prędkości

$$(4.1) \quad V_\gamma = V_\gamma(\gamma, \delta), \quad V_\delta = V_\delta(\gamma, \delta)$$

i trzech składowych fizycznych tensora naprężeń:

$$(4.2) \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma}(\gamma, \delta), \quad \sigma_{\delta\delta} = \sigma_{\delta\delta}(\gamma, \delta), \quad \sigma_{\gamma\delta} = \sigma_{\gamma\delta}(\gamma, \delta).$$

⁽³⁾ Dla użytego modelu ciała słuszniejszą nazwą jest «przepływ płaski».

Wielkości te muszą spełniać układ równań złożony z warunków równowagi⁽⁴⁾

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}}{\partial s_\gamma} + \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}}{\partial s_\delta} + \frac{\sigma_{\delta\delta} - \sigma_{\gamma\gamma}}{R_\delta} + \frac{\sigma_{\gamma\delta}}{R_\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}}{\partial s_\gamma} + \frac{\partial \sigma_{\delta\delta}}{\partial s_\delta} + \frac{\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta}}{R_\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma\delta}}{R_\delta} &= 0; \end{aligned}$$

warunku plastyczności

$$(4.4) \quad (\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta})^2 + 4\sigma_{\gamma\delta}^2 = 4K^2(\gamma, \delta);$$

warunku nieściśliwości

$$(4.5) \quad \epsilon_{\gamma\gamma} + \epsilon_{\delta\delta} = 0$$

i wynikającego z prawa płynięcia Misesa związku

$$(4.6) \quad \frac{\epsilon_{\gamma\gamma} - \epsilon_{\delta\delta}}{\sigma_{\gamma\gamma} - \sigma_{\delta\delta}} = \frac{\epsilon_{\gamma\delta}}{\sigma_{\gamma\delta}} = \lambda > 0,$$

gdzie

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \epsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{\partial V_\gamma}{\partial s_\gamma} - \frac{V_\delta}{R_\gamma}, & \epsilon_{\delta\delta} &= \frac{\partial V_\delta}{\partial s_\delta} - \frac{V_\gamma}{R_\delta}, \\ 2\epsilon_{\gamma\delta} &= \frac{\partial V_\gamma}{\partial s_\delta} + \frac{\partial V_\delta}{\partial s_\gamma} + \frac{V_\delta}{R_\delta} + \frac{V_\gamma}{R_\gamma}. \end{aligned}$$

Dla pochodnych w kierunkach γ, δ wprowadzono tu oznaczenia⁽⁵⁾

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial s_\gamma} \equiv \frac{\partial}{h_\gamma \partial \gamma}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\delta} \equiv \frac{\partial}{h_\delta \partial \delta},$$

gdzie h_γ, h_δ są parametrami Lamégo układu γ, δ (por. [20]), zaś R_γ, R_δ są promieniami krzywizn linii γ, δ , związanymi z kątem φ związkami

$$(4.9) \quad \frac{1}{R_\delta} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\delta}, \quad \frac{1}{R_\gamma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s_\gamma}.$$

Układ (4.3)–(4.6) jest quasi-liniowym układem hiperbolicznym, a jego charakterystykami są tzw. linie poślizgu, będące trajektoriami maksymalnych naprężeń stycznych. Siatkę linii poślizgu oznaczamy przez α, β ; umowę o jej kierunkach dodatnich pokazuje rysunek 2.1; kąt między kierunkiem linii α a osią x oznaczamy przez θ . Gdy układ γ, δ pokrywa się z układem kartezjańskim x, y , należy przyjąć

$$\frac{\partial}{\partial s_\gamma} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial s_\delta} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{1}{R_\delta} \equiv \frac{1}{R_\gamma} \equiv 0.$$

⁽⁴⁾ Sposób ujęcia równań płaskiego stanu odkształcenia pokrywa się z przyjętym w podręczniku [20]. Zakładamy, że Czytelnik zapoznał się z treścią rozdziału VIII tej książki.

⁽⁵⁾ Dla symboli (4.8) mamy

$$\frac{\partial^2}{\partial s_\delta \partial s_\gamma} = \frac{\partial^2}{\partial s_\gamma \partial s_\delta} + \frac{1}{R_\gamma} \frac{\partial}{\partial s_\gamma} - \frac{1}{R_\delta} \frac{\partial}{\partial s_\delta},$$

równania w [20] podane są bez użycia tych symboli.

Korzystając z klasycznego podstawienia Lévy'ego

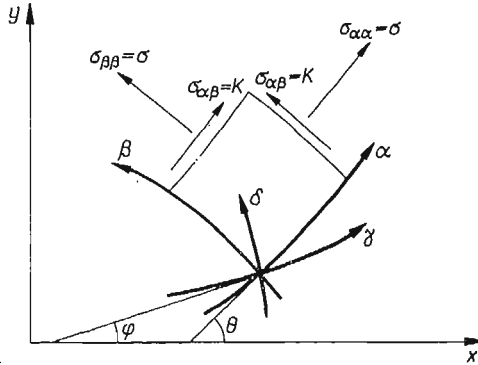
$$(4.10) \quad \sigma_{\gamma\gamma} = \sigma - K \sin 2\psi, \quad \sigma_{\delta\delta} = \sigma + K \cos 2\psi, \quad \sigma_{\gamma\delta} = K \cos 2\psi,$$

gdzie, jak widać, σ jest naprężeniem średnim, zaś ψ jest kątem między kierunkami α , γ (por. rys. 2.1)

$$(4.11) \quad \psi = \theta - \varphi$$

i korzystając z (4.9) zamiast trzech pierwszych równań układu otrzymujemy dwa równania względem σ , θ :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial s_\gamma} - 2K \left[\cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\gamma} + \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\delta} \right] &= \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\gamma} - \cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\delta}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_\delta} - 2K \left[\sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\gamma} - \cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial s_\delta} \right] &= -\cos 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\gamma} - \sin 2(\theta - \varphi) \frac{\partial K}{\partial s_\delta}. \end{aligned}$$



Rys. 2.1

Przyjmując w charakterze układu współrzędnych siatkę linii poślizgu, tzn. przyjmując $\gamma \equiv \alpha$, $\delta \equiv \beta$, $\psi \equiv 0$, $\varphi \equiv \theta$ otrzymujemy nasz układ równań (4.12), (4.5), (4.6) w postaci

$$(4.13) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha} - 2K \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial s_\beta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s_\beta} + 2K \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial K}{\partial s_\alpha} = 0;$$

$$(4.14) \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial s_\alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} V_\beta = 0, \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} V_\alpha = 0.$$

Są to tzw. związki wzdłuż charakterystyk.

Rozpatrywane ciało jest podzielone w płaszczyźnie ruchu liniami kontaktu $L_{\nu\mu}$ na n części G_ν ($\nu = 1, \dots, n$) o ciągłym rozkładzie granicy plastyczności. Zakładamy, że złącza mają własności opisywane przez model II, a $\sigma_n < \sigma_0$.

Matematyczny aspekt problemu polega zatem na konieczności całkowania quasi-liniowego układu (4.12), (4.5), (4.6) o współczynnikach nieciągłych na liniach $L_{\mu\nu}$ zgodnie z (2.3). Autorowi nie udało się znaleźć opracowania ogólnej teorii takich układów, w szczególności dowodów twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań podstawowych problemów brzegowych. Pewne zbliżone problemy matematyczne powstają w teorii dyfrakcji i magneto hydrodynamice (por. [21 i 22]).

W niniejszym opracowaniu ograniczymy się do podania przykładów, w których obszary G_ν są jednorodnie ($K_\nu = \text{const}$, $\nu = 1, \dots, n$). W każdym z takich niedomkniętych obszarów równania (4.13) mogą być scałkowane, co prowadzi do związków Köttera-Hencky'ego

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \sigma - 2K\theta &= g_\nu(\beta) \\ \sigma + 2K\theta &= f_\nu(\alpha) \end{aligned} \quad \text{w } G_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

5. Analiza stanu naprężenia i prędkości ruchu w otoczeniu powierzchni kontaktu

W każdym z niedomkniętych obszarów G_ν współczynniki układu (4.12) są ciągłe. Obecnie skupimy uwagę na zbadaniu zachowania się rozwiązań σ , θ , V_α , V_β w otoczeniu powierzchni kontaktu ustalając warunki i ograniczenia dla naprężeń i prędkości, które powinny być na nich spełnione [11].

A. *Warunki dla naprężeń.* Przyjmujemy, że linia kontaktu $L_{\nu\mu}$ jest linią δ (t.zn. $\gamma = \gamma_0$) pewnego układu współrzędnych krzywoliniowych.

Jeżeli siły masowe i siły bezwładności nie mają na $L_{\mu\nu}$ osobliwości typu funkcji Diraca, to wektor naprężenia przekazywanego przez $L_{\mu\nu}$ nie doznaje skoku, zatem

$$(5.1) \quad \sigma_{\gamma\gamma}^\nu = \sigma_{\gamma\gamma}^\mu = \sigma_{\gamma\gamma}, \quad \sigma_{\gamma\delta}^\nu = \sigma_{\gamma\delta}^\mu = \sigma_{\gamma\delta}.$$

Dla przypadku gdy zachodzi nierówność $K_{\mu\nu} < \min(K_\nu, K_\mu)$, otrzymujemy pierwsze ograniczenie określające największą wartość składowej stycznej wektora naprężenia, która może być przekazana przez linię kontaktu:

$$(5.2) \quad |\sigma_{\gamma\delta}| \leq K_{\mu\nu}.$$

Jeżeli z obu stron $L_{\nu\mu}$ ma być spełniony warunek plastyczności (1.2), to składowa «wewnętrzna» tensora naprężenia po dwóch stronach $L_{\nu\mu}$ wynosi⁽⁶⁾

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \gamma < \gamma_0: \quad \sigma_{\delta\delta}^\nu &= \sigma_{\gamma\gamma} \pm 2(K_\nu^2 - \sigma_{\gamma\delta}^2)^{1/2}, \\ \gamma > \gamma_0: \quad \sigma_{\delta\delta}^\mu &= \sigma_{\gamma\gamma} \pm 2(K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Linia kontaktu $L_{\nu\mu}$ dwu ciał uplastycznionych jest więc linią nieciągłości pola naprężenia; nieciągłości doznaje składowa normalna tensora naprężenia działająca równoległe do $L_{\nu\mu}$, zaś wielkość skoku wynosi⁽⁷⁾

$$(5.4) \quad \sigma_{\delta\delta} = \frac{2|(K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2} - (K_\nu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2}|}{2|(K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2} + (K_\nu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2)^{1/2}|}.$$

Inaczej mówiąc, pole naprężeń można przedłużyć z obszaru G_ν w obszar G_μ jako ciągłe tylko w przypadku, gdy jeden z obszarów jest w otoczeniu $L_{\nu\mu}$ nieuplastyczniony.

Na powstanie skoku naprężeń składają się dwa efekty: 1) skok granicy plastyczności, 2) niejednoznaczność, z jaką warunek plastyczności określa $\sigma_{\delta\delta}$ dla danych $\sigma_{\gamma\gamma}$, $\sigma_{\delta\gamma}$. Sytuację odpowiadającą przyjęciu jednakowych znaków we wzorach (5.3) i zatem znaku minus we wzorze (5.4) nazwiemy *nieciągłością pierwszego rodzaju*; sytuację odpowiadającą przyjęciu przeciwnych znaków we wzorach (5.3) i znaku plus w (5.4) określamy jako *nieciągłość drugiego rodzaju*. Gdy skoku granicy plastyczności nie ma, $K_\nu = K_\mu$, nieciągłość

⁽⁶⁾ Wartości $\sigma_{\delta\delta}^\nu$, $\sigma_{\delta\delta}^\mu$ (i podobne wielkości dalej) rozumiemy jako lewo- i prawostronne granice.

⁽⁷⁾ Wzory (5.4) i (5.6) łatwo zinterpretować za pomocą kół Mohra o promieniach K_ν , K_μ .

pierwszego rodzaju znika, drugiego zaś rodzaju pozostaje. Wynika stąd, że linia kontaktu będzie z reguły linią nieciągłości pierwszego rodzaju.

Przejdźmy do wyznaczenia warunków na ciśnienie średnie σ i kąt ψ nachylenia linii poślizgu α do normalnej do linii kontaktu. Korzystając z (4.10) i (5.1) otrzymujemy dla skoku ciśnienia średniego zależność

$$(5.5) \quad \sigma^v - \sigma^\mu = K_v \sin 2\psi^v - K_\mu \sin 2\psi^\mu = K_v \sin 2\psi^v - [K_\mu^2 - (K_v \cos 2\psi^v)^2]^{1/2},$$

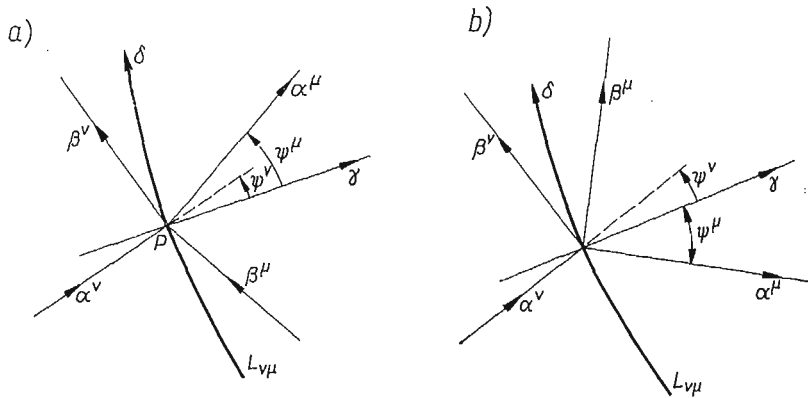
a dla skoku kąta ψ związek

$$(5.6) \quad \psi^\mu = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{K_v}{K_\mu} \cos 2\psi^v \right) + n\pi, \quad \psi = \theta - \varphi,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, $\arccos x$ jest rozumiane jako wartość główna funkcji $\text{Arccos } x$.

a. Zajmiemy się analizą wzoru (5.6) pomijając na razie ograniczenia wynikające z (4.4), tzn. przyjmując, że zachodzi warunek (2.4) z rozdziału I.

Położenie linii poślizgu przecinających linię kontaktu w punkcie P przedstawione jest na rys. 2.2: znakowi plus we wzorze (5.6) odpowiada nieciągłość pierwszego rodzaju (rys. 2.2a), znakowi zaś minus nieciągłość drugiego rodzaju (rys. 2.2b). Zauważmy, że znana reguła W. PRAGERA [20] o symetrii linii poślizgu względem linii nieciągłości nie jest spełniona dla $K_v \neq K_\mu$.



Rys. 2.2

Przyjmijmy dla uporządkowania dalszych rozważań, że $K_v < K_\mu$ i wprowadzimy wielkości pomocnicze η, κ

$$(5.7) \quad \eta \equiv \frac{K_v}{K_\mu}, \quad \kappa \equiv \frac{1}{2} \arccos \eta,$$

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{\pi}{4}.$$

Przyjmijmy ponadto, że kąty ψ^v, ψ^μ są tak określone, że spełniają nierówności

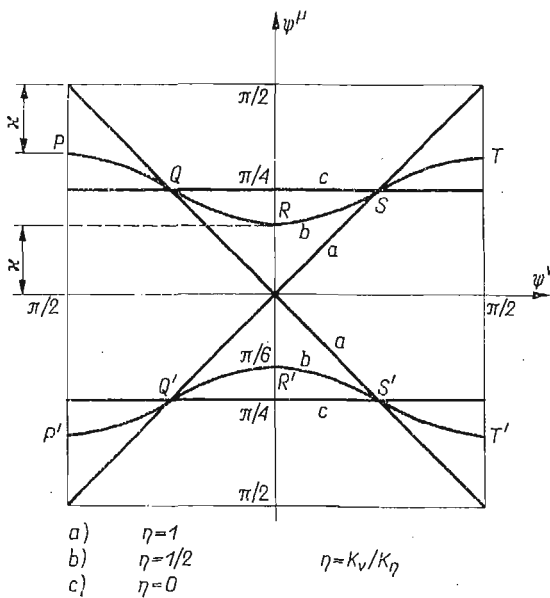
$$(5.8) \quad -\frac{\pi}{2} \stackrel{\text{df}}{\leq} \psi \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Można zawsze do tego doprowadzić dodając do $\psi^v(\psi^\mu)$ kąt $\pm\pi$ [tzn. zmieniając jednocześnie zwroty linii α, β w obszarze $G_v(G_\mu)$] co nie zmienia, jak widać z (4.10), stanu naprężenia.

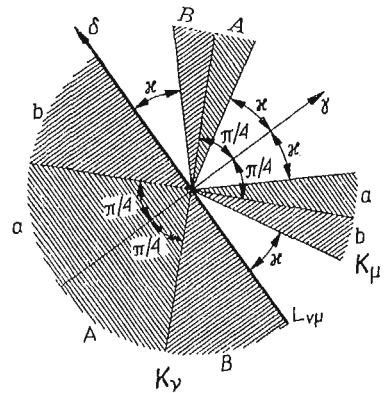
Zależność (5.6) przedstawiona została na rys. 2.3. Dla danego η kąt ψ^μ (tzn. kąt między normalną do linii kontaktu a linią poślizgu α^μ , biegnącą z punktu P w materiale mocniejszym) ograniczony jest przez nierówności

$$(5.9) \quad \kappa \leq |\psi^\mu| \leq \frac{\pi}{2} - \kappa.$$

Oznacza to, że charakterystyki α^μ, β^μ w obszarze mocniejszym nie mogą tworzyć z normalną do linii kontaktu $L_{v\mu}$ oraz z samą linią kontaktu kątów ostrych mniejszych od κ .



Rys. 2.3



Rys. 2.4

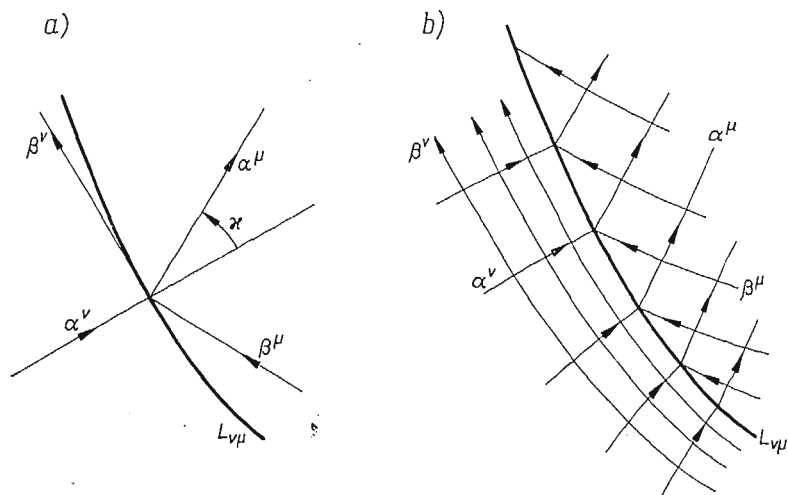
Na rysunku 2.4 obszary, w których mogą być położone charakterystyki przechodzące przez punkt P , zostały zakreskowane. Charakterystyka α^v biegnąca np. w obszarze A^v doznaje przy przejściu przez linię kontaktu załamania trafiając do obszaru A^μ , jeżeli nieciągłość naprężeń jest pierwszego rodzaju, lub do obszaru a^μ , jeżeli nieciągłość jest rodzaju drugiego.

Wskazemy jeszcze na następujący aspekt zbadanego zjawiska: w obszarze słabszym może istnieć każdy statycznie dopuszczalny (tzn. spełniający równania równowagi i warunek plastyczności) stan naprężenia, natomiast w obszarze silniejszym mogą istnieć tylko stany spełniające ograniczenie (5.9). Inaczej mówiąc, każdy stan naprężenia można przedłużyć z obszaru słabszego w obszar mocniejszy, ale nie każdy z mocniejszego do słabszego.

Zwłaszcza interesująco przedstawia się przypadek szczególny, gdy charakterystyka α^μ zajmuje jedno ze skrajnych położań, co odpowiada znakom równości w (5.9) oraz punktom

P, R, T, P', R', T' na rys. 2.3. Linia kontaktu ma w punkcie P kierunek charakterystyczny dla obszaru słabszego. Dochodzimy w ten sposób do ważnego wniosku: *linia kontaktu może stanowić charakterystykę lub obwiednię charakterystyk dla obszaru słabszego*⁽⁸⁾

Sytuację odpowiadającą punktowi R z rys. 2.3 $\psi^v = 0, \psi^\mu = \kappa$ przedstawiono na rys. 2.5.



Rys. 2.5

Siatka linii poślizgu jest gładka w otoczeniu linii kontaktu $L_{v\mu}$, tzn. $\psi] = 0$, tylko wtedy, gdy $L_{v\mu}$ jest jednocześnie trajektorią naprężenia głównego i linią nieciągłości pierwszego rodzaju.

b. Jeżeli maksymalne naprężenie styczne, które może być przekazane przez linię kontaktu, jest mniejsze od K_v , to należy uwzględnić dodatkowo warunek (5.2). Wprowadzimy wielkości pomocnicze:

$$(5.10) \quad \eta_v \equiv \frac{K_{v\mu}}{K_v}, \quad \kappa_v \equiv \frac{1}{2} \arccos \eta_v,$$

$$\eta_\mu \equiv \frac{K_{v\mu}}{K_\mu}, \quad \kappa_\mu \equiv \frac{1}{2} \arccos \eta_\mu.$$

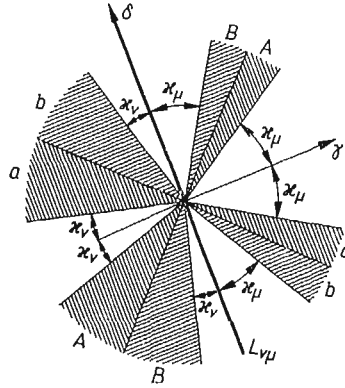
Korzystając z (5.6) i przyjmując nadal umowę (5.8) otrzymujemy następujące dodatkowe ograniczenia dla kątów ψ^v, ψ^μ :

$$(5.11) \quad \kappa_v \leq |\psi^v| \leq \frac{\pi}{2} - \kappa_v, \quad \kappa_\mu \leq |\psi^\mu| \leq \frac{\pi}{2} - \kappa_\mu.$$

⁽⁸⁾ Wydaje się, że wykryta silna osobliwość w przebiegu siatki charakterystyk powinna mieć miejsce w ogólnym przypadku quasi-liniowego hiperbolicznego układu równań o współczynnikach typu (4.4). Można sobie wyobrazić, jak trudno byłoby ją wykryć nie biorąc pod uwagę sensu mechanicznego problemu.

Ograniczenia te pokazano na rys. 2.6 analogicznym do rys. 2.4.

Warunki dla kąta θ otrzymujemy z wyżej podanych przez podstawienie (4.11), gdzie φ jest kątem między normalną do $L_{\nu\mu}$ a osią x .



Rys. 2.6

B. *Analiza prędkości przemieszczeń.* Własności pola prędkości przemieszczeń i odkształceń w otoczeniu linii kontaktu są prostym skutkiem własności stanu naprężenia.

a. Jeżeli $|\sigma_{\delta\gamma}| < \min(K_\nu, K_{\nu\mu})$, to w myśl analizy przeprowadzonej w p. 1 skok składowej stycznej V_δ wektora prędkości przemieszczeń jest niemożliwy, a ponieważ wykluczaliśmy również możliwość skoku składowej normalnej V_γ , to pole wektora prędkości jest ciągłe na $L_{\nu\mu}$, tzn.

$$(5.12) \quad \mathbf{V}^\nu = \mathbf{V}^\mu \quad \text{dla} \quad \kappa < |\psi^\mu| < \frac{\pi}{2} - \kappa \quad \text{lub} \quad \kappa_\nu < |\psi^\nu| < \frac{\pi}{2} - \kappa_\nu.$$

Składowe w kierunku poślizgu ulegają zmianie wskutek obrotu linii poślizgu i związane są ze sobą zależnościami

$$(5.13) \quad \begin{aligned} V_\alpha^\mu &= V_\alpha^\nu \cos \Delta\psi - V_\beta^\nu \sin \Delta\psi, \\ V_\beta^\mu &= V_\alpha^\nu \sin \Delta\psi + V_\beta^\nu \cos \Delta\psi, \end{aligned} \quad \Delta\psi \equiv \psi^\mu - \psi^\nu.$$

Ze związków $V_\delta^\nu = V_\delta^\mu$ i $V_\gamma^\nu = V_\gamma^\mu$, z których wynika $\epsilon_{\delta\delta}^\nu = \epsilon_{\delta\delta}^\mu$, przy wykorzystaniu prawa płynięcia (4.6) otrzymujemy

$$(5.14) \quad \lambda^\nu (\sigma_{\delta\delta}^\nu - \sigma_{\gamma\gamma}) = \lambda^\mu (\sigma_{\delta\delta}^\mu - \sigma_{\gamma\gamma}).$$

Jeżeli nieciągłość naprężeń na linii kontaktu jest nieciągłością pierwszego rodzaju (tak jest prawie zawsze), to wyrażenia w nawiasach mają ten sam znak, zatem na $L_{\nu\mu}$ doznaje przeskoku współczynnik funkcyjny w prawie płynięcia, przy czym

$$(5.15) \quad \frac{\lambda^\nu}{\lambda^\mu} = \left(\frac{K_\nu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2}{K_\mu^2 - \sigma_{\delta\gamma}^2} \right)^{1/2} < 1.$$

Jeżeli nieciągłość naprężeń jest nieciągłością drugiego rodzaju, to sytuacja nie różni się od dobrze znanej w przypadku jednorodności (por. np. [20]); wyrażenia w nawiasach we wzorze (5.14) mają różne znaki, a ponieważ z definicji $\lambda \geq 0$, to

$$(5.16) \quad \lambda^\nu = \lambda^\mu = 0, \quad \epsilon_{ij}^\nu = \epsilon_{ij}^\mu = 0, \quad i, j = \gamma, \delta,$$

co oznacza, że linię kontaktu należy interpretować jako nierozciągliwą, idealnie wiotką nić.

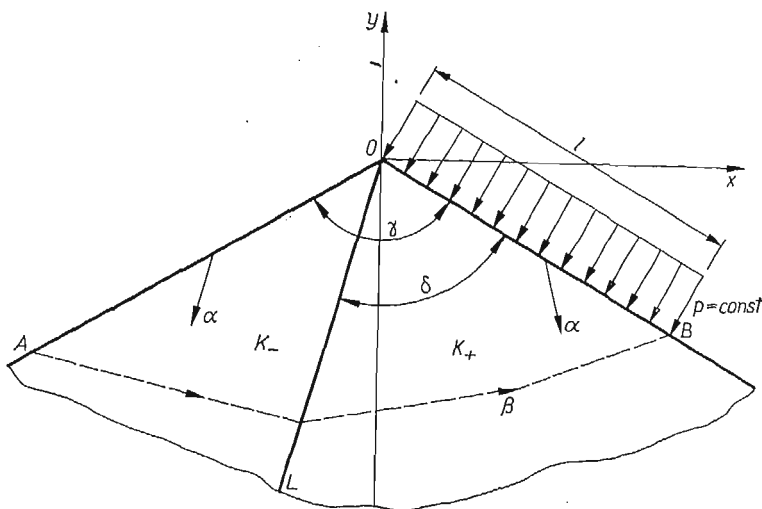
b. Gdy $|\sigma_{\gamma\delta}| = K_v < K_{v\mu}$, to przebieg charakterystyk w otoczeniu $L_{v\mu}$ ma charakter przedstawiony na rys. 2.6 i powstaje możliwość nieciągłości składowej V_δ , przy czym z równań (4.14) nie wynika stałość wartości skoku.

Nieciągłość składowej V_δ może powstać również w przypadku, gdy

$$|\sigma_{\gamma\delta}| = K_{\mu\nu} < K_v.$$

6. Początkowe płynięcie plastyczne klina o skokowej niejednorodności

A. *Sformułowanie problemu.* Rozważymy problem nośności granicznej klina obciążonego na jednej z krawędzi stałym obciążeniem normalnym. Kłін składa się z dwóch materiałów o granicach plastyczności K_+ , K_- , $K_+ \geq K_-$, przedzielonych prostą linią kontaktu, przechodzącą przez wierzchołek. Obciążenie działa na część mocniejszą.



Rys. 2.7

Zadanie charakteryzują trzy niezależne parametry: $\eta = K_-/K_+$, kąt rozwarcia klina γ i kąt rozwarcia strefy mocniejszej δ . W przestrzeni parametrów C_3 interesuje nas wnętrze obszaru

$$(6.1) \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad 0 \leq \delta \leq \gamma.$$

Przyjmijmy kartezjański układ współrzędnych, kierując oś wzdłuż dwusiecznej kąta γ (rys. 2.7). Korzystając ze związków (4.10) warunki brzegowe możemy zapisać w sposób następujący⁽⁹⁾:

$$(6.2) \quad OB: \quad \sigma = -p + K_+, \quad \theta = -\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right), \quad \dots$$

⁽⁹⁾ Założone kierunki linii α , β odpowiadają ścisnaniu w otoczeniu brzegu OA i przyjętym umowom co do kierunku linii poślizgu α , β (por. rys. 2.1 a także [20]).

$$(6.3) \quad OA: \quad \sigma = -K_-, \quad \theta = -\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \dots$$

$$(6.4) \quad AB: \quad \dots, \quad \dots, \quad V_\alpha = 0,$$

gdzie przez p oznaczono nieznaną wartość nacisku normalnego na OB , AB jest nieznaną charakterystyką β , dzielącą obszar sztywny i obszar ruchu plastycznego.

Łatwo stwierdzić, że warunek brzegowy dla prędkości przemieszczeń (6.4) nie daje informacji wystarczającej do wyznaczenia sposobu plastycznego ruchu klina w chwili odpowiadającej początkowi niewstrzymanego płynięcia plastycznego (z dokładnością tylko do skali czasu). W ramach rozpatrywanego modelu początkowe pole prędkości przemieszczeń będzie znane zatem z dokładnością do jednej funkcji jednej zmiennej, która musi spełniać słabe ograniczenia wynikające z postulatu nieujemności mocy dysypacji w każdym punkcie obszaru uplastycznienia.

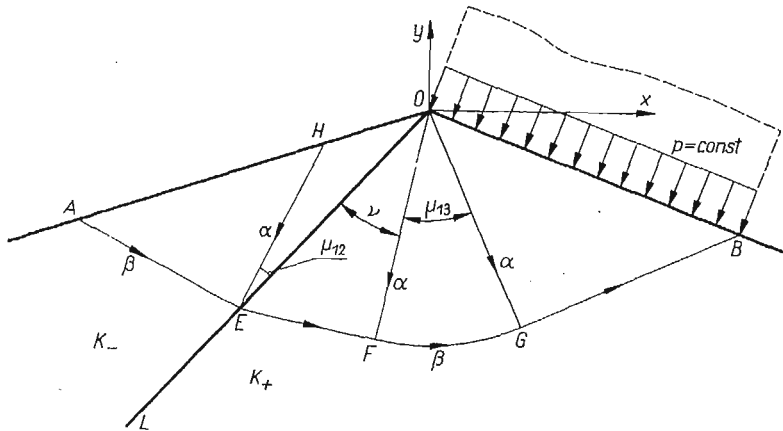
Pozwala to, jak się przekonamy, traktować otrzymane pola naprężeń jako rozwiązania słuszne dla bardzo obszernej klasy kinematycznych warunków brzegowych.

Rozwiązanie postawionego problemu dla klina jednorodnego ($K_+ = K_-$) podał E. H. LEE [21] (por. także [20]).

B. *Rozwiązania dla naprężeń.* W obu obszarach niedomkniętych G_+ , G_- mamy $K = \text{const}$, toteż z obu stron linii kontaktu obowiązują całki Köttera-Hencky'ego dla równań (4.13)

$$(6.5) \quad \sigma - 2K\theta = f(\beta), \quad \sigma + 2K\theta = g(\alpha).$$

Całkowanie równań (4.12) polegać będzie na doborze funkcji f , g spełniających warunki brzegowe (6.2), (6.3) oraz warunki na linii kontaktu (5.5), (5.6).



Rys. 2.8

Rozwiązanie 1, rys. 2.8⁽¹⁰⁾. Na odcinku OA o nieznannej długości warunki (6.3)

⁽¹⁰⁾ Wszystkie rysunki są wykonane dla $\eta = 1/2$.

formułują problem Cauchy'ego, którego rozwiązaniem jest jednorodny stan $f = \text{const}$, $g = \text{const}$, co daje

$$(6.6) \quad \sigma = -K_-, \quad \theta = -\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{w } AOE.$$

Dla $\gamma - \delta < \pi/4$ stan ten sięga do linii kontaktu L .

Nieciągłość naprężeń na L jest oczywiście nieciągłością pierwszego rodzaju. Korzystamy z warunków (5.5), (5.6) i (4.11), w których należy przyjąć $\varphi = -\left(\delta - \frac{\gamma}{2}\right)$, $n = 0$, przyjąc znak plus oraz zamienić indeksy μ , ν odpowiednio na +, -. Obliczając σ^+ , θ^+ otrzymujemy na OE problem Cauchy'ego. Rozwiązaniem jest stan jednorodny:

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \sigma &= -K_- - [1 - \cos 2(\gamma - \delta)] - K_+ [1 - \eta^2 \sin^2 2(\gamma - \delta)]^{1/2}, \\ \theta &= -\frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \arccos[\eta \sin 2(\gamma - \delta)], \end{aligned} \quad \text{w } EOF,$$

gdzie OF jest charakterystyką α przechodzącą przez punkt O . Zasięg tej strefy określa kąt EOF równy ν ,

$$(6.8) \quad \nu \equiv \frac{1}{2} \arccos[\eta \sin 2(\gamma - \delta)].$$

Znana charakterystyka OF oraz warunek (6.2) w punkcie O formułują zwyrodniały problem Riemanna (por. np. [20]). Charakterystyki α tworzą wachlarz biegunowy ($g = \text{const}$), zatem

$$(6.9) \quad \sigma = \sigma_{FO} - 2K_+(\theta - \theta_{FO}), \quad \theta_{FO} \leq \theta \leq -\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{w } FOG.$$

Dzięki przyjęciu $p = \text{const}$ problem Cauchy'ego (6.2) ma rozwiązanie niesprzeczne z (6.9). Otrzymujemy

$$(6.10) \quad \sigma = -p + K_+, \quad \theta = -\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \quad \text{w } GOB.$$

Porównując σ z FOG i GOB na OG otrzymujemy wartość obciążenia granicznego

$$(6.11) \quad p_1 = K_+ \left\{ (1 + \eta) - \eta \cos 2(\gamma - \delta) + [1 - \eta^2 \sin^2 2(\gamma - \delta)]^{1/2} + \left[2\delta - \frac{\pi}{2} - \arccos(\eta \sin 2(\gamma - \delta)) \right] \right\}.$$

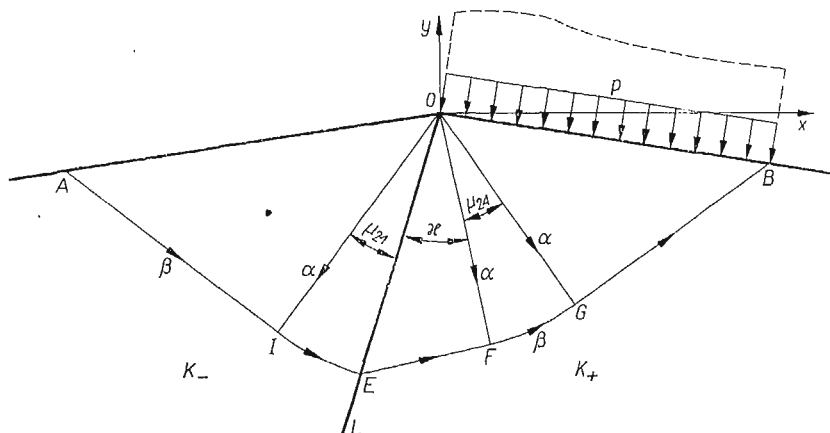
Przedstawione rozwiązanie jest słuszne, gdy zachodzą nierówności (por. rys. 2.8)

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \mu_{12} &= \frac{\pi}{4} - (\gamma - \delta) \geq 0 \\ \mu_{13} &= \delta - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos[\eta \sin 2(\gamma - \delta)] \geq 0. \end{aligned}$$

Na płaszczyźnie $\eta = \text{const}$ w obszarze (6.1) odpowiada to strefie zaznaczonej na rys. 2.20 liczbą 1⁽¹¹⁾.

Kąty μ_{ij} ($ij = 1, \dots, 6$) zostały tak dobrane i oznaczone, aby zmianie znaku μ_{ij} odpowiadało przejście od i -tego do j -tego rozwiązania. Zachodzi równoważność $(\mu_{ij} = 0) \Leftrightarrow (\mu_{ji} = 0)$.

Rozwiązanie 2, rys. 2.9. Gdy w poprzednim rozwiązaniu mamy μ_{12} , linia kontaktu staje się charakterystyką α dla obszaru słabszego, przy czym wektor prędkości



Rys. 2.9

doznaje na niej skoku (por. p. 5). Można wykazać, że dla mniejszych kątów δ linia kontaktu musi być nadal linią nieciągłości prędkości, co daje warunek

$$(6.13) \quad \theta^- = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} + \delta\right) \quad \text{na } EO.$$

W obszarze AIO mamy nadal stan jednorodny (6.6). Znana charakterystyka IO oraz warunek (6.13) formułują zwyrodniały problem charakterystyczny, którego rozwiązaniem jest stan z wachlarzem biegunowym

$$(6.14) \quad \sigma = -K_- - 2K_-(\theta - \theta_{Io}), \quad -\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leq \theta \leq -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} + \delta\right) \quad \text{w } IEO.$$

Dla obszaru mocniejszego otrzymujemy na podstawie (5.5) i (5.6) problem Cauchy'ego, którego rozwiązaniem jest stan jednorodny:

$$(6.15) \quad \sigma = -K_- - 2K_-\left(\gamma - \delta - \frac{\pi}{4}\right) - K_+(1 - \eta^2)^{1/2}, \quad \text{w } EFO,$$

$$\theta = \kappa - \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} - \delta$$

gdzie κ jest określone przez wzór (5.7)

(11) Podobnie na rys. (2.20) oznaczamy wszystkie pozostałe rozwiązania.

Podobnie jak w rozwiązaniu poprzednim otrzymujemy w *FGO*, *GBO* stany (6.9), (6.10). Obciążenie graniczne wynosi

$$(6.16) \quad p_2 = K_+ \left\{ (1+\eta) + \eta \left[2(\gamma-\delta) - \frac{\pi}{2} \right] + (1-\eta^2)^{1/2} + \left(2\delta - \frac{\pi}{2} - \arccos \eta \right) \right\},$$

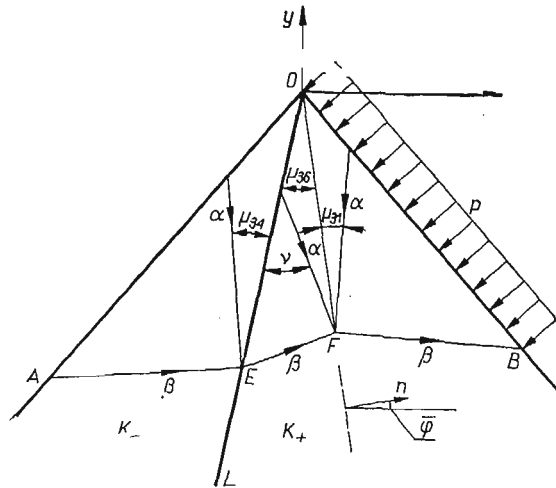
a więc jest liniową funkcją δ, γ .

Zakres słuszności przedstawionego rozwiązania określają nierówności

$$(6.17) \quad \mu_{21} = (\gamma-\delta) - \frac{\pi}{4} \geq 0, \quad \mu_{24} = \delta - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta \geq 0.$$

Rozwiązanie 3, rys. 2.10. Gdy w rozwiązaniu 1 wyrażenie określające kąt rozwarcia wahlarza biegunowego *FOG* staje się ujemne, to rozwiązanie ciągłe po obu stronach linii kontaktu nie istnieje. Należy mniemać, że w części silniejszej pojawia się linia nieciągłości naprężeń.

Układ charakterystyk odpowiadający rozwiązaniu nieciągłemu podany jest na rys. 2.10. W obszarze *AOE*, *EOF*, *FOB* stan naprężenia określają nadal wzory (6.6), (6.7) i (6.10).



Rys. 2.10

Na linii nieciągłości zachodzą warunki (5.5), (5.6), w których należy przyjąć $K_v = K_\mu = K_+$, $\psi_v = \theta_v - \varphi$ oraz $n = -1$ [θ_v, σ_v są określone wzorami (6.7), θ_μ, σ_μ wzorami (6.10)].

Z warunku na skok kąta nachylenia charakterystyk α_-, α_+ obliczamy kąt $\bar{\varphi}$ określający położenie linii nieciągłości *FO*, co daje

$$(6.18) \quad \bar{\varphi} = -\frac{1}{2} (\mu_{34} - \nu),$$

gdzie μ_{34} określone jest przez wzór (6.20), zaś ν przez wzór (6.8).

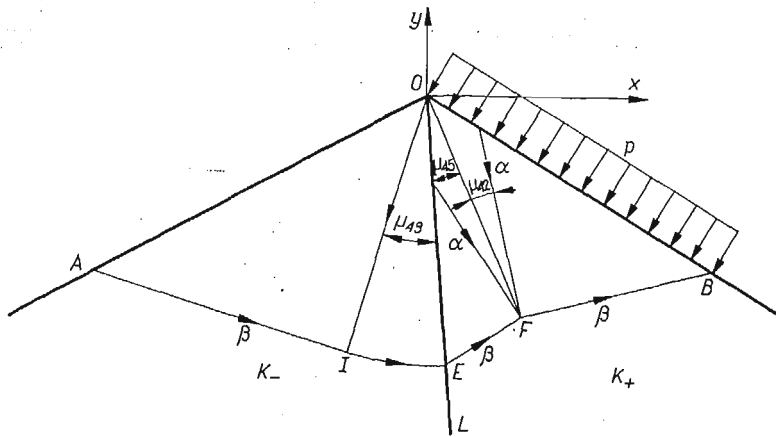
Z warunku na skok ciśnienia średniego obliczamy wartość obciążenia granicznego

$$(6.19) \quad p_3 = K_+ \left\{ (1+\eta) - \eta \cos 2(\gamma-\delta) + [1-\eta^2 \sin^2 2(\gamma-\delta)]^{1/2} - 2 \sin \left[-\delta + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos (\eta \sin 2(\gamma-\delta)) \right] \right\}.$$

Podane rozwiązanie jest słuszne, gdy zachodzą nierówności

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \mu_{31} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{4} - \delta + \frac{1}{2} \arccos(\eta \sin 2(\gamma - \delta)) \right\} \geq 0, \\ \mu_{34} &= \frac{\pi}{4} - (\gamma - \delta) \geq 0, \\ \mu_{36} &= \frac{1}{2} \left[\delta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos(\eta \sin 2(\gamma - \delta)) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie 4, rys. 2.11. Gdy w rozwiązaniu 2 wyrażenie określające kąt rozwarcia wachlarza biegunowego FOG staje się ujemne lub w rozwiązaniu 3 wyrażenie określające kąt μ_{34} staje się ujemne, wtedy układ charakterystyk przybiera postać przedstawioną na rys. 2.11.



Rys. 2.11

Naprężenia w obszarach AIO , IEO , EOF , FOB określone są odpowiednio przez wzory (6.6), (6.14), (6.15) i (6.10).

Podobnie jak w rozwiązaniu poprzednim z warunków ciągłości na FO (5.5) (5.6) wyznaczamy kąt $\bar{\varphi}$ określający położenie linii nieciągłości

$$(6.21) \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2} (\mu_{43} + \kappa)$$

oraz wartość obciążenia granicznego

$$(6.22) \quad p_4 = K_+ \left\{ (1 + \eta) + \eta \left[2(\gamma - \delta) - \frac{\pi}{2} \right] + (1 - \eta^2)^{1/2} - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \delta + \frac{1}{2} \arccos \eta \right) \right\}.$$

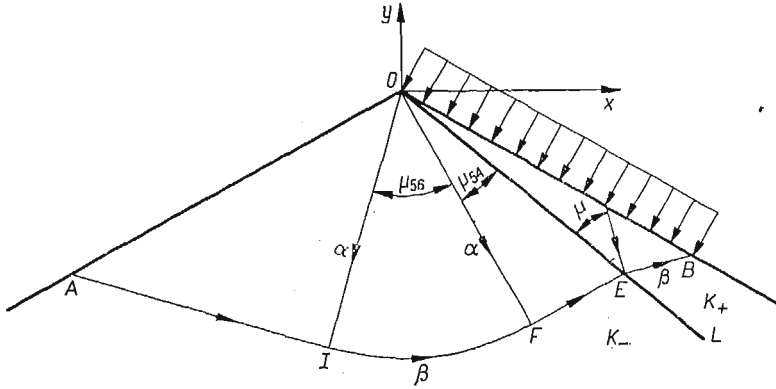
Rozwiązanie obowiązuje, gdy zachodzą nierówności

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \mu_{42} &= \frac{\pi}{4} - \delta + \frac{1}{2} \arccos \eta \geq 0, & \mu_{43} &= (\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} \geq 0, \\ \mu_{45} &= \frac{1}{2} \left(\delta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \eta \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Gdy $\mu_{45} = 0$ linia nieciągłości naprężeń FO pokrywa się z linią kontaktu. Otrzymujemy wyjątkową sytuację, gdy linia kontaktu jest linią nieciągłości drugiego rodzaju.

Rozwiązanie 5, rys. 2.12. Gdy $\mu_{45} < 0$ otrzymujemy możliwość zbudowania rozwiązania, w którym pole naprężeń jest znów ciągłe po obu stronach linii kontaktu.

Rozprężenia w obszarach AIO , IFO , EBO określone są odpowiednio przez wzory (6.6), (6.14) i (6.10).



Rys. 2.12

Z warunku określającego wielkość skoku kąta θ na linii kontaktu (5.6) wyznaczamy θ_{FEO} . W tym celu należy we wzorze (5.6) z uwzględnieniem (4.11) przyjąć $\theta^\mu = \theta_{EBO} + \pi$, $\theta^\nu = \theta_{FEO} + \pi$, $\varphi = \frac{\gamma}{2} - \delta$. Jednocześnie z warunku

$$(6.24) \quad \sigma_{AIO} + 2K - \theta_{AIO} = \sigma_{FEO} + 2K - \theta_{FEO}$$

wyznaczamy ciśnienie średnie w strefie FEO . Po wykonaniu rachunków otrzymujemy

$$(6.25) \quad \sigma = -K - 2K \left[(\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right],$$

w FEO .

$$\theta = \frac{\gamma}{2} - \delta - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta}$$

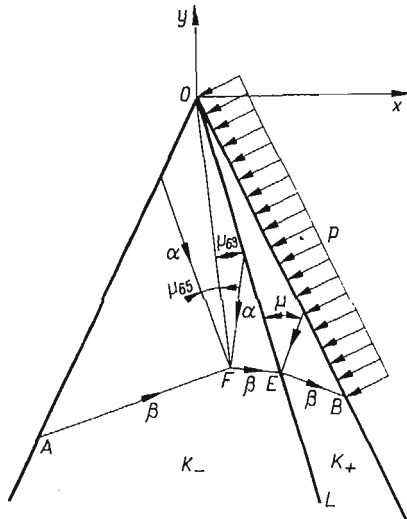
Z drugiego warunku na linii kontaktu (5.5) określamy wielkość obciążenia granicznego:

$$(6.26) \quad p_5 = K_+ \left\{ (1 + \eta) - \cos 2\delta + (\eta^2 - \sin^2 2\delta)^{1/2} + 2\eta \left[(\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \right\}.$$

Zakres słuszności rozwiązania określają nierówności

$$(6.27) \quad \mu_{54} = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \geq 0, \quad \mu_{56} = (\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \geq 0.$$

Rozwiązanie 6 (rys. 2.13). Gdy w rozwiązaniu 3 mamy $\mu_{30} = 0$, to podobnie jak dla $\mu_{45} = 0$ linia kontaktu jest linią nieciągłości drugiego rodzaju. Dla $\mu_{30} < 0$ linia nieciągłości naprężeń przebiega wewnątrz obszaru słabszego. To samo ma miejsce w rozwiązaniu 5 dla $\mu_{50} < 0$. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie przedstawione na rys. 2.13.



Rys. 2.13

Naprężenia w obszarach AFO i EBO określone są przez zależności (6.6), (6.10). Z warunków na linii kontaktu (5.5) i (5.6) otrzymujemy

$$(6.28) \quad \sigma = -p + K_+ - K_+ \cos 2\delta + K_- \left(1 - \frac{\sin^2 2\delta}{\eta^2}\right)^{1/2},$$

$$\theta = \frac{\gamma}{2} - \delta - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \quad \text{w } EFO.$$

Korzystając ze związków (5.5) i (5.6), w których należy przyjąć $K_v = K_\mu = K_-$, $\theta^v = \theta_{AFO}$, $\theta^\mu = \theta_{EFO}$, $n = 1$, obliczamy kąt $\bar{\varphi}$, określający położenie linii nieciągłości:

$$(6.29) \quad \bar{\varphi} = -\frac{1}{2} \left(\delta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right)$$

oraz wielkość obciążenia granicznego

$$(6.30) \quad p_0 = K_+ \left\{ (1 + \eta) - \cos 2\delta + (\eta^2 - \sin^2 2\delta)^{1/2} - 2\eta \cos \left[(\gamma - \delta) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \right\}.$$

Rozwiązanie jest słuszne, gdy zachodzą nierówności:

$$(6.31) \quad \mu_{03} = \frac{1}{2} \left[(\gamma - \delta) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \geq 0,$$

$$\mu_{55} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - (\gamma - \delta) + \frac{1}{2} \arccos \frac{\sin 2\delta}{\eta} \right] \geq 0.$$

Posługując się wzorami (5.6) można bez trudu dla wszystkich rozwiązań 1, ..., 6 znaleźć naprężenia w układzie biegunowym.

C. *Rozwiązania dla prędkości.* Aby wykazać, że znalezione rozwiązania 1, ..., 6 są kinematycznie dopuszczalne, wystarczy dla każdego z nich wskazać jedno rozwiązanie równań H. GEIRINGER (4.14) spełniające warunek brzegowy (6.4) oraz postulat nieujemności mocy dyssypacji w każdym punkcie obszaru uplastycznienia (tzn. postulat $\lambda \geq 0$).

W poniższych wywodach chcemy osiągnąć ogólniejszy cel, mianowicie *chcemy dla każdego z rozwiązań 1, ..., 6 wskazać wszystkie dopuszczalne rozkłady prędkości przemieszczeń.* Przy tej sposobności ujawniona zostanie zasadnicza różnica między grupą rozwiązań 1, 2 a grupą rozwiązań 3, 4, 5, 6.

Otrzymane rozwiązania zawierają obszary o różnych siatkach charakterystyk. Przy rozwiązywaniu równań H. GEIRINGER (4.14) oraz obliczaniu prędkości odkształceń umówimy się przyjmować układy współrzędnych w poszczególnych obszarach w następujący jednolity sposób. W obszarach, w których $\theta = \text{const}$, przyjmujemy układy współrzędnych kartezjańskich o kierunkach pokrywających się z kierunkami charakterystyk α, β i o wspólnym początku w punkcie O . W obszarach wachlarzy biegunowych przyjmujemy układy współrzędnych biegunowych o wspólnym biegunie O , przy czym α jest współrzędną radialną, zaś β współrzędną kątową.

Gdy charakterystyki α, β tworzą siatkę kartezjańską, to, jak wiadomo (por. np. [20]), wobec $\theta = \text{const}$ równania (4.14) mają rozwiązania w postaci

$$(6.32) \quad V_{\alpha}^{\#} = B(\beta), \quad V_{\beta} = A(\alpha).$$

Dla siatek biegunowych, przyjmując β jako współrzędną kątową, otrzymujemy rozwiązania równań (4.14) w postaci

$$(6.33) \quad V_{\alpha} = -B'(\beta), \quad V_{\beta} = B(\beta) + A(\alpha).$$

Rozwiązywanie problemów brzegowych dla równań (4.14) będzie polegać w naszym przypadku na wyznaczeniu funkcji $A(\alpha), B(\beta)$.

Prawo płynięcia Misesa (4.6) odniesione do siatki charakterystyk ($\theta \equiv \varphi$) ma postać $\epsilon_{\alpha\beta} = \lambda\sigma_{\alpha\beta}$, ($\epsilon_{\alpha\alpha} = \epsilon_{\beta\beta} = 0$). Wobec przyjętych umów o kierunkach linii α, β i o układach współrzędnych mamy $\sigma_{\alpha\beta} = +K$. Zatem *postulat nieujemności mocy dyssypacji, $\lambda \geq 0$, jest równoważny postulatowi $\epsilon_{\alpha\beta} \geq 0$.*

Od dawna wiadomo, że w płaskim stanie odkształcenia ośrodka idealnie plastycznego pole wektorowe prędkości przemieszczeń może być nieciągłe na charakterystykach. Z formalnego punktu widzenia oznacza to, że w takich przypadkach rozwiązania równań (4.5)–(4.7) mają charakter rozwiązań uogólnionych. W związku z tym z wielu stron padały głosy o konieczności zastosowania w tych przypadkach teorii funkcji uogólnionych (teorii dystrybucji), jednakże, jak się wydaje, prób realizacji tego projektu dotychczas nie robiono. W niniejszej części pracy zostaną użyte najprostsze i dobrze znane dystrybucje: jednostkowa funkcja Heaviside'a $H(x)$ oraz funkcja Diraca $\delta(x)$. Są one bardzo przydatne ujawniając sens mechaniczny rozwiązań i przyczyniając się do zawartości i przejrzystości wywodów.

Dla kompletności wywodów przytoczymy wszystkie własności dystrybucji $H(x)$, $\delta(x)$, które będą przez nas wykorzystane⁽¹²⁾ (por. np. [24]):

$$(6.34) \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} \quad H(ax) = H(x),$$

$$\delta(x) = H'(x), \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad \delta(-x) = \delta(x),$$

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad \int_a^b f(x)\delta(x) dx = f(0), \quad (a < 0, b > 0),$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną.

Rozpatrzmy dowolną funkcję $F(\xi)$ określoną dla $\xi \geq 0$, przy czym $F(\xi) = 0$ dla $\xi > l$, o skończonej ilości punktów nieciągłości i skończonej ilości punktów nieciągłości pochodnej $F'(\xi)$ w przedziale $(0, l)$. Skoki funkcji $F(\xi)$ w punktach ξ^v ($v = 1, \dots, n$, $\xi^v < \xi^{v+1}$, $\xi^n < l$) oznaczmy przez Δ_v , zaś skoki pochodnej $F'(\xi)$ w punktach $\bar{\xi}^\mu$ ($\mu = 1, \dots, m$) oznaczmy przez h_μ . Umowa o znakach tych wielkości wynika z definicji

$$(6.35) \quad \Delta_v \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} [F(\xi^v + \varepsilon) - F(\xi^v - \varepsilon)], \quad h_\mu \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} [F'(\bar{\xi}^\mu + \varepsilon) - F'(\bar{\xi}^\mu - \varepsilon)].$$

Funkcja $F(x)$ może być przedstawiona w postaci (por. np. [24])

$$(6.36) \quad F(\xi) = f(\xi)H(l-\xi) - \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\xi^v - \xi),$$

gdzie $f(\xi)$ jest funkcją ciągłą, zdefiniowaną przez tę zależność. Wzór ten ma prostą interpretację geometryczną, przedstawioną na rys. 2.14; pierwszy człon jest częścią ciągłą funkcji $F(x)$, drugi zaś człon stanowi część schodkową tej funkcji. Zwracamy uwagę na to, że ze względu na późniejsze zastosowania funkcja $f(\xi)$ została tak dobrana, że

$$(6.37) \quad F(l) = f(l), \quad F(0) = f(0) - \sum_{v=1}^n \Delta_v,$$

jak również na fakt, że nie interesuje nas półoś $\xi < 0$.

Pochodna funkcji $F(\xi)$ zgodnie z (6.34) jest równa

$$(6.38) \quad F'(\xi) = f'(\xi)H(l-\xi) - f(l)\delta(l-\xi) + \sum_{v=1}^n \Delta_v \delta(\xi^v - \xi).$$

⁽¹²⁾ Według niedokładnego określenia przyjętego w fizyce « $\delta(x)$ jest funkcją równą zeru wszędzie z wyjątkiem punktu $x = 0$, gdzie ma ona wartość ∞ , przy czym całka $\int_a^b \delta(x) dx$, $a < 0$, $b > 0$, jest równa 1».

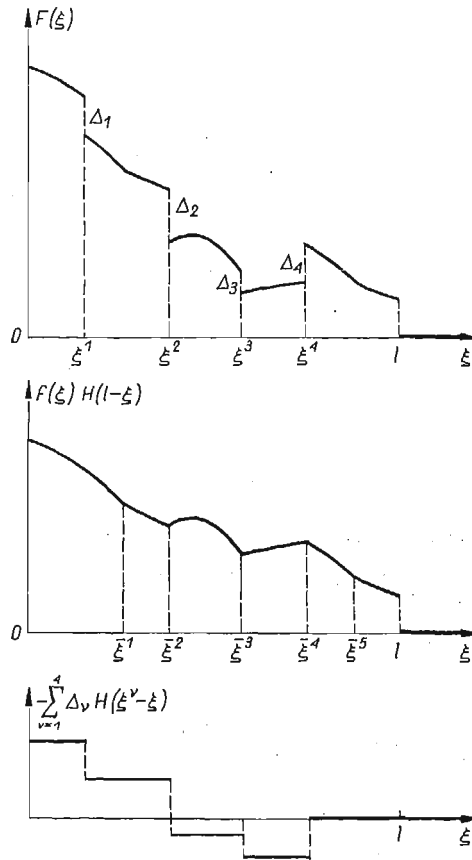
Określenie to pozwala na łatwe intuicyjne uchwycenie sensu mechanicznego dalszych rachunków.

We wzorach na prędkość symbol δ oznaczać będzie zawsze δ -funkcję Diraca (a nie kąt rozwarcia strefy mocniejszej!).

Pochodna $f'(\xi)$ jest nieciągła w punktach $\bar{\xi}^\mu$. Używając rozkładu analogicznego do (6.36) można napisać

$$(6.39) \quad f'(\xi) = \bar{\varphi}'(\xi)H(l-\xi) - \sum_{\mu=1}^m h_\mu H(\bar{\xi}^\mu - \xi),$$

gdzie $\varphi'(\xi)$ jest funkcją ciągłą.



Rys. 2.14

Rozwiązanie 1 (rys. 2.15). Klasę dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń uzależnimy od rozkładu składowej normalnej wektora prędkości na brzegu obciążonym, tzn. od

$$(6.40) \quad V_{\alpha} |_{OB} = F(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq l,$$

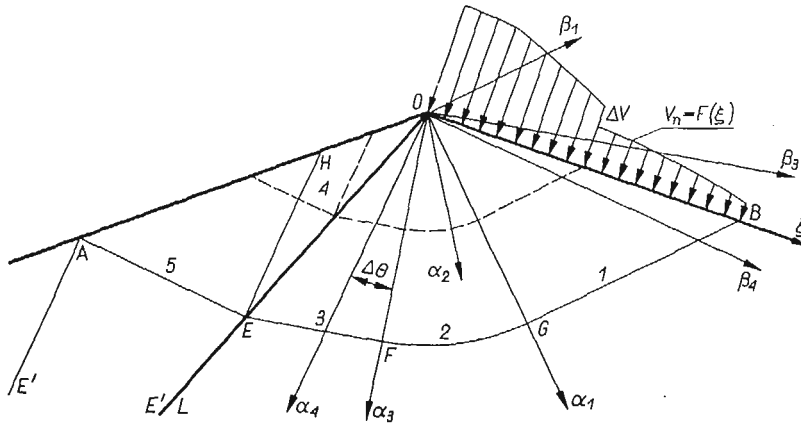
gdzie ξ jest długością na OB mierzoną od punktu O .

W poszczególnych obszarach przyjmujemy układy współrzędnych pokazane na rys. 2.15.

Zakładamy, że $f(\xi)$ jest funkcją odcinkowo-ciągłą o odcinkowo-ciągłej pochodnej⁽¹³⁾ i zastosujemy jej reprezentację (6.36).

Warunki brzegowe

$$(6.41) \quad \begin{aligned} V_{\alpha}|_{OB} - V_{\beta}|_{OB} &= \sqrt{2} \left\{ f(\xi) H(l - \xi) - \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\xi^v - \xi) \right\}, \\ V_{\alpha}|_{8GFE} &= 0 \end{aligned}$$



Rys. 2.15

formułują mieszany problem brzegowy dla równań (4.14) w obszarze składającym się ze stref 1, 2, 3. Korzystając z (6.32) oraz z równości $\xi = \sqrt{2} a_1|_{OB}$ otrzymujemy jego rozwiązanie w postaci

$$(6.42) \quad \begin{aligned} V_{\alpha}^i &= 0, \\ V_{\beta}^i &= -\sqrt{2} f(\sqrt{2} a_i) H(a - a_i) + \sqrt{2} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(a_i^v - a_i), \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie a_1, a_2 mają sens współrzędnych w układach kartezjańskich, a a_3 jest współrzędną w układzie biegunowym, $a = \frac{\sqrt{2}}{2} l$, $a^v = \sqrt{2} \xi^v$.

Ponieważ linia kontaktu L nie ma w żadnym punkcie kierunku charakterystycznego, wektor prędkości jest na niej ciągły (złączenie nie jest «zniszczone»). Otrzymujemy poprawnie postawiony na OE problem brzegowy Cauchy'ego dla obszaru 4 i następnie problem Riemanna dla obszaru 5.

Zastosujemy w tym przypadku oraz w dalszych rozwiązaniach następujący sposób formalny. Rozszerzamy obszar AEO przez dołączenie strefy sztywnej AEE' , gdzie E' jest punktem przecięcia linii kontaktu z prostą poprowadzoną z punktu A i mającą kierunek charakterystyki α . Rozwiązanie (6.42) zostało tak napisane, że obowiązuje w całej części

⁽¹³⁾ Wydaje się, że z punktu widzenia mechaniki rozpatrywanie jeszcze ogólniejszych rozkładów prędkości na OB nie ma sensu.

silniejszej klina, dając (ze względu na użyte funkcje Heaviside'a) w obszarze sztywnym $V_\alpha = V_\beta = 0$. Możemy zatem dla całego obszaru rozszerzonego AOE' sformułować problem Cauchy'ego [por. związki (5.13)]

$$(6.43) \quad V_{\alpha'}^{\beta'} = -V_{\beta'}^{\alpha'} \sin \Delta\theta, \quad V_{\beta'}^{\alpha'} = V_{\alpha'}^{\beta'} \cos \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \nu - \mu_{12}.$$

Uwzględniając związki

$$(6.44) \quad \alpha_3^{\beta'} = \alpha_4^{\beta'} \cos \Delta\theta + \beta_4^{\beta'} \sin \Delta\theta = \frac{a}{\alpha_4^E} \alpha_4^{\beta'} = \frac{a}{\beta_4^E} \beta_4^{\beta'}$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\cos \mu_{12}}{\cos \nu}, \quad \beta_4^E = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\sin \mu_{12}}{\cos \nu},$$

oraz (6.32), otrzymujemy rozkład prędkości w części słabszej w postaci

$$(6.45) \quad V_\alpha = \sqrt{2} f \left(l \frac{\beta_4}{\beta_4^E} \right) \sin \Delta\theta H(\beta_4 - \beta_4^E) - \sqrt{2} \sin \Delta\theta \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\beta_4 - \beta_4^v),$$

$$V_\beta = -\sqrt{2} f \left(l \frac{\alpha_4}{\alpha_4^E} \right) \cos \Delta\theta H(\alpha_4^E - \alpha_4) + \sqrt{2} \cos \Delta\theta \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_4^v - \alpha_4).$$

W strefie 5 wobec $\beta_4 - \beta_4^E < 0$ pierwszy wzór daje $V_\alpha = 0$, a w strefie dołączonej AEE' wobec $\beta_4 - \beta_4^E < 0$, $\alpha_4^E - \alpha_4 < 0$ otrzymujemy $V_\alpha = V_\beta = 0$.

Otrzymane pole wektorowe prędkości jest nieciągłe. Jak widać z (6.42), (6.45) prędkość $V_n^B = f(l) \neq 0$ powoduje powstanie nieciągłości składowej V_β na liniach $\alpha_i = a$, $i = 1, 2, 3$ ($BGFE$), $\alpha_4 = \alpha_4^E$ (EA) oraz nieciągłości składowej V_α na linii $\beta_4 = \beta_4^E$ (EH). Analogiczne linie nieciągłości $\alpha_i = \sqrt{2} \xi^v$, $\alpha_4 = \alpha_4^v$, $\beta_4 = \beta_4^v$ są spowodowane przez każdy skok Δ_v prędkości normalnej V_n^{β} (rys. 2.15).

Prędkości odkształceń postaciowych w poszczególnych obszarach wynoszą

$$(6.46) \quad 2\epsilon_{\alpha\beta}^1 = V_{\beta,\alpha}^1 = -2f'(\sqrt{2}\alpha_i)H(a-a_i) + \sqrt{2}f(l)\delta(a-a_i) - \sqrt{2} \sum_{v=1}^h \Delta_v \delta(\alpha_i^v - \alpha_i) \equiv \psi(\alpha_i), \quad i = 1, 3,$$

$$2\epsilon_{\alpha\beta}^2 = V_{\beta,\alpha_2}^2 - \frac{V_\beta^2}{\alpha_2} = \psi(\alpha_2) + \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \sqrt{2}f(\sqrt{2}\alpha_2)H(a-\alpha_2) - \sqrt{2} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_2^v - \alpha_2) \right\},$$

$$2\epsilon_{\alpha\beta}^{4,3} = V_{\alpha,\beta_4} + V_{\beta,\alpha_4} = \left[\sqrt{2} \frac{l}{\beta_4^E} \sin \Delta\theta f' \left(l \frac{\beta_4}{\beta_4^E} \right) H(\beta_4 - \beta_4^E) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{2} \frac{l}{\alpha_4^E} \cos \Delta\theta f' \left(l \frac{\alpha_4}{\alpha_4^E} \right) H(\alpha_4^E - \alpha_4) \right] + \sqrt{2}f(l) [\delta(\beta_4 - \beta_4^E) + \delta(\alpha_4^E - \alpha_4)] -$$

$$- \sqrt{2} \sum_{v=1}^n \Delta_v [\sin \Delta\theta \delta(\beta_4 - \beta_4^v) + \cos \Delta\theta \delta(\alpha_4^v - \alpha_4)].$$

Wzory te mają proste i wygodne interpretacje mechaniczne. Wyrazy zawierające pochodną «ciągłej części» rozkładu prędkości $V_n|_{OB} = F(\xi)$ (por. rys. 2.14), tzn. funkcję $f'(\xi)$, przedstawiają rozkład prędkości odkształceń w odpowiednich obszarach, wyrazy zawierające δ -funkcje przedstawiają nieskończenie wielkie prędkości ścinania na liniach nieciągłości wektora prędkości.

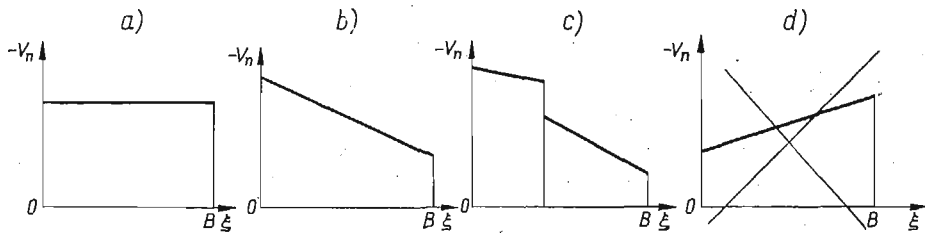
Wzory (6.46) pozwalają również na poprawne sformułowanie ograniczeń, które nakłada na funkcję $F(\xi)$ warunek nieujemności mocy dyspozycji $a_{\alpha\beta} \geq 0$. Istotnie, będzie on spełniony w obszarach i na liniach nieciągłości wtedy i tylko wtedy, gdy⁽¹⁴⁾

$$(6.47) \quad f(l) \geq 0, \quad \prod_{\xi} f'(\xi) \leq 0, \quad \prod_{\nu} \Delta_{\nu} \leq 0,$$

przy czym znak równości nie może mieć miejsca jednocześnie we wszystkich związkach.

Warunki te oznaczają, że rozkład prędkości normalnej na OB musi być dodatnią nierosnącą funkcją ξ .

Klasa dopuszczalnych rozkładów prędkości dla rozwiązania 1 została więc w pełni określona przez wzory (6.42), (6.45) i (6.47). Klasa ta jest bardzo obszerna. Wskażemy następujące przypadki szczególnie (rys. 2.16): a) gładki stempel wciskany ruchem postę-



Rys. 2.16

powym, b) gładki stempel wciskany ruchem postępowym z jednoczesnym obrotem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, c) kilka gładkich stempli oddziałujących jak w p. b), przy $\Delta_{\nu} \leq 0$. Zatem rozwiązanie 1, zbudowane dla klina obciążonego ciśnieniem bocznym, stanowi jednocześnie rozwiązanie wszystkich powyższych i wielu innych zadań. Łatwo wskazać jednocześnie zadania pokrewne, dla których rozwiązanie 1 nie jest poprawne ze względu na ujemność dysypacji mocy (mimo spełnienia wszystkich warunków kinematycznych i statycznych), np. zadanie o gładkim stemplu obracającym się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 2.16d).

Zauważmy jeszcze, że dla $f(l) = \Delta_{\nu} = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) wzory na prędkość odkształceń nie zawierają δ -funkcji, co odpowiada ciągłości pola prędkości przemieszczeń. Dla $f'(\xi) \equiv 0$ wzory na odkształcenia w obszarach 1, 3, 4, 5 zawierają same δ -funkcje; w chwili odpowiadającej początkowi ruchu plastycznego obszary te zostają podzielone liniami nieciągłości prędkości na części zaczynające się poruszać jak ciała sztywne; gdy jest

⁽¹⁴⁾ Symbol \prod_x oznacza kwantyfikator ogólny i powinien być czytany «dla każdego x ».

dotatkowo $\prod_v \Delta_v = 0$, mamy przykład z rys. 2.16, a ruch plastyczny jest taki jak w zadaniu omówionym w p. 7.

Rozwiązanie 2 (rys. 2.17). Rozwiązanie w obszarach 1, 2, 3 pokrywa się z rozwiązaniem określonym poprzednio (6.42).

Linia kontaktu jest charakterystyką dla słabszej części, a więc wektor prędkości może być dla niej nieciągły. Warunki brzegowe

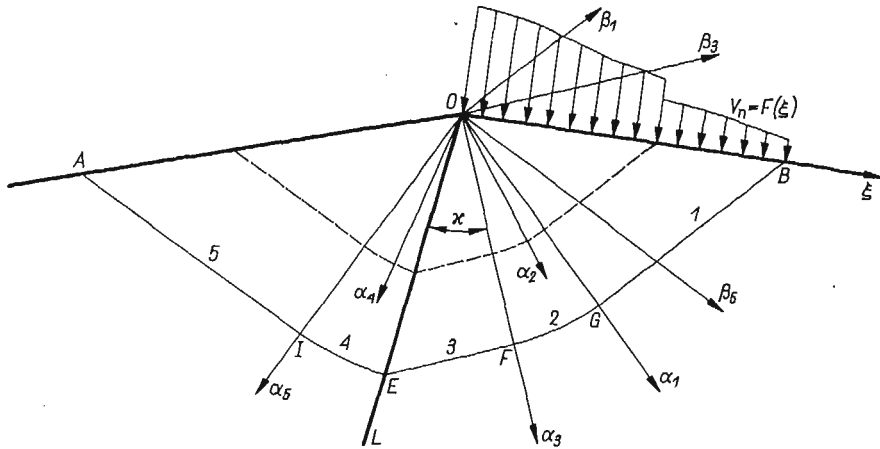
$$(6.48) \quad V_{\beta}^- |_{OE} = V_{\beta}^3 |_{OE} \cos \kappa, \quad V_{\alpha} |_{EIA} = 0$$

formułują problem charakterystyczny w obszarze składającym się ze stref 4, 5. Korzystając z (6.33), (6.32), (6.42) oraz związku $\alpha_4 |_{OE} = \frac{1}{\cos \kappa} \alpha_3 |_{OE}$ otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$(6.49) \quad V_{\alpha}^i = 0, \quad V_{\beta}^i = -\sqrt{2}f \left(l \frac{\alpha_i}{\alpha_4^E} \right) \cos \kappa H(\alpha_4^E - \alpha_i) + \sqrt{2} \cos \kappa \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_4^v - \alpha_i),$$

$i = 4, 5.$

Każdemu skokowi Δ_v , odpowiada skok składowej V_{β} wzdłuż odpowiedniej załamanej charakterystyki β (rys.2.17.)



Rys. 2.17

Istotnym jakościowym zjawiskiem w podanym rozwiązaniu jest nieciągłość prędkości na linii kontaktu L («zniszczenie» złącza). Wielkość skoku wynosi

$$(6.50) \quad |\Delta V| = -V_{\beta}^3 |_{OE} \sin \kappa = \sqrt{2}f \left(l \frac{\alpha_1}{\alpha_4^E} \right) \sin \kappa H(\alpha_4^E - \alpha_4) - \sqrt{2} \sin \kappa \sum \Delta_v H(\alpha_4^v - \alpha_4),$$

jest więc zmienna i nie znika dla żadnej funkcji $F(\xi)$, jeżeli $\sin \kappa \neq 0$. Aby móc formalnie włączyć ten skok do pola prędkości przemieszczeń, a następnie w postaci δ funkcji do $\epsilon_{\alpha\beta}^4$, należy napisać

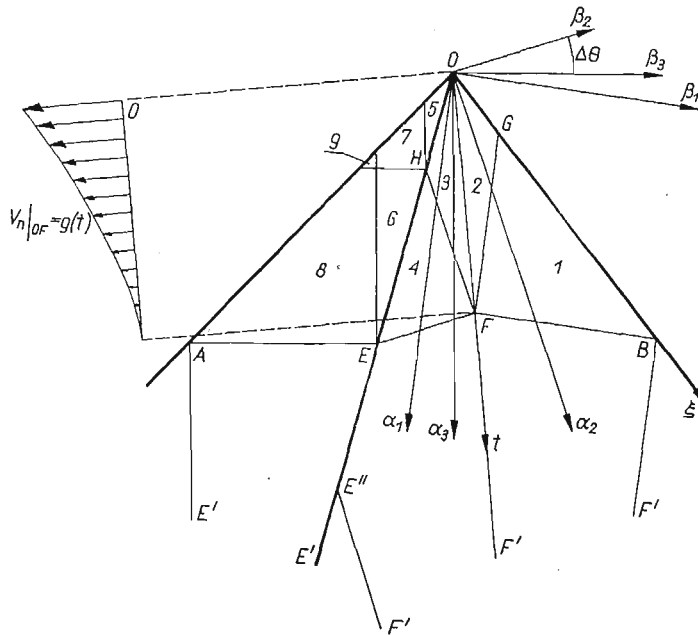
$$(6.51) \quad V_{\alpha}^4 = |\Delta V|_{OE} H(\beta_4),$$

gdzie β_4 jest kątem w wachlarzu 4 liczonym od OE w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara. Wtedy mamy

$$(6.52) \quad 2\epsilon_{\alpha\beta}^4 = \frac{1}{\alpha_4} V_{\alpha,\beta_4}^4 + V_{\beta,\alpha_4}^4 - \frac{1}{\alpha_4} V_{\beta}^4 = \Delta \mathbf{V} |_{OE} \delta(\beta_4) + \dots$$

Łatwo stwierdzić, że dla $F(\xi)$ spełniającej warunki (4.47) $\epsilon_{\alpha\beta}^4 > 0$, $\epsilon_{\alpha\beta}^5 > 0$. Uwagi poczynione w odniesieniu do rozwiązania 1 obowiązują i dla rozwiązania 2.

Rozwiązanie 3 (rys. 2.18). Rozwiązanie 3 zawiera linię nieciągłości naprężeń w obszarze silniejszym. Nakłada to dodatkowe ograniczenia na możliwą kinematykę ruchu. Istotnie, do warunku brzegowego (6.4) dołączyć musimy warunek znikania skła-



Rys. 2.18

dowej stycznej wektora prędkości na linii nieciągłości naprężeń (por. np. [20]). Ze względu na to należy spodziewać się *a priori*, że klasa dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń będzie węższa od klasy określonej przez warunki (6.47).

W charakterze funkcji, od której uzależnimy prędkości V_α , V_β , wygodniej będzie przyjąć rozkład składowej normalnej wektora prędkości na linii nieciągłości naprężeń FO , a nie na brzegu OB . Wtedy dla dziewięciu obszarów zaznaczonych na rys. 2.18 otrzymujemy kolejno: 2, 3 — problemy Cauchy'ego, 1, 4 — problemy charakterystyczne, 5, 6 — problem Cauchy'ego, 7, 8, 9 — problemy charakterystyczne, przy czym w każdym z obszarów 1, ..., 9 prędkości będą wyrażone różnymi wzorami. W celu uproszczenia rachunku stosujemy sposób formalny, polegający na dołączeniu do obszarów plastycznych części sztywnych BFF' , $E''EFF'$, AEE' gdzie BF' , $F'E''$, AE' są prostymi o kierunku odpowied-

nich charakterystyk, FF' jest przedłużeniem linii nieciągłości, a EE' przedłużeniem linii kontaktu.

Na przedłużonej linii nieciągłości OF' mamy dane

$$(6.53) \quad \begin{aligned} V_t|_{OF'} &= 0, \\ V_n|_{OF'} &= G(t) = g(t)H(h-t) - \sum_{v=1}^n \Delta_v H(t^v-t), \end{aligned}$$

gdzie t jest odległością na FO mierzoną od punktu O , a V_n jest skierowane jak na rys. 2.18, $h = \overline{OF} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \mu_{31}} l$.

Dla rozszerzonych obszarów OBF' (indeks r) i $OE'F'$ (indeks l) mamy sformułowane problemy Cauchy'ego

$$(6.54) \quad \begin{aligned} V_{\alpha}^r|_{F'O} &= V_n|_{F'O} \sin \mu_{31}, & V_{\beta}^r|_{F'O} &= -V_n|_{F'O} \cos \mu_{31}, \\ V_{\alpha}^l|_{F'O} &= -V_n|_{F'O} \sin \mu_{31}, & V_{\beta}^l|_{F'O} &= -V_n|_{F'O} \cos \mu_{31}. \end{aligned}$$

Korzystając z zależności (6.32) oraz ze związków

$$(6.55) \quad t = h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} = h \frac{\beta_1}{\beta_1^F}, \quad \alpha_1^F = h \cos \mu_{31}, \quad \beta_1^F = h \sin \mu_{31}$$

otrzymujemy rozwiązanie dla obszarów 1, 2 w postaci

$$(6.56) \quad \begin{aligned} V_{\alpha} &= g \left(h \frac{\beta_1}{\beta_1^F} \right) \sin \mu_{31} H(\beta_1^F - \beta_1) - \sin \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\beta_1^v - \beta_1), \\ V_{\beta} &= -g \left(h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} \right) \cos \mu_{31} H(\alpha_1^F - \alpha_1) + \cos \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v H(\alpha_1^v - \alpha_1). \end{aligned}$$

Prędkości odkształceń w obszarach 1, 2 wyrażają się wzorem

$$(6.57) \quad \begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha\beta} &= g' \left(h \frac{\beta_1}{\beta_1^F} \right) H(\beta_1^F - \beta_1) - g' \left(h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} \right) H(\alpha_1^F - \alpha_1) - g(h) \sin \mu_{31} \delta(\beta_1^F - \beta_1) + \\ &+ g(h) \cos \mu_{31} \delta(\alpha_1^F - \alpha_1) - \sin \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v \delta(\beta_1^v - \beta_1) + \cos \mu_{31} \sum_{v=1}^n \Delta_v \delta(\alpha_1^v - \alpha_1). \end{aligned}$$

Analiza tego wzoru pozwala na proste znalezienie warunków, które musi spełniać rozkład prędkości normalnej na OF , aby w całym obszarze klina zachodziła nierówność $\epsilon_{\alpha\beta} \geq 0$.

Dla $G(h) = g(h) \neq 0$ wyrazy trzeci i czwarty, reprezentujące nieskończenie wielkie odkształcenie postaciowe na liniach nieciągłości prędkości $\beta_1 = \beta_1^F$ (FG) i $\alpha_1 = \alpha_1^F$ (FB), nie mogą być na raz dodatnie, zatem na jednej z tych linii dyssypacja jest ujemna. Inaczej mówiąc, skok składowej V_{α} na FG (dla $g(h) > 0$) lub skok składowej V_{β} na FB (dla $g(h) < 0$) jest niezgodny z kierunkiem działania naprężenia stycznego $\sigma_{\alpha\beta} = +K$. Zatem $V_n(h) = g(h) = 0$.

Do analogicznej sprzeczności w odniesieniu do odpowiednich linii nieciągłości $\beta_1 = \beta_1^y$, $\alpha_1 = \alpha_1^y$ dochodzimy analizując wyrazy piąty i szósty we wzorze (6.57) dla $\Delta_\nu \neq 0$. Zatem $\Delta_\nu = 0$, $\nu = 1, \dots, n$.

Dalej, w obszarze 1 pozostaje tylko drugi wyraz (bowiem $\beta_1^F - \beta_1 < 0$), skąd wnioskujemy, że powinien być spełniony warunek $g' < 0$.

Wreszcie w obszarze 2 suma wyrazów pierwszego i drugiego musi być dodatnia, a ponieważ $\beta_1/\beta_1^F \geq \alpha_1/\alpha_1^F$, to funkcja $g'(t)$ musi być funkcją niemalejącą swego argumentu.

Reasumując stwierdzamy, że warunek nieujemności mocy dyssypacji w każdym punkcie obszaru uplastycznienia jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład prędkości normalnej na OF (4.53) spełnia warunki

$$(6.58) \quad g(h) = 0, \quad \prod_\nu \Delta_\nu = 0, \quad \prod_l g'(t) \leq 0, \quad \prod_{t, \varepsilon > 0} g'(t + \varepsilon) \geq g'(t).$$

E. H. LEE w pracy [23] wykazał dla podobnego zadania, że muszą zachodzić dwa ostatnie warunki (6.58) zakładając ciągłość funkcji $G(t)$ ze względów intuicyjnych, raczej nie budzących wątpliwości. Powyższy dowód formalny ciągłości [dwie równości (6.58)] ilustruje zastosowanie dystrybucji $H(x)$, $\delta(x)$, odślaniając jednocześnie pewne interesujące własności badanych rozwiązań.

Rozwiązanie problemu Cauchy'ego (6.54) dla obszarów 3, 4 i sprawdzenie warunku $\varepsilon_{\alpha\beta} \geq 0$ przebiega podobnie. W rezultacie otrzymamy

$$(6.59) \quad V_\alpha = g \left(h \frac{\beta_1}{\beta_1^F} \right) \sin \mu_{31} H(\beta_1^F - \beta_1), \quad \text{w strefach 1, 2;}$$

$$V_\beta = -g \left(h \frac{\alpha_1}{\alpha_1^F} \right) \cos \mu_{31} H(\alpha_1^F - \alpha_1),$$

$$(6.60) \quad V_\alpha = -g \left(h \frac{\beta_2}{\beta_2^F} \right) \sin \mu_{31} H(\beta_2 - \beta_2^F), \quad \text{w strefach 3, 4.}$$

$$V_\beta = -g \left(h \frac{\alpha_2}{\alpha_2^F} \right) \cos \mu_{31} H(\alpha_2^F - \alpha_2),$$

Dla obszaru rozszerzonego składającego się ze stref 5, 6, 7, 8, 9, AEE' mamy problem brzegowy Cauchy'ego:

$$(6.61) \quad V_\alpha^- \Big|_{OE'} = V_\alpha^+ \Big|_{OE'} \cos \Delta\theta - V_\beta^+ \Big|_{OE'} \sin \Delta\theta, \quad V_\beta^- \Big|_{E'O} = V_\alpha^+ \Big|_{OE'} \sin \Delta\theta + V_\beta^+ \Big|_{OE'} \cos \Delta\theta,$$

$$\Delta\theta = \nu - \mu_{34}.$$

Korzystając z rozwiązań (6.60) oraz ze związków

$$(6.62) \quad \alpha_2 \Big|_{OE'} = \frac{\alpha_2^F}{\alpha_3^F} \alpha_3 \Big|_{OE'} = \frac{\alpha_2^F}{\beta_3^E} \beta_3 \Big|_{OE'}, \quad \alpha_3^E = \frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\cos \mu_{34}}{\cos \nu},$$

$$\beta_3^E = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\sin \mu_{34}}{\cos \nu}, \quad \beta_2 \Big|_{OE'} = \frac{\beta_2^F}{\alpha_3^H} \alpha_3 \Big|_{OE'} = \frac{\beta_2^F}{\beta_3^H} \beta_3 \Big|_{OE'}$$

$$\alpha_3^H = \frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\cos \mu_{34} \operatorname{tg} \mu_{31}}{\sin \nu}, \quad \beta_3^H = -\frac{\sqrt{2}}{2} l \frac{\sin \mu_{34} \operatorname{tg} \mu_{31}}{\sin \nu},$$

łatwo otrzymać

$$(6.63) \quad \begin{aligned} V_\alpha &= -g \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) \sin \mu_{31} \cos \Delta \theta H(\beta_3 - \beta_3^H) + g \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) \cos \mu_{31} \sin \Delta \theta H(\beta_3 - \beta_3^E), \\ V_\beta &= g \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) \sin \mu_{31} \sin \Delta \theta H(\alpha_3^H - \alpha_3) - g \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) \cos \mu_{31} \cos \Delta \theta H(\alpha_3^E - \alpha_3). \end{aligned}$$

w strefach 5, ..., 9.

Wykażemy, że warunki (6.58) zapewniają nieujemność dyssypacji mocy w obszarach 5, ..., 9. Na podstawie (6.63) i (6.62) mamy

$$(6.64) \quad \begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\sin \nu \cos \Delta \theta}{\sin \mu_{34}} g' \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) H(\beta_3 - \beta_3^H) - \frac{\cos \nu \sin \Delta \theta}{\sin \mu_{34}} g' \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) H(\beta_3^E - \beta_3) - \\ &- \frac{\sin \nu \sin \Delta \theta}{\cos \mu_{34}} g' \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) H(\alpha_3^H - \alpha_3) - \frac{\cos \nu \cos \Delta \theta}{\cos \mu_{34}} g' \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) H(\alpha_3^E - \alpha_3). \end{aligned}$$

W wyrażeniu tym nie występuje δ -funkcja, ponieważ $g(h) = 0$ [por. (6.34)], co jest odzwierciedleniem formalnym ciągłości pola prędkości przemieszczeń (6.63). Korzystając ze związku $\Delta \theta = \nu - \mu_{34}$ otrzymujemy

$$(6.65) \quad \begin{aligned} 2\epsilon_{\alpha\beta} &= \sin^2 \nu \left\{ g' \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) H(\beta_3 - \beta_3^H) - g' \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) H(\alpha_3^H - \alpha_3) \right\} + \\ &+ \cos^2 \nu \left\{ g' \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) H(\beta_3 - \beta_3^E) - g' \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) H(\alpha_3^E - \alpha_3) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\nu \operatorname{ctg} \mu_{34} \left\{ g' \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^H} \right) H(\beta_3 - \beta_3^H) - g' \left(h \frac{\beta_3}{\beta_3^E} \right) H(\beta_3 - \beta_3^E) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2\nu \operatorname{tg} \mu_{34} \left\{ g' \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^H} \right) H(\alpha_3^H - \alpha_3) - g' \left(h \frac{\alpha_3}{\alpha_3^E} \right) H(\alpha_3^E - \alpha_3) \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

ze względu na (6.58) oraz z uwagi na to, że 1) dla każdego dwumianu ujętego w nawias pierwszy człon jest «wygaszony» przez funkcję Heaviside'a wcześniej niż drugi, 2) argument pierwszego członu jest większy od argumentu drugiego członu.

Rozkład składowej normalnej prędkości na brzegu obciążonym otrzymujemy ze związków

$$(6.66) \quad V_n \Big|_{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} (V_\alpha \Big|_{OB} - V_\beta \Big|_{OB}), \quad \alpha_1 \Big|_{OB} = \beta_1 \Big|_{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \xi$$

korzystając z rozwiązania (4.59). W ten sposób otrzymujemy

$$(6.67) \quad V_n \Big|_{OB} = f(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ g \left(h \frac{\xi}{\xi^G} \right) \sin \mu_{31} H(\xi^G - \xi) + g \left(h \frac{\xi}{l} \right) \cos \mu_{31} H(l - \xi) \right\},$$

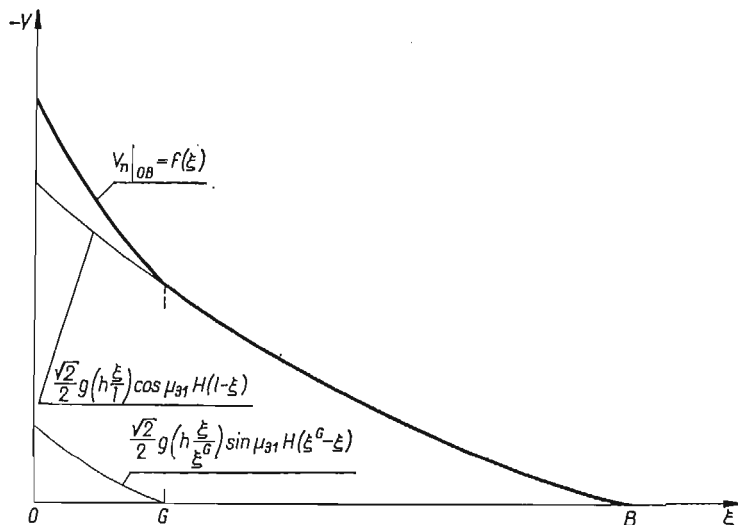
gdzie $\xi^G = l \operatorname{tg} \mu_{31}$. Rozkład ten pokazany jest na rys. 2.19.

Rozwiązania 4, 5, 6. Podobnie można budować pola prędkości dla rozwiązań 4, 5, 6. Odpowiednie zależności podane są w pracy [12]. Ograniczenia na dopuszczalne rozkłady prędkości będą podobne do (6.58).

D. *Omówienie wyników.* Znalezione rozwiązania dla prędkości przemieszczeń wskazują na zasadniczą różnicę między grupą rozwiązań 1, 2 a grupą rozwiązań 3, 4, 5, 6.

Rozwiązaniom z pierwszej grupy odpowiada obszerna klasa dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń, zawierająca pola nieciągłe [por. warunki (4.47)]. W szczególności rozwiązania 1, 2 są słuszne dla przypadku wciskania gładkiego stempla przy $V^0 \geq V^B$.

Rozwiązaniom z drugiej grupy odpowiada znacznie węższa klasa dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń, składająca się z pól ciągłych [por. warunki (6.58)]. W szczególności rozwiązania 3, 4, 5, 6 nie mogą być poprawne dla zadania o wciskaniu stempla. Wynika to ze wzorów typu (6.68) (por. także rys. 2.19).



Rys. 2.19

Na podkreślenie zasługuje specjalna rola, jaką odgrywają rozwiązania odpowiadające punktom A_1 , A_2 na płaszczyźnie $\eta = K_-/K_+ = \text{const.}$ (por. rys. 2.20). Rozwiązania te nazywamy podstawowymi.

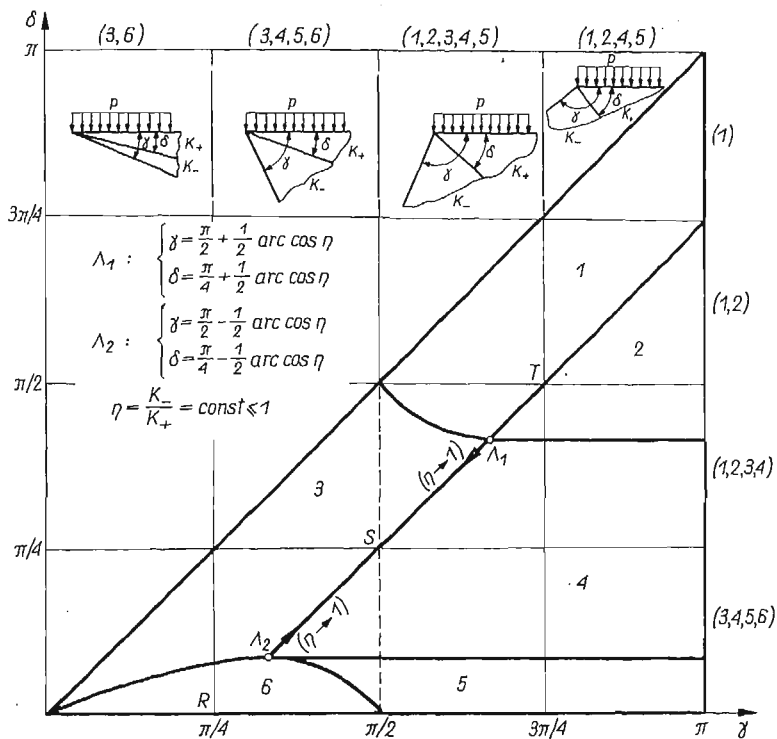
Podstawowe rozwiązanie A_1 otrzymujemy z rozwiązań 1, 2, 3, 4, gdy zachodzą równości $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{24} = \mu_{31} = \mu_{34} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0$, czyli dla następujących kątów δ , γ :

$$(6.68) \quad \gamma = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arccos \eta, \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta,$$

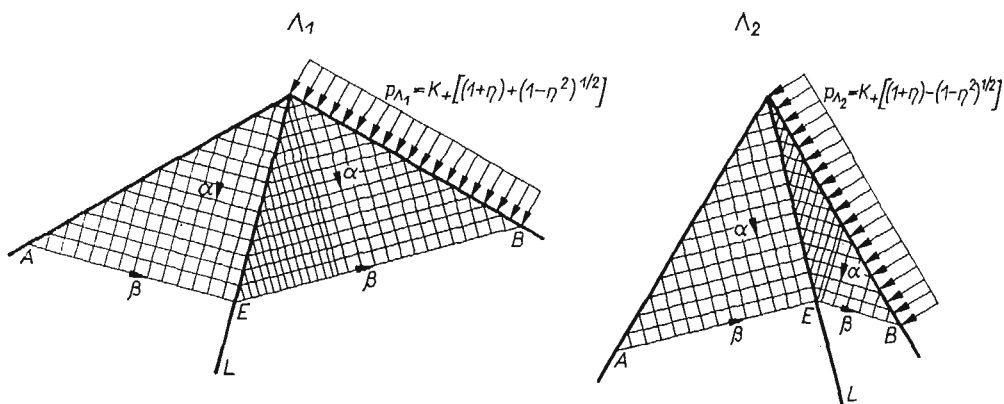
podstawowe zaś rozwiązanie A_2 odpowiada sytuacji, gdy w rozwiązaniach 3, 4, 5, 6 odpowiednio $\mu_{34} = \mu_{36} = \mu_{43} = \mu_{45} = \mu_{54} = \mu_{56} = \mu_{63} = \mu_{65} = 0$, czyli gdy

$$(6.69) \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \eta, \quad \delta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta.$$

W obu przypadkach w części słabszej i części mocniejszej klina mamy jednorodny stan naprężenia $\sigma = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ (rys. 2.21). Składowa styczna wektora naprężenia na linii kontaktu L ma największą dopuszczalną wartość K_- (linia kontaktu jest charakte-



Rys. 2.20



Rys. 2.21

rystyką dla części słabszej). Dla rozwiązania Λ_1 , na linii kontaktu otrzymujemy nieciągłość naprężeń pierwszego rodzaju, natomiast dla rozwiązania Λ_2 – nieciągłość drugiego rodzaju (por. p. 2). W rozwiązaniu Λ_1 występuje skok prędkości przemieszczeń na linii kontaktu («zniszczenie» złącza), w rozwiązaniu Λ_2 pole prędkości jest ciągłe. Wielkość obciążenia granicznego określają wzory

$$(6.70) \quad p_{\Lambda_1} = K_+ [(1+\eta) + (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}], \quad p_{\Lambda_2} = K_+ [(1+\eta) - (1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Rozwiązania podstawowe mają następującą interesującą własność: przez zmiany parametrów δ , γ , η można z nich otrzymać wszystkie 6 znalezionych rozwiązań (rys. 2.21).

Z podobną sytuacją spotkamy się w p. 14 przy analizie nośności granicznej skręcanego pręta o skokowej niejednorodności. Nasuwa to następującą koncepcję rozwiązywania zadań tej klasy: należy znaleźć rozwiązania podstawowe i następnie badać ich zachowanie się przy zmianie parametrów. Koncepcja ta wymaga jednak dokładniejszego sprecyzowania i zbadania.

Powierzchnie

$$(6.71) \quad \mu_{ij}(\gamma, \delta, \eta) = 0$$

dzielą obszar (4.1) przestrzeni C_3 na 6 podobszarów odpowiadających sześciu znalezionym rozwiązaniom. Charakter tego podziału przestrzennego można uprzytomnić sobie bez trudności operując przecięciami $\eta = \text{const}$. Ponieważ

$$(6.72) \quad \mu_{13}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \eta\right) = 0, \quad \mu_{36}(0, 0, \eta) = 0, \quad \mu_{56}\left(\frac{\pi}{2}, 0, \eta\right) = 0,$$

to kolejne przekroje $\eta = \text{const}$ będą podobne do przekroju $\eta = 1/2$ przedstawionego na rys. 2.20, a różnice będą wynikać z innego usytuowania punktów A_1 , A_2 .

Przy wzroście η od 0 do 1 punkt A_1 wędruje od położenia $T\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ do położenia $S\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, punkt zaś A_2 wędruje od $R\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ do S , przy czym oba punkty leżą stale na prostej $\gamma - \delta = \frac{\pi}{4}$.

Dla $\eta = 0$ i $\eta = 1$ otrzymane rozwiązania przechodzą w znane rozwiązania dla klina jednorodnego o rozwartości odpowiednio δ i γ . Istotnie, przy $\eta = 0$ obszary 5, 6 redukują się do linii, rozwiązania 3, 4 przechodzą w rozwiązanie klasyczne z linią nieciągłości ($\delta \leq \pi/2$), rozwiązania zaś 1, 2 pokrywają się z klasycznym rozwiązaniem ciągłym ($\delta \geq \pi/2$). Analogicznie dla $\eta = 1$ znika obszar 4, rozwiązania 3, 6 pokrywają się z klasycznym rozwiązaniem nieciągłym $\gamma \leq \pi/2$, a rozwiązania 1, 2, 5 — z klasycznym rozwiązaniem ciągłym ($\gamma \geq \pi/2$).

Rozpatrzone kliny niejednorodne mogą być podzielone na grupy o mniejszej ilości możliwych rozwiązań. Np. dla $0 \leq \gamma \leq \pi/4$ niezależnie od wartości η będziemy mieli do czynienia jedynie z rozwiązaniami 3, 6. Analogicznie dla $\pi/2 \leq \delta \leq 3\pi/4$ wystąpią jedynie rozwiązania 1, 2 itd. (por. odpowiednie oznaczenia przedziałów zmienności δ , γ na rys. 2.20).

Należy podkreślić, że nie sprawdziliśmy jednego z warunków poprawności rozwiązań dla ciała sztywno-plastycznego bez wzmocnienia, mianowicie nie wykazaliśmy, że obszar poniżej charakterystyki AB może być istotnie obszarem sztywnym. W tym celu należałoby znaleźć w tym obszarze stan naprężenia spełniający równania równowagi, warunki $\sigma_n = \tau_n = 0$ na krawędziach bocznych, warunki $\sigma_n = \sigma$, $\tau_n = K_{\pm}$ na AB oraz warunek $(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \leq 4K_{\pm}^2$. Nie ma powodu, aby wątpić, że takie przedłużenie stanu na-

prężenia istnieje, tym niemniej z formalnego punktu widzenia podane rozwiązania należy zaklasyfikować jako rozwiązania kinematycznie dopuszczalne.

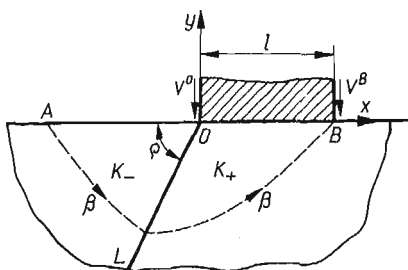
Powyzsza okolicznosc nabiera istotnego znaczenia dla przypadku, gdy obciazona jest krawedz slabszej czesci klina (por. [12]).

Chcielibysmy stwierdzic, ze rozwazony przyklad wskazuje, jak sie zdaje, na celowosc uzycia najprostszyc dystrybucji $H(x)$, $\delta(x)$ do opisu pol prędkosci przemieszczenia i odkształcenia w płaskim stanie odkształcenia ośrodku idealnie plastycznego. Linie nieciągłości prędkości przemieszczenia znajdują naturalny wyraz we wzorach na V_α , V_β [człony typu $AH(x)$, $A \neq 0$ por. np. wzór (6.45)] oraz we wzorach na $\epsilon_{\alpha\beta}$ [człony typu $A\delta(x)$, $A \neq 0$, por. np. wzór (6.46)], co formalizuje orientację w przebiegu linii nieciągłości i sprowadza sprawdzenie warunku $\lambda \geq 0$ na liniach nieciągłości do formalnego stwierdzenia znaku odpowiednich współczynników. Odpada również konieczność oddzielnego uwzględnienia członów odpowiadającym liniom nieciągłości we wzorach na moc dyssypacji, bowiem zawiera je całka $\int \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} dS$. Na uwagę zasługuje także zwarty i przejrzysty charakter wzorów na V_α , V_β , $\epsilon_{\alpha\beta}$ w obszarach składających się ze stref o różnych rozkładach prędkości [por. np. wzory (6.63) wspólne dla pięciu stref]. W podobny sposób można użyć dystrybucji $H(x)$, $\delta(x)$ w innych działach teorii plastyczności.

Na zakończenie należy dodać, że rozpatrywane rozwiązania można próbować uzyskać z przejść granicznych od rozwiązań sprężysto-plastycznych dla klina obciążonego na brzegu nieskończonym. Odpowiednie rachunki dla klina jednorodnego zawarte są w pracach [25–27]. Dokładniejsza analiza wskazuje jednak, że wyniki prac [25 i 26] nie są poprawne dla $\gamma > \pi/2$, ponieważ w pobliżu osi dyssypacja energii jest ujemna. Dyskusja tego problemu zawarta jest w pracy [28].

7. Działanie gładkiego sztywnego stempla na półprzestrzeń [1]

Rozważmy zadanie o działaniu gładkiego sztywnego stempla na prostoliniową krawędź ciała złożonego z dwu materiałów o stałych, ale różnych granicach plastyczności (rys. 2.22). Przyjmujemy, że linia podziału L jest prostą przecinającą brzeg w punkcie O ,



Rys. 2.22

zaś stempel działa na materiał mocniejszy, przy czym jego krawędź pokrywa się z punktem O . Zakładamy ponadto, że ciało jest na tyle duże, że płynięcie plastyczne zlokalizowane jest w obszarze stykającym się ze stemplem. Przyjmujemy wreszcie, że złącze L ma własności opisywane przez model II, przy czym spełniony jest warunek (2.4).

Należy wyznaczyć stan naprężenia i prędkości przemieszczeń oraz wartość graniczną siły nacisku w chwili odpowiadającej początkowi niepowstrzymywanego płynięcia plastycznego.

Zadanie charakteryzują dwa niezależne parametry

$$(7.1) \quad \eta = \frac{K_-}{K_+}, \quad \varrho,$$

gdzie K_- , K_+ oznaczają odpowiednio granice plastyczności strefy słabszej i mocniejszej, ϱ jest kątem rozwarcia strefy słabszej.

Na brzegu OB warunki brzegowe dla prędkości należy zapisać w postaci

$$(7.2) \quad -V_y \Big|_{OB} = V^0 + (V^B - V^0) \frac{x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l,$$

gdzie V^0 , V^B oznaczają prędkości pionowe krawędzi stempla w chwili początku ruchu, AB oznacza nieznaną granicę części sztywnej i plastycznej, która jest charakterystyką β .

Warunek dla składowej normalnej wektora prędkości pod stemplem uwzględnia w charakterze przypadków szczególnych następujące możliwości:

1) stempel jest zagłębiany w materiał ruchem postępowym,

$$V^0 = V^B > 0,$$

2) stempel jest zagłębiany w materiał z jednoczesnym obrotem; prędkości $V^0 > 0$, $V^B > 0$ są dane, przy czym $V^0 \neq V^B$,

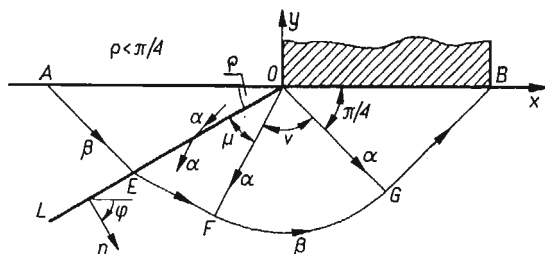
3) dana jest prędkość pionowa pewnego punktu pośredniego V^x , $0 < x < l$ (przegubowe obciążenie stempla),

4) ciężki stempel spoczywa na krawędzi OB ; wielkości V^0 , V^B nie są dane.

Traktując półprzestrzeń jako klin o kącie rozwarcia $\gamma = \pi$ przy czym $\varrho = \pi - \delta$ widzimy, że poprzednia szczegółowa analiza dopuszczalnych rozkładów prędkości dla klina pozwala użyć otrzymane w p. 6 rozwiązania dla zadania o stemple. Istotnie, rozkład prędkości (7.2) jest szczególnym przypadkiem rozkładu (6.41). Specyfikując odpowiednio poprzednie wzory uzyskujemy dwa rozwiązania, przy czym rozkład nacisku pod stemplem jest równomierny⁽¹⁵⁾

R o z w i ą z a n i e 1 (rys. 2.23, 2.24). Nacisk w chwili odpowiadającej początkowi niepowstrzymywanego płynięcia wynosi zgodnie z (6.11)

$$(7.3) \quad p_1 = K_+ \left\{ 1 + \eta (1 - \cos 2\varrho) + (1 - \eta^2 \sin^2 2\varrho)^{1/2} + \left[\frac{3\pi}{2} - 2\varrho - \arccos(\eta \sin 2\varrho) \right] \right\}.$$



Rys. 2.23

⁽¹⁵⁾ W pracy [11], wykonanej przed pracą [12], został przyjęty inny tok postępowania, niezależny od rozwiązania dla klina.

Rozkłady prędkości na podstawie (6.42) i (6.45) są określone następująco

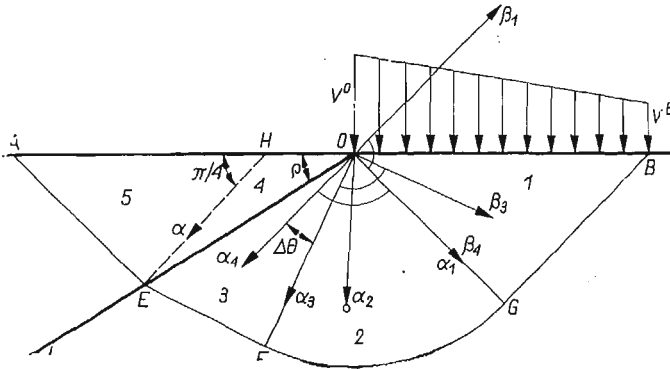
$$(7.4) \quad V_{\alpha}^i = 0, \quad V_{\beta}^i = -\sqrt{2}V^0 + 2(V^0 - V^B) \frac{\alpha_i}{l}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(7.5) \quad V_{\alpha}^4 = \sqrt{2}V^0 \sin \Delta\theta + 2(V^0 - V^B) \frac{\cos \mu \sin \Delta\theta}{\sin(\mu - \Delta\theta)} \frac{\beta_4}{l},$$

$$V_{\beta}^4 = -\sqrt{2}V^0 \cos \Delta\theta + 2(V^0 - V^B) \frac{\cos \mu \cos \Delta\theta}{\cos(\mu - \Delta\theta)} \frac{\alpha_4}{l},$$

$$(7.6) \quad V_{\alpha}^5 = 0, \quad V_{\beta}^5 = V_{\beta}^4,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ są współrzędnymi w układach kartezjańskich, zaś α_2 jest współrzędną radialną w układzie biegunowym (rys. 2.24).



Rys. 2.24

Podane pole prędkości jest nieciągłe wzdłuż linii podziału strefy sztywnej i strefy ruchu plastycznego, tzn. linii AE i EFG oraz wzdłuż charakterystyki EH . Wielkość skoku wynosi

$$(7.7) \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EFG} = \sqrt{2}V^B, \quad |\Delta \mathbf{V}|_{AE} = \sqrt{2}V^B \cos \Delta\theta, \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EH} = \sqrt{2}V^B \sin \Delta\theta.$$

Na uwagę zasługuje wykryte zjawisko jakościowe: w chwili odpowiadającej początkowi niepowstrzymanego płynięcia plastycznego obszar słabszy zostaje podzielony linią nieciągłości wektora prędkości przemieszczeń na dwie strefy o różnej kinematyce ruchu.

Gdy granice plastyczności wyrównują się, $\eta \rightarrow 1$, lub strefa słabsza maleje do zera, $\varrho \rightarrow 0$, otrzymane rozwiązanie przechodzi w sposób ciągły w rozwiązanie dla jednorodnej półprzestrzeni; wzór (3.12) określa znaną wartość $p = K(2 + \pi)$.

Gdy $\eta \rightarrow 0$, otrzymujemy rozwiązanie dla jednorodnego klina o kącie rozwarcia $\pi - \varrho \geq 3\pi/4$.

Otrzymane rozwiązanie obowiązuje wobec (6.12) i $\gamma = \pi$, $\varrho = \pi - \delta$ dla

$$(7.8) \quad \varrho \leq \frac{\pi}{4}.$$

Gdy $\varrho \rightarrow \pi/4$ strefa 4 redukuje się ze zera, przy czym można pokazać, że jednocześnie zachodzi $\epsilon_{\alpha\beta}^4 \rightarrow \infty$ (por. [11]), w pozostałych zaś obszarach $\epsilon_{\alpha\beta}$ są ograniczone.

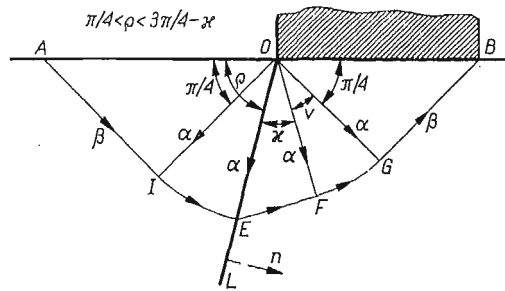
Rozwiązanie 2 (rys. 2.25, 2.26). Nacisk w chwili osiągnięcia nośności podłoża wynosi zgodnie z (6.16)

$$(7.9) \quad p_2 = K_+ \left[1 + \eta \left(1 + 2\rho - \frac{\pi}{2} \right) + (1 - \eta^2)^{1/2} + \left(\frac{3\pi}{2} - 2\rho - \arccos \eta \right) \right].$$

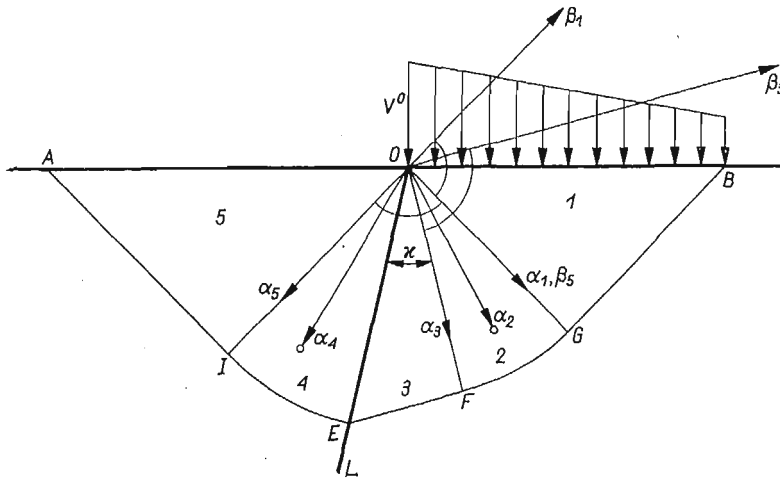
Rozkład prędkości w obszarach 1, 2, 3 określają wzory poprzednie, zaś w obszarach 4, 5 na podstawie (6.49) mamy

$$(7.10) \quad V_\alpha^i = 0, \quad V_\beta^i = -V^0(1 + \eta)^{1/2} + (V^0 - V^B)(1 + \eta) \frac{\alpha_i}{l}, \quad i = 4, 5,$$

gdzie α_4 ma sens współrzędnej w układzie biegunowym, zaś α_5 w układzie kartezjańskim.



Rys. 2.25



Rys. 2.26

Podane pole prędkości jest nieciągłe wzdłuż AIE, EFG, EO. Wielkości skoków wynoszą

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \Delta V|_{EFG} &= \sqrt{2} V^B, & \Delta V|_{AIE} &= (1 + \eta)^{1/2} V^B, \\ \Delta V|_{EO} &= -V_\beta^3|_{EO} \sin \varkappa = V^0(1 - \eta)^{1/2} - (V^0 - V^B)(1 - \eta^2)^{1/2} \frac{\alpha_4|_{EO}}{l}. \end{aligned}$$

Należy podkreślić, że wielkość skoku prędkości na linii kontaktu jest zmienna. Zgodnie z (6.17) rozwiązanie obowiązuje, gdy

$$(7.12) \quad \frac{\pi}{4} \leq \varrho \leq \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \eta.$$

Gdy $\eta \rightarrow 1$, to $\kappa \rightarrow 0$ i otrzymujemy w granicy rozwiązanie dla jednorodnej półpłaszczyzny, przy czym $|\Delta \mathbf{V}|_{OE} \rightarrow 0$, zaś $p \rightarrow K(2+\pi)$.

Gdy $\eta \rightarrow 0$, to $\kappa \rightarrow \pi/4$ i w granicy otrzymujemy rozwiązanie dla jednorodnego klina o kącie rozwarcia $\pi - \varrho \geq \pi/2$.

Na podstawie (6.47) stwierdzamy, że warunki konieczne i dostateczne na to, by dysypacja mocy we wszystkich obszarach i na wszystkich liniach nieciągłości była nieujemna, mają dla obu rozwiązań postać:

$$(7.13) \quad V^B > 0, \quad V^0 \geq V^B$$

lub

$$(7.14) \quad V^B = 0, \quad V^0 > 0.$$

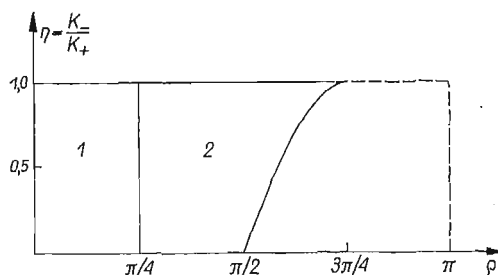
Gdy $V^B = 0$ stempel zaczyna obracać się wokół punktu B w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara, przy czym:

w rozwiązaniu 1 pole prędkości jest ciągłe z wyjątkiem punktu osobliwego O ,

w rozwiązaniu 2

$$(7.15) \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EFG B} = 0, \quad |\Delta \mathbf{V}|_{EA} = 0,$$

natomiast skok prędkości na linii kontaktu EO maleje liniowo od wartości $V^0(1-\eta)^{1/2}$ w punkcie O do zera w punkcie E .



Rys. 2.27

Gdy $V^0 = V^B$ stempel zaczyna zagłębiać się ruchem postępowym, przy czym:

w rozwiązaniu 1 obszary 1, 3, 4, 5 zaczynają poruszać się jak bryły sztywne, a dysypacja energii ma miejsce jedynie w obszarze 2 i na liniach nieciągłości prędkości AE , $EFG B$, EH ;

w rozwiązaniu 2

$$(7.16) \quad V^0 = V^B, \quad \epsilon_{\alpha\beta}^1 = \epsilon_{\alpha\beta}^3 = \epsilon_{\alpha\beta}^5 = 0, \quad |\Delta \mathbf{V}|_L = V^0(1-\eta)^{1/2} = \text{const}$$

i dysypacja energii następuje tylko w obszarach wachlarzy biegunowych 2, 4 oraz na liniach nieciągłości prędkości.

Jeżeli sposób zagłębiania stempla jest narzucony i niezgodny z (3.21), (3.22), to przedstawione rozwiązania przestają obowiązywać.

Obszary słuszności znalezionych rozwiązań w płaszczyźnie parametrów η , ϱ przedstawione są na rys. 2.27.

Dla większych kątów ϱ nie udało się znaleźć rozwiązań, które spełniałyby warunki brzegowe w naprężeniach i prędkościach (3.2), (3.3), (3.4) i spełniały warunek nieujemności dysypacji energii. Rozwiązania 3, 4, 5, 6 z p. 6 nie mogą być tu użyte ze względu na (6.58); aby się o tym przekonać, wystarczy spojrzeć na rys. 2.19 niezgodny z (7.2).

Wartości p określone wzorami (6.19), (6.22), (6.26), (6.30) przy $\gamma = \pi$ $\delta = \pi - \varrho$ można uznać jednak zgodnie z twierdzeniami ekstremalnymi teorii plastyczności za ocenę dolną nośności podłoża w odpowiednich przedziałach ϱ, η .

Należy sądzić, że dla dużych kątów rozwarcia strefy słabszej początkowo niepowstrzymany ruch plastyczny nastąpi przy odmiennej konfiguracji stref plastycznych, a rozwiązania zawierać będą izolowane linie poślizgu⁽¹⁶⁾.

Przytoczone rozwiązania 1, 2 mogą być uogólnione w rozmaity sposób oraz użyte w wielu innych zadaniach.

Gdy wytrzymałość złącza, którą dla modelu II charakteryzuje liczba K_0 (oznaczenie w p. 2, rozdz. I — $K_{\nu\mu}$), jest mniejszą od K_- , rozwiązanie 1 nadal obowiązuje, jednakże dla węższego zakresu ϱ , mianowicie dla

$$(7.17) \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{K_0}{K_-}.$$

Dla większych ϱ rozwiązanie ciągłe nie jest możliwe.

Wskazemy jeszcze, że uogólnienie przytoczonych rozwiązań na odpowiednie zadania o nośności granicznej podłoża sypkiego lub betonowego jest w pewnych przypadkach tylko kwestią rachunków.

8. Przeciąganie warstwowego pasma przez gładką matrycę

Rozpatrzone powyżej zadania dotyczyły zagadnień wytrzymałości układów stanowiących kompozycję kilku materiałów. Wyprowadzone wzory (6.11), (6.16), (6.19), (6.22), (6.26), (6.30), (7.3) i (7.9) mogą mieć bezpośrednie zastosowanie do oceny nośności granicznej. Wyniki otrzymane zostały w zasadzie przy użyciu środków elementarnych.

Zagadnienia przeróbki plastycznej metali, w których mamy do czynienia z jednoczesnym przepływem kilku metali oraz deformacją rzędu dziesiątków procentów są z reguły trudniejsze do analizy.

Naszukujemy jako przykład opis ustalonego procesu przeciągania dwuwarstwowego pasma przez gładką nieodkształcalną matrycę o prostoliniowych brzegach⁽¹⁷⁾ (rys. 2.28). Zadanie charakteryzują cztery niezależne parametry bezwymiarowe

$$(8.1) \quad \varepsilon = 1 - \frac{h}{H}, \quad e = \frac{K_-}{K_+}, \quad \varphi, \quad f = \frac{H_-}{H_+} = \frac{h_-}{h_+},$$

gdzie $2H, 2H_+, H_-$ oznacza grubość początkową pasma jako całości, warstwy środkowej, warstwy zewnętrznej, $2h, 2h_+, h_-$ odpowiednie grubości na wyjściu z matrycy, 2φ kąt

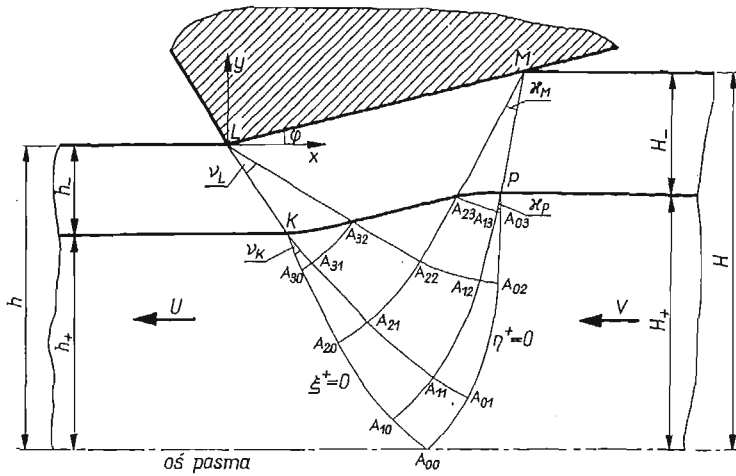
⁽¹⁶⁾ Jak stąd wynika, problem wciskania gładkiego sztywnego stempla w krawędź boczną jednorodnego klina o kącie rozwarcia mniejszym od $\pi/2$ (przypadek szczególny naszego zadania dla $\varrho > \pi/2$ $\eta = 0$) należy uznać za otwarty.

⁽¹⁷⁾ Poniżej referujemy wyniki uzyskane wspólnie z M. ARCISZ; szczegóły rachunków znajdzie Czytelnik w publikacji [16].

rozwarcia szczeliny, K_+ , K_- — granice plastyczności warstwy środkowej i warstwy zewnętrznej⁽¹⁸⁾

Z warunku nieściśliwości otrzymujemy związek pomiędzy prędkościami ruchu pasma przed i za matrycą w postaci $VH = Uh$.

Ograniczymy się do takiego zakresu parametrów (8.1), w którym strefy plastyczne zlokalizowane w pobliżu brzegów matrycy stykają się z sobą w jednym punkcie A_{00} na osi pasma. Założymy ponadto, że rozpatrywany jest przypadek, gdy na kontakcie warstw mogą powstać znaczne naprężenia styczne; jest to słuszne np. wtedy, gdy rozważamy kolejny proces przeciągania bez smarowania powierzchni kontaktu.



Rys. 2.28

Nieznane charakterystyki $A_{00}L$, $A_{00}M$ ograniczają obszar odkształceń plastycznych. Częstki materiału znajdujące się w danej chwili czasu poza tym obszarem pozostają sztywne.

Analizując rozkład prędkości ruchu można udowodnić, że rozkład nacisku na matrycę jest równomierny. Oznacza to, że podobnie jak w przypadku klasycznym [20] siatka linii przślizgu w warstwie zewnętrznej składa się z części $LA_{32}A_{23}M$, w której linie α , β są prostymi nachylonymi pod kątem $\pm\pi/4$ do brzegu, wachlarza LKA_{32} z prostoliniowymi charakterystykami α oraz wachlarza MPA_{23} z prostoliniowymi charakterystykami β . Kąty rozwarcia wachlarzy ν_L , ν_M są nieznanne.

Rozkłady prędkości ruchu będą miały postać [16]

$$(8.2) \quad V_{\alpha}^{-} = \text{const}, \quad V_{\beta}^{-} = \text{const} \quad \text{w} \quad LA_{32}A_{23}M,$$

$$(8.3) \quad V_{\alpha}^{-} = -f_1'(\theta^{-}), \quad V_{\beta}^{-} = f_1(\theta^{-}) \quad \text{w} \quad LKA_{32},$$

$$(8.4) \quad V_{\alpha}^{-} = f_2(\theta^{-}), \quad V_{\beta}^{-} = f_2'(\theta^{-}) \quad \text{w} \quad MPA_{23},$$

gdzie f_1, f_2 są nieznanymi funkcjami kąta nachylenia linii α do osi x w warstwie zewnętrznej.

⁽¹⁸⁾ Zmieniiliśmy oznaczenie dla $K-/K_+$, ponieważ symbol η będzie w tym punkcie miał inne znaczenie (por. (8.5)).

Można wykazać następnie, że część $A_{23}A_{32}$ linii kontaktu materiałów, będącej torem cząstek, jest odcinkiem prostym równoległym do brzegu matrycy. Wynika stąd, że jest to trajektoria naprężeń głównych i zgodnie z wnioskami p. 5 charakterystyki przechodzą z obszaru górnego do dolnego bez załamania. Stąd w obszarze $A_{32}A_{23}A_{22}$ mamy do czynienia z prostoliniowymi charakterystykami α, β .

Analiza rozkładu prędkości na granicach części sztywnych i obszaru plastycznego prowadzi do wniosku, że wspólna deformacja plastyczna warstw jest możliwa tylko wtedy, gdy w punktach P, K charakterystyki $A_{00}L, A_{00}M$ są załamane, przy czym przez punkty te przechodzą wachlarze charakterystyk o nieznanym kącie rozwarcia ν_k, ν_p .

W tej sytuacji jest rzeczą widoczną, że rozwiązanie można będzie otrzymać na drodze numerycznej, jeżeli tylko znane będą kształty części $PA_{23}, A_{32}K$ linii kontaktu. Istotnie, z warunków (5.5) i (5.6) określimy wtedy σ^+, θ^+ na $A_{32}K, A_{23}P$, co pozwoli zbudować siatkę α, β w obszarach $A_{03}A_{23}P, A_{30}A_{32}K$ (por. [20]). Na podstawie twierdzenia Hencky'ego o własnościach linii poślizgu stwierdzamy, że w obszarze $A_{30}A_{32}A_{22}A_{20}$ charakterystyki α , są prostoliniowe, zaś w obszarze $A_{03}A_{23}A_{22}A_{02}$ charakterystyki β są prostoliniowe. W oparciu o wyznaczone w ten sposób łuki $A_{02}A_{22}, A_{22}A_{20}$ określamy siatkę α, β w obszarze ostatnim $A_{02}A_{22}A_{20}A_{00}$.

Udowodnimy poniżej, że analiza prędkości ruchu w warstwie środkowej pozwala na znalezienie kształtu łuków $PA_{23}, A_{32}K$. W tym celu użyjemy zmiennych charakterystycznych η, ξ zdefiniowanych następująco:

$$(8.5) \quad \left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2K_+} (\sigma - \sigma_0) + (\theta - \theta_0) \\ \xi &= \frac{1}{2K_+} (\sigma - \sigma_0) - (\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad \text{w } A_{00}PK,$$

gdzie σ_0 jest nieznaną wartością ciśnienia średniego w punkcie A_{00} , zaś $\theta_0 \equiv \theta(A_{00}) = -\pi/4$. Uznając η, ξ za zmienne niezależne równania Geiringer (4.14) można doprowadzić do postaci równań

$$(8.6) \quad V_{\alpha, \eta} - \frac{1}{2} V_{\beta} = 0, \quad V_{\beta, \xi} - \frac{1}{2} V_{\alpha} = 0$$

równoważnych dwom równaniom telegraficznym

$$(8.7) \quad V_{\alpha, \eta\xi} - \frac{1}{4} V_{\alpha} = 0, \quad V_{\beta, \eta\xi} - \frac{1}{4} V_{\beta} = 0.$$

Charakterystyki $A_{00}K, A_{00}P$ zgodnie z (8.5) odwzorowują się na płaszczyznę zmiennych η, ξ w proste $\xi = 0, \eta = 0$.

Zapisując warunki brzegowe dla prędkości na $A_{00}P$ i $A_{00}K$ otrzymujemy

$$(8.8) \quad \xi = 0 (A_{00}K): \quad V_{\beta} = -U \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right),$$

$$(8.9) \quad \eta = 0 (A_{00}L): \quad V_{\alpha} = -V \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2} \right), \quad V \equiv U(1 - \varepsilon),$$

co wraz z (8.6) stanowi poprawne sformułowanie problemu brzegowego charakterystycznego dla równań telegraficznych (8.7) (por. [29]).

Rozwiązanie otrzymujemy opierając się na znanych z teorii równań różniczkowych cząstkowych wzorach [29]. Stosując te wzory otrzymujemy

$$(8.10) \quad \frac{1}{U} V_\alpha = \frac{V\sqrt{2}}{2} \varepsilon J_0(\sqrt{-\eta\xi}) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta-\xi}{2}\right) - \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^\xi J_0(\sqrt{-\eta(\xi-t)}) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) dt,$$

$$\frac{1}{U} V_\beta = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\eta-\xi}{2}\right) + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^\xi J_0(\sqrt{-\eta(\xi-t)}) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) dt,$$

gdzie $J_0(s)$ jest funkcją Bessela zerowego rzędu.

Korzystając ze związków (5.5) i (5.6) wiążących σ , θ z obu stron linii kontaktu oraz zależności (8.5), otrzymamy

$$(8.11) \quad \eta = \eta_1(\theta^-), \quad \xi = \xi_1(\theta^-) \quad \text{na } PA_{23},$$

$$(8.12) \quad \eta = \eta_2(\theta^-), \quad \xi = \xi_2(\theta^-) \quad \text{na } KA_{32}$$

(jawnej postaci tych wzorów nie podajemy). Podstawiając (8.11) i (8.12) do (8.10) otrzymujemy V_α , V_β w warstwie środkowej na linii kontaktu jako funkcje kąta θ^- .

Ponieważ z założenia wektor prędkości ruchu jest ciągły na styku warstw, otrzymujemy na podstawie związków (8.3), (8.4) i (5.13)

$$(8.13) \quad f_1(\theta^-) = V_\alpha(\theta^-) \cos \Delta\psi_1 + V_\beta(\theta^-) \sin \Delta\psi_1, \quad \Delta\psi_1 \equiv \theta^- + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\eta_1 - \xi_1);$$

$$(8.14) \quad f_2(\theta^-) = -V_\alpha(\theta^-) \sin \Delta\psi_2 + V_\beta(\theta^-) \cos \Delta\psi_2, \quad \Delta\psi_2 \equiv \theta^- + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\eta_2 - \xi_2).$$

Skorzystamy wreszcie z tego, że łuki PA_{23} , $A_{32}K$ są torami, tzn.

$$(8.15) \quad PA_{23}: \quad -\frac{dr_2}{f_2'(\theta^-)} = \frac{r_2 d\theta_2^-}{f_2(\theta_2^-)}, \quad A_{32}K: \quad -\frac{dr_1}{f_1'(\theta_1^-)} = \frac{r_1 d\theta_1^-}{f_1(\theta_1^-)}.$$

Całkując te równania otrzymujemy poszukiwane równania łuków PA_{23} , $A_{32}K$ w postaci:

$$(8.16) \quad PA_{23}: \quad r_2 = \frac{B_2}{f_2(\theta_2^-)}, \quad A_{32}K: \quad r_1 = \frac{B_1}{f_1(\theta_1^-)},$$

gdzie r_1 , θ_1^- i r_2 , θ_2^- są współrzędnymi biegunowymi o biegunach K i P odpowiednio. Stałe B_1 , B_2 wyznaczamy na podstawie współrzędnych punktów P , K .

Po uzyskaniu (8.16) można zrealizować wskazany powyżej program wyznaczenia siatki linii poślizgu. Jest rzeczą oczywistą, że naszkicowany tok postępowania i wykorzystania wzorów (8.16), (8.13), (8.14) i (8.10) wymaga przeprowadzenia obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej.

Dla nieznanych parametrów

$$(8.17) \quad \nu_L, \kappa_M, \nu_k, \kappa_p, \xi_p, \eta_k$$

otrzymuje się układ równań przestępnych z całkami z funkcji Bessela. Analiza tego układu wykazuje, że tylko

$$(8.18) \quad \text{dla } e < 1 \text{ mamy } \nu_L, \nu_M, \nu_k, \nu_p, > 0,$$

a więc zaproponowane rozwiązanie jest poprawne, gdy przeciągane pasmo składa się z mocniejszego rdzenia ze słabszymi zewnętrznymi nakładkami. Można udowodnić również, że gdy $e \rightarrow 1$, to otrzymane rozwiązanie zdąża do znanego rozwiązania dla pasma jednorodnego.

III. Skręcanie prętów o skokowej niejednorodności poprzecznej⁽¹⁰⁾

9. Podstawowe równania w pewnym układzie krzywoliniowym

Przedmiotem naszych rozważań będą skręcane pręty pryzmatyczne o dowolnym przekroju poprzecznym. Przyjmiemy klasyczne założenia Saint-Venanta odnoszące się do przemieszczeń. Prowadzi to do konieczności ograniczenia się do przypadku, gdy granica plastyczności K nie zależy od z (oś z kierujemy równoległe do tworzącej pręta). Istotnie, przyjmując np. kartezjański układ współrzędnych można pokazać (por. np. [30]), że założenia Saint-Venanta prowadzą do zależności $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$. Z równań równowagi mamy $\tau_{xz,z} = 0$ i $\tau_{yz,z} = 0$. Warunek plastyczności może być teraz spełniony na raz w całym pręcie tylko dla $K_{,z} = 0$. W przypadku $K = K(x, y, z)$ założenia Saint-Venanta nie mogą być zatem przyjęte. W stadium sprężysto-plastycznym i w chwili początku niewstrzymanego płynięcia mamy w tym przypadku do czynienia ze złożonym przestrzennym stanem naprężenia.

Rozkład naprężeń w całkowicie uplastycznionym pręcie o poprzecznej niejednorodności opisuje w dowolnym układzie ortogonalnym α, β, z , gdzie α, β są współrzędnymi krzywoliniowymi w płaszczyźnie przekroju, układ złożony z równania równowagi

$$(9.1) \quad (h_\beta \tau_{\alpha z})_{,\alpha} + (h_\alpha \tau_{\beta z})_{,\beta} = 0$$

i warunku plastyczności

$$(9.2) \quad \tau_{\alpha z}^2 + \tau_{\beta z}^2 = K^2(\alpha, \beta)$$

Poszukiwanie składowe fizyczne tensora naprężenia $\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$ określają wektor naprężenia

$$(9.3) \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_{\alpha z} \frac{\mathbf{g}_\alpha}{h_\alpha} + \tau_{\beta z} \frac{\mathbf{g}_\beta}{h_\beta},$$

gdzie $\mathbf{g}_\alpha, \mathbf{g}_\beta$ są wektorami bazy (rys. 3.1). Warunek plastyczności ma zatem postać

$$(9.4) \quad |\boldsymbol{\tau}| = K(\alpha, \beta).$$

Wprowadzając funkcję naprężeń przez wzory,

$$(9.5) \quad \tau_{\alpha z} = \frac{\partial F}{\partial s_\beta}, \quad \tau_{\beta z} = -\frac{\partial F}{\partial s_\alpha};$$

⁽¹⁰⁾ W rozdziale tym omówimy prace [13], [14]. Niektóre wyniki przedstawiono również w pracy [4].

czyli przez zależność

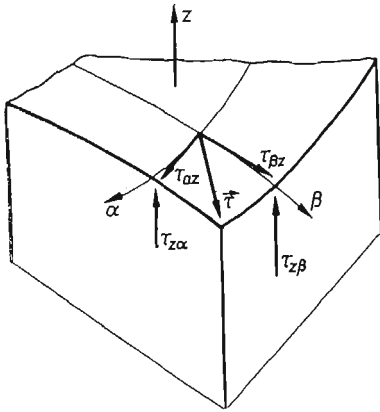
$$\boldsymbol{\tau} \operatorname{grad} F = 0,$$

spełniamy tożsamościowo równanie równowagi. Funkcję naprężeń określa warunek

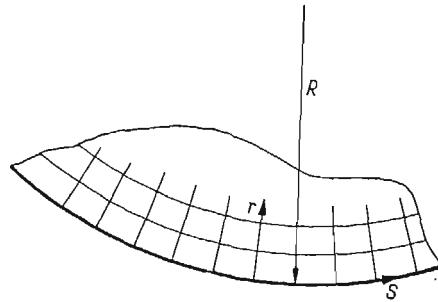
$$(9.6) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial s_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial s_\beta} \right)^2 = |\operatorname{grad} F|^2 = K^2(\alpha, \beta).$$

Trajektorią naprężenia stycznego w płaszczyźnie α, β nazywamy linię styczną w każdym punkcie do wektora $\boldsymbol{\tau}$. Linią poślizgu nazywamy linię prostopadłą w każdym punkcie do wektora $\boldsymbol{\tau}$. Linie poślizgu i trajektorie stanowią krzywoliniową siatkę ortogonalną γ, δ .

Pierwszym ogólnym studium o nośności granicznej skręcanych prętów o ciągłej poprzecznej niejednorodności była praca A. I. KUZNIECOWA [31], który analizował równania



Rys. 3.1



Rys. 3.2

(9.1) i (9.2), odniesione do układu kartezjańskiego. Posługując się metodą półodwrotną wykazał on m.in., że w przypadku gdy granica plastyczności zależy jedynie od odległości od konturu, wektor naprężenia stycznego jest prostopadły do normalnej do konturu.

Wynik ten można otrzymać natychmiast, jeżeli posłużyć się siatką ortogonalną pokazaną na rys. 3.2. Współrzędna r jest odległością od konturu, s jest służością łuku na konturze, $R(s)$ jest jego promieniem krzywizny (dla sytuacji pokazanej na rys. 3.2 $R < 0$), parametry Lamégo wynoszą $H_r = 1$, $H_s = 1 + \kappa(s)r$, $\kappa(s) \equiv 1/R(s)$. Układ równań (9.1), (9.2) przyjmuje postać

$$(9.7) \quad \tau_{sz,s} + (1 + \kappa r) \tau_{rz,r} + \kappa \tau_{rz} = 0,$$

$$(9.8) \quad \tau_{sz}^2 + \tau_{rz}^2 = K^2(r, s).$$

Gdy $K = K(r)$, to jedynym rozwiązaniem tego układu, spełniającym na brzegu warunek $\tau_{rz} = 0$, jest

$$(9.9) \quad \tau_{sz} = \pm K(r), \quad \tau_{rz} \equiv 0,$$

zatem trajektoriami naprężeń stycznych są linie $r = \text{const}$ naszego układu, a liniami poślizgu linie $s = \text{const}$.

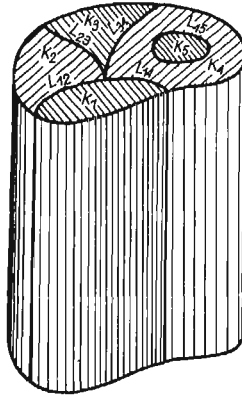
Przyjęty układ współrzędnych może być z powodzeniem wykorzystany w wielu zadaniach skręcania [32].

10. Skokowa niejednorodność. Warunki dla naprężeń na powierzchni kontaktu

Szereg zagadnień praktycznych prowadzi do konieczności rozważenia sytuacji, gdy wzdłuż pewnych krzywych w przekroju poprzecznym następuje skok granicy plastyczności K .

W rozdziale niniejszym ograniczymy się do istotnego dla zastosowań przypadku, gdy skręcany pręt składa się ze skończonej ilości prętów pryzmatycznych jednorodnych o różnych granicach plastyczności K_i ($i = 1, \dots, n$) (rys. 3.3). Linię styku ν -tej i μ -tej części w przekroju poprzecznym oznaczonym przez $L_{\mu\nu}$.

Jest rzeczą zupełnie oczywistą, że podane wartości K_ν , K_μ nie wystarcza do opisu zachowania się złącza jako całości. Wystarczającą dla problemu nośności na skręcanie informacją uzupełniającą będzie podanie maksymalnej wartości naprężenia stycznego,



Rys. 3.3

które może być przekazane przez linię kontaktu $L_{\mu\nu}$. Wartość tę oznaczymy przez $K_{\mu\nu}$ ⁽²⁰⁾. W realnej konstrukcji liczba $K_{\mu\nu}$ zależy od charakteru połączenia (styk klejony, połączenie zgrzewane, styk z przyczepnością itp.). Gdy zachodzi nierówność

$$(10.1) \quad K_{\mu\nu} \geq \min(K_\mu, K_\nu),$$

to wartość $K_{\mu\nu}$ jest nieistotna i nie wchodzi do rachunków.

Linie kontaktu $L_{\mu\nu}$ przyjmiemy jako linię β ($\alpha = \text{const}$) układu krzywoliniowego (rys. 3.4). Wektory naprężenia w częściach o granicach plastyczności K_ν , K_μ oznaczymy przez τ^ν , τ^μ . Ze względu na to, że z obu stron linii $L_{\mu\nu}$ materiał ma być uplastyczniony, moduły tych wektorów są równe odpowiednio

$$(10.2) \quad |\tau^\nu|^2 = (\tau_{\alpha z}^\nu)^2 + (\tau_{\beta z}^\nu)^2 = K_\nu^2, \quad |\tau^\mu|^2 = (\tau_{\alpha z}^\mu)^2 + (\tau_{\beta z}^\mu)^2 = K_\mu^2,$$

zatem linia nieciągłości granicy plastyczności jest zawsze linią nieciągłości naprężeń.

Z ciągłości składowych normalnych wektorów τ^ν , τ^μ wynika

$$(10.3) \quad \tau_{\alpha z}^\nu = \tau_{\alpha z}^\mu = \tau_{\alpha z}, \quad |\tau_{\alpha z}| \leq K_{\nu\mu}^0,$$

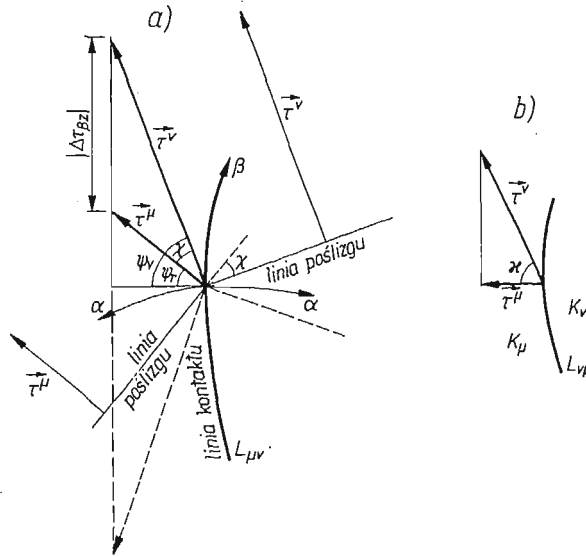
⁽²⁰⁾ Ponieważ z przyjętych założeń teorii skręcania wynika $\sigma_{\alpha\alpha} \equiv \sigma_{\beta\beta} \equiv 0$, to dwa modele złącza zdefiniowane w rozdziale I pokrywają się.

z warunków zaś (10.2) wynika wartość skoku składowych stycznych

$$(10.4) \quad |\tau_{\beta z}^v - \tau_{\beta z}^\mu| = \frac{|(K_v^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2} - (K_\mu^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2}|}{|(K_v^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2} + (K_\mu^2 - \tau_{\alpha z}^2)^{1/2}|}$$

Przyjmijmy dla uporządkowania dalszych rozważań, że $K_v > K_\mu$ oraz że kierunek wektora τ^μ jest dany.

Położenie wektorów τ^v , τ^μ na linii $L_{v\mu}$ przedstawia rys. 3.4a. Wprowadzając terminologię użytą w p. 5 nazwiemy sytuację odpowiadającą znakowi minus we wzorach (10.4) nieciągłości pierwszego rodzaju (górne położenie wektora τ^v), a sytuację odpowiadającą znakowi plus nieciągłości drugiego rodzaju. Linia $L_{\mu v}$ będzie z reguły linią nieciągłości pierwszego rodzaju, spowodowanej tylko przez niejednorodność i mającej bezpośredni



Rys. 3.4

sens fizyczny. Nieciągłość drugiego rodzaju odpowiada wyjątkowej sytuacji pokrywania się linii $L_{\mu v}$ z linią nieciągłości naprężeń, która miałaby miejsce w materiale jednorodnym.

Przy rozwiązywaniu problemów brzegowych potrzebne będą kąty, jakie tworzą wektory τ^v , τ^μ z normalną do $L_{\mu v}$, oznaczone odpowiednio przez ψ_v , ψ_μ , oraz kąt między tymi wektorami oznaczony przez χ .

Związki między tymi kątami dla linii nieciągłości pierwszego rodzaju określa warunek ciągłości składowych $\tau_{\alpha z}^v$, $\tau_{\alpha z}^\mu$. Mają one postać

$$(10.5) \quad \psi_v = \arccos\left(\frac{K_\mu}{K_v} \cos \psi_\mu\right), \quad \chi = \psi_v - \psi_\mu.$$

Kąt χ jest jednocześnie kątem załamania linii poslizgu na linii kontaktu. Kąty ψ_μ , ψ_v muszą spełniać warunki

$$(10.6) \quad \psi_\mu \geq \bar{\psi}_\mu \equiv \arccos \frac{K_{v\mu}}{K_\mu}, \quad \psi_v \geq \bar{\psi}_v \equiv \arccos \frac{K_{v\mu}}{K_v},$$

Gdy zachodzi nierówność (9.7), kąt nachylenia wektora τ^v ograniczony jest od dołu przez warunek

$$(10.7) \quad \psi_v \geq \varkappa = \arccos \frac{K_\mu}{K_v}.$$

Znak równości odpowiada granicznej konfiguracji przedstawionej na rys. 3.4b.

11. Analogie Nádaia dla skokowej niejednorodności

Dla skręcania prętów o skokowej niejednorodności obowiązują proste uogólnienia obu analogii Nádaia [33].

Pierwsza analogia Nádaia (analogia wzgórza piaskowego) dotyczy funkcji naprężeń F wprowadzonej przez związki (9.5). Warunek plastyczności określa F w każdym z obszarów z osobną równością

$$(11.1) \quad |\text{grad} F| = K_i \quad \text{w} \quad G_i.$$

Powierzchnia reprezentująca F jest więc w każdym z obszarów powierzchnią równego spadku, którego wartość jest inna w każdym obszarze. Ze związków (9.5) wynika, że linie stałego F są w każdym obszarze trajektoriami naprężenia stycznego.

Wykażemy obecnie, że powierzchnia F może być przyjęta jako ciągła przy dowolnej liczbie i konfiguracji stref G_i o różnej granicy plastyczności.

Istotnie, w każdej strefie G_i z osobną F jest ciągła. Na granicy $L_{v\mu}$ stref G_v, G_μ , przyjętej jako linia β , z warunku ciągłości $\tau_{xz}^v = \tau_{xz}^\mu$ oraz ze związku F z naprężeniami (9.5) wynika zależność

$$(11.2) \quad F_{v,\beta}^v = F_{\mu,\beta}^\mu, \quad \text{czyli} \quad F^v = F^\mu + A_{v\mu},$$

gdzie $A_{v\mu}$ jest stałą na $L_{v\mu}$. Nieciągłości F na liniach $L_{v\mu}$ mogą polegać jedynie na stałej różnicy wzniosu. Rozważmy powierzchnię \bar{F} mającą tego rodzaju nieciągłości. Przyjmijmy pewien obszar G_k stykający się z obszarami G_{k+1}, \dots, G_{k+l} , jako wyjściowy. Dodając w każdym z obszarów G_{k+1}, \dots, G_{k+l} do funkcji naprężeń odpowiednio stałe $-A_{k,k+1}, \dots, -A_{k,k+l}$ likwidujemy nieciągłości wzdłuż całego brzegu obszaru G_k . Jednocześnie zlikwidowane zostają nieciągłości wzdłuż łuków styku obszarów G_{k+1}, \dots, G_{k+l} . Otrzymujemy zwiększony obszar ciągłości powierzchni \bar{F} , który przyjmujemy znów za wyjściowy. Postępowanie to prowadzi do ciągłej powierzchni F , przy czym na całym brzegu otrzymamy $F = \text{const}$ i można przyjąć na brzegu warunek $F = 0$.

Otrzymana powierzchnia ciągła F jest równoważna z punktu widzenia jej związku ze stanem naprężenia poprzez zależności (9.5) z powierzchnią nieciągłą \bar{F} , ponieważ całe postępowanie polegało na dodawaniu stałych do \bar{F} w poszczególnych obszarach.

Graniczny moment skręcający wynosi

$$(11.3) \quad M = \int_G \int |\tau \times \mathbf{R}| dS = \sum_{v=1}^n \left\{ 2 \int_{G_v} F^v dS - \oint_{L_v} F^v dl \right\},$$

gdzie \mathbf{R} jest promieniem-wektorem poprowadzonym z ustalonego punktu przekroju, L_v oznacza brzeg obszaru G_v . Ponieważ wykazaliśmy, że powierzchnia F składająca się z płatów F^v jest ciągła, całki krzywoliniowe znoszą się (każdy łuk L_v jest przebiegany dwukrotnie w przeciwnych kierunkach, zaś na brzegu $F = 0$), zatem znany wzór

$$(11.4) \quad M = 2 \iint_G F dS$$

obowiązuje dla dowolnego przekroju o skokowej niejednorodności.

Zauważmy, że przy rozpatrywaniu przekrojów o skokowej niejednorodności *nie występuje potrzeba osobnego traktowania przekrojów wielospójnych*. Są one przypadkiem szczególnym, gdy w pewnych obszarach G_v mamy $K_v = 0$. Odpowiada to wypełnieniu pryzmy G_v ciałem nie przenoszącym naprężeń stycznych — cieczą idealną, nie wpływającą na zachowywanie się pręta przy skręcaniu.

Przekroje jednorodne wielospójne są również przypadkiem szczególnym przekrojów o skokowej niejednorodności, toteż przy naszym traktowaniu funkcji naprężeń (budowaniu powierzchni F we wszystkich obszarach włączając w nie również obszary puste) wzór (11.4) obowiązuje i dla nich.

Eksperymentalne wykorzystanie pierwszej analogii Nádai'a wymaga użycia w różnych obszarach G_v materiałów sypkich o odmiennych kątach tarcia wewnętrznego. W związku z tym metodyka prowadzenia doświadczenia nie może się pokrywać z zaproponowaną przez Nádai'a (por. [33]) i wymaga osobnego opracowania.

Gdy zbudowana jest powierzchnia F , zadanie sprężysto-plastyczne może być modelowane przy wykorzystaniu drugiej analogii Nádai'a. Ponieważ skokowej niejednorodności plastycznej towarzyszy na ogół skokowa niejednorodność sprężysta, to błona napinana na podstawie powierzchni F powinna mieć różną sztywność w różnych obszarach G_v . Trudność eksperymentu polega na konieczności spełnienia warunku, by rzut każdej części błony na płaszczyznę podstawy był niezmienny, co przy dużych ugięciach może nie mieć miejsca.

Problem wyznaczenia naprężeń w stanie granicznym pręta skręcanego o skokowej niejednorodności jest, jak wykazaliśmy, równoważny problemowi zbudowania nad konturem przekroju powierzchni F o skokowo zmiennym spadku. Należy podkreślić, że oba problemy nie mają jednoznacznego rozwiązania. Rozwiązaniem właściwym jest to, które zgodne jest z kinematyką ruchu. Gdy kinematyka ruchu nie jest badana, ze zbioru możliwych rozwiązań należy zgodnie z twierdzeniem o nośności granicznej wybrać to, które daje największą wartość momentu granicznego (największą wartość objętości bryły F)⁽²¹⁾.

Uwagi powyższe są dość oczywiste i jeżeli zostały tu poczynione, to tylko ze względu na specyficzne trudności związane z mnogością rozwiązań dla przekrojów o skokowej niejednorodności. Wybór właściwej kombinacji linii nieciągłości staje się tu znacznie bardziej skomplikowany niż dla ciała jednorodnego.

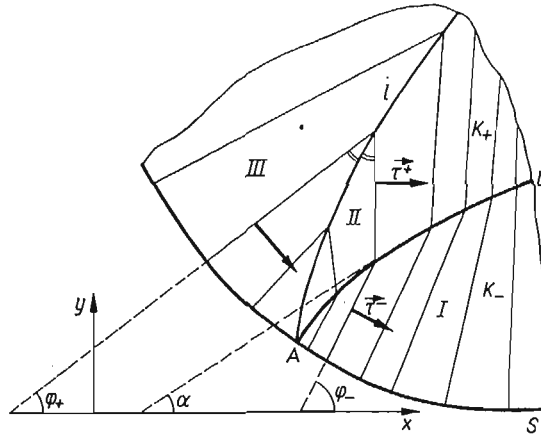
Drugim warunkiem poprawności rozwiązania dla skokowej niejednorodności jest wykazanie, że przy wyrównywaniu się wartości K_μ , K_v , $K_{v\mu}^0$ dochodzimy w granicy do rozwiązania dla ciała jednorodnego.

⁽²¹⁾ Dopiero po dołączeniu tego warunku można nazwać problem skręcania plastycznego problemem statycznie wyznaczalnym.

12. Rozwiązania lokalne

Głównym celem rozwiązania zadania o skręcaniu czysto plastycznym jest wyznaczenie linii nieciągłości naprężeń, odmiennych od linii $L_{\nu\mu}$.

Gdy linia nieciągłości granicy plastyczności przecina brzeg ciała w punkcie A , z tego punktu na ogół propaguje się wewnątrz materiału dodatkową linią nieciągłości naprężeń. Rozpatrzmy kilka sytuacji typowych zakładając, że styczna do brzegu w punkcie A jest jednoznacznie określona.



Rys. 3.5

Zbadamy najpierw przypadek, gdy linia regularna L , dzieląca materiał o granicy plastyczności K_+ , K_- , $K_+ > K_-$ i przecinająca regularny łuk brzegu ciała S w punkcie A położona jest całkowicie po prawej stronie normalnej do S w punkcie A (po stronie K_- , rys. 3.5). Załóżmy również, że spełniony jest warunek (10.1). Linie poślizgu w materiale słabszym są zgodnie z (9.9) prostymi prostopadłymi do brzegu. Z regularności linii S , L wynika, że w otoczeniu punktu A , o wielkości zależnej od kształtu S , L linie poślizgu przecinają linię podziału materiałów tworząc z nią kąt ostry. Otrzymujemy zatem ciągłe pole naprężeń w części K_- otoczenia punktu A , zaznaczonej jako obszar I na rys. 3.5. Ze względu na drugi warunek poprawności rozwiązania (por. p. 11) przyjmujemy, że linia kontaktu L jest linią nieciągłości pierwszego rodzaju. Określa to jednoznacznie wektor τ^+ w każdym punkcie na L , a więc i rodzinę prostych linii poślizgu w materiale mocniejszym w otoczeniu styku z materiałem słabym (obszar II). Przy brzegu ciała linie poślizgu są prostymi ortogonalnymi do niego (obszar III), toteż w materiale mocniejszym powstaje linia nieciągłości naprężeń przechodząca przez punkt A (linia l). Korzystając z oznaczeń wprowadzonych na rys. 3.5 oraz równości (10.5) otrzymujemy bez trudu równanie różniczkowe, określające linię nieciągłości. Ma ono postać

$$(12.1) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left\{ \varphi_+ + \alpha + \arccos \left[\frac{K_-}{K_+} \cos(\varphi_- - \alpha) \right] \right\}.$$

Gdy brzeg S i linia kontaktu L są liniami prostymi, wielkości φ_+ , φ_- , α są stałe i linia nieciągłości jest też prostą. Dla zastosowań istotna jest sytuacja, gdy linia kontaktu po-

krywa się z normalną do brzegu w punkcie A . Wektor τ^- jest wtedy ortogonalny do L , równanie zaś linii nieciągłości ma postać

$$(12.2) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_+ + \alpha_A + \kappa).$$

Gdy w rozwiązaniu przedstawionym na rys. 3.5 zrobimy przejście graniczne $K_- \rightarrow 0$, otrzymujemy klasyczny przypadek linii nieciągłości w materiale K_+ , spowodowanej przez wypukłe naroże. Gdy $K_- \rightarrow K_+$, skoki na obu liniach nieciągłości (liniach L i l) dążą do zera i otrzymujemy ciągłe pole naprężeń.

Bardziej skomplikowany obraz przebiegu linii poślizgu otrzymujemy w przypadku, gdy linia kontaktu przebiega po tej stronie normalnej do brzegu w punkcie A , po której znajduje się mocniejszy materiał. Rozważenie powstających tu sytuacji znajdzie Czytelnik w pracy [13].

Zakładaliśmy dotychczas, że wartość K_0 ($\equiv K_{\mu\nu}$) maksymalnego naprężenia stycznego, które może być przekazane przez linię kontaktu dwu materiałów, jest nie mniejsza od granicy plastyczności słabszego materiału [nierówność (10.1)]. Jest to na ogół oszacowanie za silne; rzeczywistą granicę stosowalności każdego rozwiązania określa nierówność

$$(12.3) \quad K_0 \geqslant \left| \max_L \tau_{nz} \right|,$$

gdzie przez τ_{nz} oznaczono składową normalną wektora τ na linii L . Dla mniejszych wartości K_0 rozwiązania ulegają zmianom.

Należy podkreślić, że rozważane rozwiązania mają charakter lokalny, co znalazło wyraz w sformułowaniach o otoczeniu punktu A . Są one koniecznym środkiem pomocniczym przy budowaniu rozwiązania dla całego przekroju.

13. Nośność graniczna pręta kołowego o niejednorodności skokowej

Zastosujemy otrzymane wyniki do problemu nośności granicznej pręta kołowego o skokowej niejednorodności poprzecznej. Przyjmujemy, że przekrój poprzeczny składa się z n wycinków o kątach rozwarcia γ_v , $\sum_{v=1}^n \gamma_v = 2\pi$, reprezentujących części przyzmatyczne o różnych granicach plastyczności K_v ($v = 1, \dots, n$) (rys. 3.6).

A. Zbudujemy najpierw rozwiązanie lokalne w otoczeniu punktu przecięcia dowolnej linii kontaktu OA_v z brzegiem przekroju. Zakładamy, że dla wszystkich linii OA_v zachodzi warunek (10.1).

W otoczeniu każdego z punktów A mamy przypadek szczególny sytuacji rozważonej w p. 12 (por. rys. 3.5). Przyjmując układ współrzędnych jak na rys. 3.7, mamy $\varphi_+ = \varphi = \arctg y/x$, $\alpha = \pi/2$. Równanie różniczkowe linii nieciągłości naprężeń w obszarze mocniejszym (12.2) przyjmuje postać

$$(13.1) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \kappa \right), \quad \kappa \equiv \arccos \frac{K_-}{K_+}.$$

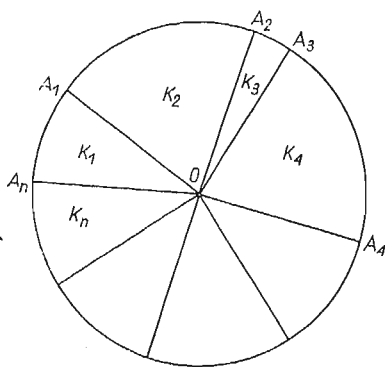
Przechodząc do współrzędnych biegunowych po znanych przekształceniach operacji dy/dx równanie to zapiszemy w postaci:

$$(13.2) \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \kappa \right).$$

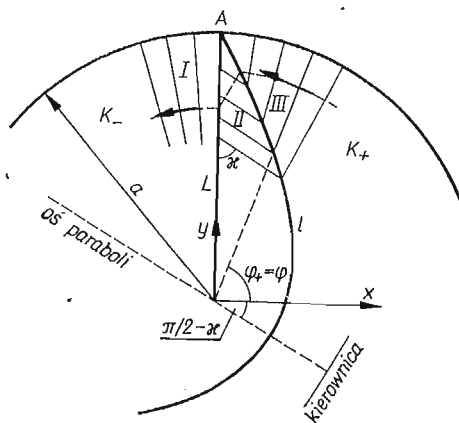
Po scałkowaniu otrzymujemy równanie linii nieciągłości l przechodzącej przez punkt A w postaci

$$(13.3) \quad r = \frac{p}{1 + \cos(\varphi + \varphi_0)}, \quad p = a(1 - \cos \kappa), \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \kappa.$$

Jest to równanie paraboli w układzie biegunowym. Oś paraboli l jest nachylona do osi x pod kątem $-\varphi_0$, ognisko znajduje się w początku układu, odległość wierzchołka od ogniska wynosi $p/2$, rys. 3.7⁽²²⁾.



Rys. 3.6



Rys. 3.7

Funkcja naprężeń wyraża się w poszczególnych obszarach następującymi zależnościami: w obszarze I

$$(13.4) \quad F = K_-(a-r) = K_+(a-r) \cos \kappa,$$

w obszarze II

$$(13.5) \quad F = K_+[r \cos(\varphi + \varphi_0) + a \cos \kappa],$$

w obszarze III

$$(13.6) \quad F = K_+(a-r).$$

W otoczeniu punktu A powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń składa się z trzech płatów: dwóch części stożkowych (13.4) i (13.6) połączonych płaszczyzną (13.5). Równanie paraboli (13.3) można otrzymać przecinając stożek (13.6) płaszczyzną (13.5).

Gdy $K_- \rightarrow K_+$, ($\kappa \rightarrow 0$), mamy $p \rightarrow 0$, $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$; obszar II zanika, linia nieciągłości dąży do OA . $[\tau] \rightarrow 0$ i otrzymujemy w całym otoczeniu A $F \rightarrow K^+(a-r)$.

⁽²²⁾ Rys. 3.7 i dalsze są wykonane dla $K_-/K_+ = 0,5$, $\kappa = 60^\circ$.

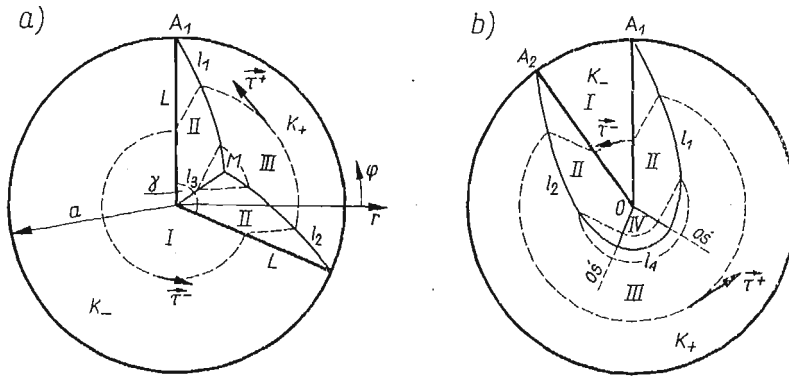
Gdy $K_- \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow \pi/2$), otrzymujemy w granicy rozkład naprężeń w materiale jednorodnym (K_+) z parabolą nieciągłości w otoczeniu naroża utworzonego przez łuk okręgu i prostą prostopadłą, przy czym $p = a$, $\varphi_0 = 0$.

B. Rozpatrzmy w charakterze przykładu najprostsze zadanie o skręcaniu pręta składającego się z dwóch materiałów K_- , K_+ , $K_- < K_+$. Kąt rozwarcia strefy mocniejszej oznaczmy przez γ .

a. Gdy kąt γ spełnia nierówność

$$(13.7) \quad \gamma \leq 2(\pi - \kappa)$$

rozwiązanie ma postać przedstawioną na rys. 3.8. Wynika to z przeprowadzonej analizy rozwiązań lokalnych w otoczeniu punktów A_1, A_2 . Komentarza wymaga jedynie linia nieciągłości l_3 , będąca prostą łączącą punkt M przecięcia łuków parabolicznych l_1, l_2 ze środkiem przekroju i równo nachylona do linii poślizgu w obu obszarach II.



Rys. 3.8

Funkcja naprężeń jest określona w poszczególnych obszarach wzorami (13.4), (13.5) i (13.6). Na rysunku 3.8 pokazano kilka linii $F = \text{const}$ (trajektorie naprężeń stycznych). Dla $\gamma < \pi - 2\kappa$ F ma wartość największą w środku pręta. Gdy $\gamma = \pi - 2\kappa$, linia nieciągłości l_3 ma kierunek trajektorie naprężeń stycznych i F ma wzdłuż niej stałą najwyższą wartość. Gdy $\pi - 2\kappa < \gamma < 2(\pi - \kappa)$ największa wartość F przypada na punkt M .

Moment graniczny na podstawie (3.4) i (5.4) – (5.6) wynosi

$$(13.8) \quad M = 4K_+ \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}}^{\pi/2} \left\{ \int_0^{r(\varphi)} [a \cos \kappa + r \cos(\varphi + \varphi_0)] r dr + \int_{r(\varphi)}^a (a - r) r dr \right\} d\varphi + \frac{K_+ a^3}{3} (2\pi - \gamma) \cos \kappa,$$

gdzie

$$r(\varphi) = p[1 + \cos(\varphi + \varphi_0)]^{-1}.$$

Po przeprowadzeniu całkowania otrzymujemy

$$(13.9) \quad M = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ (2\pi - \gamma) \cos \kappa + \gamma - \frac{2}{3} (1 - \cos \kappa)^3 \left[\frac{(2 - \cos \kappa) \sin \kappa}{(1 - \cos \kappa)^2} - \frac{\left(2 - \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa \right) \right) \sin \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa \right)}{\left(1 - \cos \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa \right) \right)^2} \right] \right\}$$

Przejście graniczne do materiału jednorodnego ($K_- \rightarrow K_+$) na rys. 3.8 i we wzorze (13.9) nie nasuwa żadnych trudności.

Gdy kąt γ osiąga górną dopuszczalną granicę $2(\pi - \kappa)$, prosta linia nieciągłości pokrywa się z osią paraboli. Łuki l_1, l_2 są wówczas styczne w punkcie M i tworzą jedną parabolę.

b. Gdy kąt rozwarcia strefy mocniejszej narasta dalej, tzn. zachodzi nierówność

$$(13.10) \quad \gamma > 2(\pi - \kappa),$$

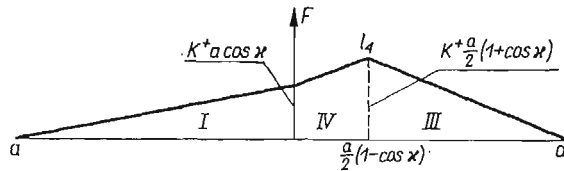
górną strefa II nie ulega żadnym zmianom w stosunku do położenia przy $\gamma = 2(\pi - \kappa)$, druga zaś strefa II obraca się jak «ciało sztywne» wokół punktu O . Zamiast linii nieciągłości l_3 pojawia się w rozwiązaniu nowy obszar IV, rys. 3.8b, ograniczony przez osie symetrii paraboli l_1, l_2 . Linie poślizgu w tym obszarze tworzą wachlarz biegunowy o biegunie O ⁽²³⁾. Rozwartość wachlarza wynosi

$$(13.11) \quad \chi = \gamma - 2(\pi - \kappa).$$

Linia styku l_4 obszarów IV, III jest okręgiem o promieniu, którego wartość wynika z równania paraboli (13.3) i wynosi $p/2$. Okrąg ten jest linią nieciągłości naprężeń.

Funkcja naprężeń w obszarach I, II, III wyraża się nadal wzorami (13.4), (13.5), (13.6). W obszarze IV równanie funkcji naprężeń ustalamy łatwo opierając się na rys. 3.9, na którym pokazano jeden z przekrojów powierzchni F . Otrzymujemy

$$(13.12) \quad F = K_+(r + a \cos \kappa).$$



Rys. 3.9

Na rysunku 3.8.b) zaznaczono linie $F = \text{const}$. Na linii nieciągłości l_4 , F osiąga największą, stałą wartość.

Moment graniczny łatwo obliczyć biorąc wartość drugiego i trzeciego członu we wzorze poprzednim (13.9) dla $\gamma = 2(\pi - \kappa)$ i dodając człony pochodzące od naprężeń

⁽²³⁾ Ilustracją do uwag wypowiedzianych w p. 11 jest fakt, że i w przypadku (13.10) rozwiązanie znalezione w punkcie a) spełnia nadal układ równań (9.1), (9.2), jednakże musi być odrzucone, jako nie dające maksymalnej wartości momentu granicznego.

w obszarach I, IV i części obszaru III o rozwartości χ obliczone w oparciu o rys. 3.9. Otrzymujemy w ten sposób wartość

$$(13.13) \quad M = \frac{K_+ a^3}{3} \left[(2\pi - \gamma) \cos \kappa + \gamma - \frac{2}{3} (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 - \cos \kappa)^3 \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa - \pi \right) \right].$$

Moment graniczny jest tu liniową funkcją kąta γ , co jest oczywiste ze względu na omówiony sposób zachowania się obszarów II. Porównując wzory (13.9), (13.13) lub rys. 3.8a, 3.8b można stwierdzić, że efektywność wykorzystania dodawanego materiału mocnego (przyrost momentu granicznego odniesiony do przyrostu kąta γ) rośnie wraz z kątem γ , stając się stałą i maksymalną dla $\gamma > 2(\pi - \kappa)$.

Przejście graniczne do ciała jednorodnego nie nastrocza żadnych wątpliwości ($K_- \rightarrow K_+$).

Gdy $K_- \rightarrow 0$, otrzymujemy rozwiązanie dla pręta o przekroju w postaci wypukłego wycinka koła (rozwiązanie a) lub koła z wycięciem (rozwiązanie b). Momenty graniczne dla tych przypadków otrzymujemy z (13.9), (13.13) przyjmując $\kappa = \pi/2$, co daje

$$(13.14) \quad M_{K_- = 0} = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ \gamma - \frac{2}{3} \left[2 - \frac{\left(2 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\gamma}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2} \right] \right\}, \quad M_{K_- = 0} = \frac{K_+ a^3}{3} \left(\frac{3}{4} \gamma - 0,5479 \right).$$

Z drugiego wzoru otrzymujemy dla $\gamma = 2\pi$ współczynnik osłabienia przekroju kołowego, rozciętego wzdłuż jednego promienia,

$$M = 0,663 \frac{2\pi K_+ a^3}{3}.$$

Wzór dla $\gamma = \pi$

$$M = 0,228 \frac{2\pi K_+ a^3}{3}$$

wskazuje na to, jaką część momentu granicznego dla pręta o pełnym przekroju kołowym przenosi pręt o przekroju półkolistym.

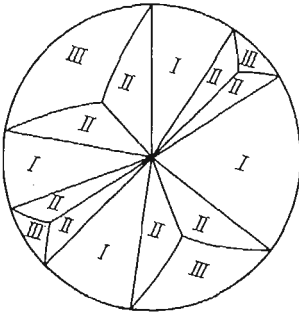
C. Podane rozwiązanie łatwo uogólnić na przypadek, gdy przekrój składa się z $2n$ wycinków zawierających na przemian dwa materiały o wytrzymałości K_- i K_+ . Oznaczmy rozwartość stref mocniejszych przez γ_ν ($\nu = 1, \dots, n$).

Układ linii nieciągłości w każdym wycinku K_+ nie różni się od przedstawionego w p. B. (rys. 3.10). Łatwo zauważyć, że stref z rozwiązaniem B (rys. 3.8b) nie może być więcej niż jedna. Uznając ją za n -tą, mamy bowiem $\gamma_n > 2(\pi - \kappa) > \pi$.

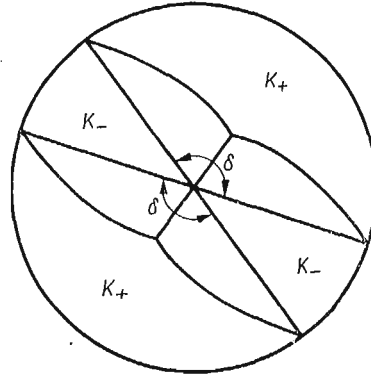
Dla $\gamma_\nu < 2(\pi - \kappa)$ powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń składa się z części jednego stożka w obszarach I (rys. 3.10), części drugiego stożka w obszarach III oraz płaszczyzn w obszarach II.

Moment graniczny łatwo obliczyć na podstawie wzorów (6.9), (6.13). Wynosi on

$$(13.15) \quad M_{2n} = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ \left(2\pi - \sum_1^n \gamma_i \right) \cos \kappa + \sum_1^n \gamma_i - \frac{2n}{3} (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} (1 - \cos \kappa)^3 \sum_1^{n-1} \frac{\sin \left(\frac{\gamma_v}{2} + \kappa \right) \left[2 - \cos \left(\frac{\gamma_v}{2} + \kappa \right) \right]}{\left[1 - \cos \left(\frac{\gamma_v}{2} + \kappa \right) \right]^2} - \frac{1}{2} (1 - \cos \kappa)^3 \left(\frac{\gamma_n}{2} + \kappa - \pi \right) \right\}.$$



Rys. 3.10



Rys. 3.11

Dla przypadku symetrycznego podziału na cztery strefy, $\gamma_1 = \gamma_2 = \delta$ (rys. 3.11) otrzymujemy

$$(13.16) \quad M_4 = \frac{K_+ a^3}{3} \left\{ 2(\pi - \delta) \cos \kappa + 2\delta - \frac{4}{3} (1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} (1 - \cos \kappa)^3 \frac{\sin \left(\frac{\delta}{2} + \kappa \right) \left[2 - \cos \left(\frac{\delta}{2} + \kappa \right) \right]}{\left[1 - \cos \left(\frac{\delta}{2} + \kappa \right) \right]} \right\}.$$

Interesujące są dwa przejścia graniczne w tym wzorze, $\delta \rightarrow 0$ i $\delta \rightarrow \pi$. W pierwszym przypadku otrzymujemy przekrój «wzmocniony» wzdłuż jednej średnicy; w wyrażeniu na nośność znoszą się odpowiednie człony i otrzymujemy nośność przekroju jednorodnego. W drugim przypadku otrzymujemy przekrój osłabiony wzdłuż jednej średnicy⁽²⁴⁾; moment graniczny ulega zmniejszeniu i wynosi

$$(13.17) \quad M = \frac{2\pi K_+ a^3}{3} \left\{ 1 - \frac{4}{3\pi} \left[(1 - \cos \kappa) (2 - \cos \kappa) \sin \kappa - \frac{(1 - \cos \kappa)^3 \cos \kappa (2 + \sin \kappa)}{(1 + \sin \kappa)^2} \right] \right\}.$$

⁽²⁴⁾ Przypadkiem szczególnym przekroju osłabionego wzdłuż pewnych linii jest przekrój z rozcięciami. Nośność graniczną takich przekrojów badał eksperymentalnie na podstawie analogii Nádai F. A. Mc CLINTOCK [34].

Otrzymany wynik można ująć w następujący sposób: sklejenie pręta wzdłuż powierzchni symetrii klejem słabszym od materiału zawsze osłabia pręt, zaś sklejenie klejem mocniejszym od materiału nie może go wzmocnić ⁽²⁵⁾

Rozpatrzmy sytuację, gdy liczba części, na które zostaje rozbity materiał mocniejszy, wzrasta do nieskończoności, przy czym rozwartość każdego wycinka γ_v dąży do zera.

Zachodzi następujące twierdzenie: gdy $\sum_1^n \gamma_v = \Gamma = \text{const}$, zaś $\max \gamma_v \rightarrow 0$, to bez względu na ilość materiału mocnego Γ oraz sposób jego podziału nośność pręta dąży do wartości odpowiadającej prętowi jednorodnemu z materiału słabszego.

Wypowiedziane twierdzenie jest intuicyjnie oczywiste, jeżeli uzmysłowić sobie kierunek działania wektora naprężenia τ lub wyobrazić sposób zachowania się powierzchni reprezentującej funkcję naprężeń F .

Dowód formalny jest jednak niezupełnie trywialny i polega na wykazaniu, że dla sumy A wyrazu trzeciego i czwartego we wzorze (13.15) mamy

$$(13.18) \quad \lim_{\max \gamma_k \rightarrow 0} A = -(1 - \cos \kappa) \Gamma.$$

Technika dowodu będzie najprostsza, gdy wprowadzimy $\gamma_{sr} \equiv \Gamma/n$ oraz $\Delta\gamma_v \equiv \gamma_v - \gamma_{sr}$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\sup \gamma_k \rightarrow 0} A &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\gamma_v \rightarrow 0}} -\frac{2}{3}(1 - \cos \kappa) \left\{ n(2 - \cos \kappa) \sin \kappa - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \cos \kappa)^2 \sum_{v=1}^n \frac{\sin \left(\frac{\Gamma}{2n} + \kappa + \Delta\gamma_v \right) \left[2 - \cos \left(\frac{\Gamma}{2n} + \kappa + \Delta\gamma_v \right) \right]}{\left[1 - \cos \left(\frac{\Gamma}{2n} + \kappa + \Delta\gamma_v \right) \right]^2} \right\} = \\ &= -\frac{2}{3}(1 - \cos \kappa) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ (2 - \cos \kappa) \sin \kappa - (1 - \cos \kappa)^2 \frac{\left[2 - \cos \left(\frac{\Gamma}{2n} + \kappa \right) \right] \sin \left(\frac{\Gamma}{2n} + \kappa \right)}{\left[1 - \cos \left(\frac{\Gamma}{2n} + \kappa \right) \right]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Usuując otrzymaną nieoznaczoność $\infty \cdot 0$ otrzymujemy

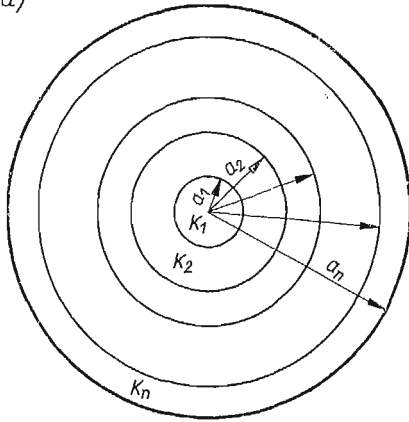
$$\lim_{\max \gamma_k \rightarrow 0} A = -\frac{2}{3}(1 - \cos \kappa) \lim_{s = \frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{3\Gamma(1 - \cos \kappa)^2}{2 \left[1 - \cos \left(\frac{\Gamma}{2} s + \kappa \right) \right]^2} = -(1 - \cos \kappa) \Gamma.$$

D. W oparciu o przedstawione wyniki można rozważyć również pręty składające się z wycinków, gdy liczba materiałów jest większa od dwóch. Ogólny tok postępowania

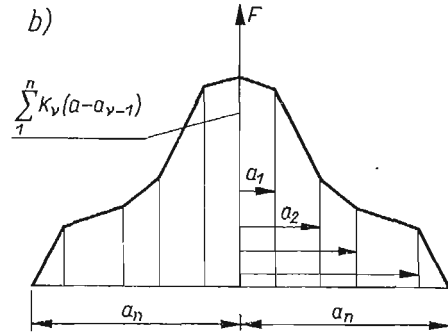
⁽²⁵⁾ Jest to wzmocniona wersja twierdzenia ogólniejszego o zmianie granicy plastyczności na zbiorze miary zero: podwyższenie granicy plastyczności na zbiorze miary zero nie zmienia nośności ciała, zmniejszenie zaś nie może jej zwiększyć. Twierdzenie to jest intuicyjnie widoczne, jednakże autorowi nie udało się udowodnić pierwszej jego części w ogólnym przypadku stanu trójwymiarowego.

polega na wykorzystaniu rozwiązania lokalnego znajdującego w p. A oraz na rozpoczęciu badania rozwiązania od najsłabszej części, w której brak jest linii nieciągłości.

a)



b)



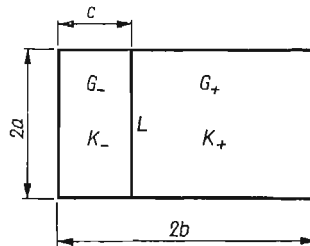
Rys. 3.12

Przypadek gdy pręt kołowy składa się z koncentrycznych cylindrów (rys. 3.12a) ma trywialne rozwiązanie. Przekrój powierzchni naprężeń F przedstawiony jest na rys. 3.12b. Moment graniczny wynosi

$$(13.19) \quad M = \frac{2\pi}{3} \sum_{v=1}^n K_v (a_v^3 - a_{v-1}^3).$$

14. Nośność graniczna pręta prostokątnego

Rozważmy skręcany pręt o przekroju przedstawionym na rys. 3.13. Prostokąt $2a \times 2b$ podzielony jest linią kontaktu L prostopadłą do brzegu o długości $2b$ na dwa obszary G_- , G_+ o szerokości c oraz $2b-c$. Materiały w obszarach G_- , G_+ mają stałe ale różne granice plastyczności K_- , K_+ , $K_- < K_+$. Wytrzymałość samego złącza charakteryzuje



Rys. 3.13

trzecia liczba K_0 równa maksymalnemu naprężeniu stycznemu, które może być przekazane przez powierzchnię kontaktu. W dalszym ciągu przyjmiemy, że zachodzi kontakt z idealną przyczepnością, tzn.

$$(14.1) \quad K_0 \geq K_-,$$

co wyłącza liczbę K_0 z dalszych rozważań.

Zadanie charakteryzują trzy niezależne parametry, np. następujące:

$$(14.2) \quad 0 \leq \eta = \frac{K_-}{K_+} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{a}{b} \leq \infty, \quad 0 \leq \frac{c}{b} \leq 2,$$

które można nazwać odpowiednio parametrem *niejednorodności*, parametrem *kształtu* i parametrem *podziału*.

W rozważanym zadaniu naturalnym układem odniesienia jest układ kartezjański. Składowe wektora naprężenia stycznego

$$(14.3) \quad \boldsymbol{\tau} = \tau_{xz} \mathbf{i}_x + \tau_{yz} \mathbf{i}_y,$$

muszą spełniać równanie równowagi

$$(14.4) \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0,$$

warunek plastyczności

$$(14.5) \quad |\boldsymbol{\tau}|^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \begin{cases} K_-^2 & \text{w } G_-, \\ K_+^2 & \text{w } G_+ \end{cases}$$

i warunek brzegowy $\tau_{tz} = 0$ na brzegu przekroju.

Na linii kontaktu L musi być spełniony warunek ciągłości składowej normalnej

$$(14.6) \quad \boldsymbol{\tau}_+ \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_- \mathbf{n},$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem prostopadłym do L . Na linii kontaktu mamy zatem nieciągłość naprężeń, a wektor naprężenia stycznego doznaje obrotu.

Wzory (9.5) przybierają postać:

$$(14.7) \quad \tau_{xz} = F_{,y}, \quad \tau_{yz} = -F_{,x},$$

a z warunku (9.6) mamy

$$(14.8) \quad |\text{grad} F| = \begin{cases} K_- & \text{w } G_-, \\ K_+ & \text{w } G_+. \end{cases}$$

Problem wyznaczenia naprężeń spełniających (14.4) i (14.5) jest zatem równoważny zbudowaniu powierzchni ciągłej $F(x, y)$ o stałym, ale różnym w G_- , G_+ spadku.

Moment graniczny określa wzór (11.4).

Rozwiązania lokalne w otoczeniu punktu A pokazane na rysunku 3.14 wynikają z rozwiązania znalezionej wcześniej (p. 12) jako przypadek szczególny. Tak więc

$$(14.9) \quad \tau_{xz}^I = K_-, \quad \tau_{yz}^I \equiv 0,$$

$$(14.10) \quad \tau_{yz}^{II} = K_+ \cos \varkappa, \quad \tau_{xz}^{II} = K_+ \sin \varkappa,$$

$$(14.11) \quad \tau_{xz}^{III} = K_+, \quad \tau_{yz}^{III} \equiv 0.$$

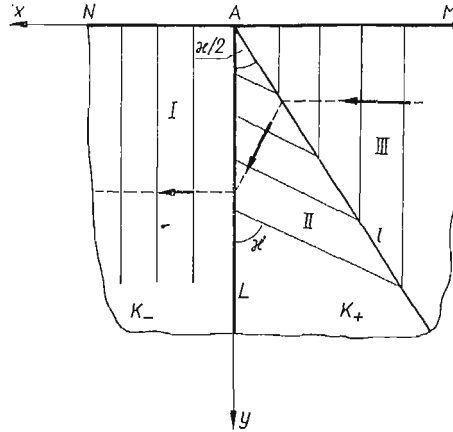
Wektor $\boldsymbol{\tau}^{II}$ o module K_+ jest obrócony względem wektora $\boldsymbol{\tau}^I$ o module K_- o kąt

$$(14.12) \quad \varkappa = \arccos \eta, \quad 0 \leq \varkappa \leq \frac{\pi}{2}.$$

Na rysunku 3.14 podano linie poślizgu ortogonalne w każdym punkcie do $\boldsymbol{\tau}$ oraz jedną z trajektorii wektora $\boldsymbol{\tau}$. Powierzchnia $F(x, y)$ składa się w otoczeniu A z trzech płatów płaszczyzn.

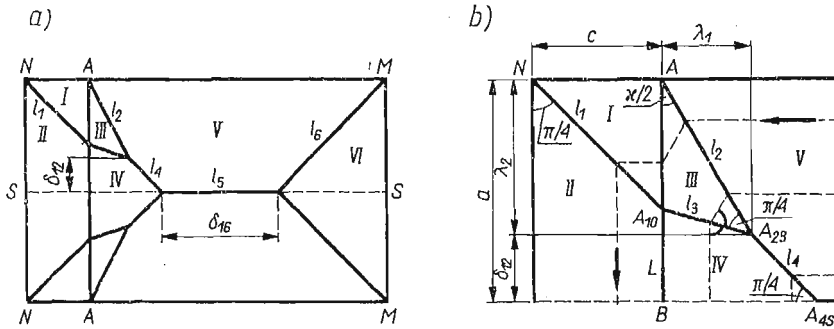
W zależności od wartości parametrów η , a/b , c/b zadanie o nośności granicznej rozważanego pręta ma pięć różnych rozwiązań.

Rozwiązanie I (rys. 3.15). Z naroża N wychodzi linia nieciągłości l_1 , dzieląca strefę słabszą na obszary I, II, w których linie poślizgu są prostopadłe odpowiednio do NA i NS . Ze względu na warunek maksimum momentu granicznego zakładamy, że



Rys. 3.14

w strefie słabszej brak jest innych linii nieciągłości i l_1 przecina linię kontaktu L w pewnym punkcie A_{10} . W otoczeniu punktu A mamy sytuację przedstawioną na rys. 3.14, linia nieciągłości l_2 jest nachylona do L pod kątem $\alpha/2$. W obszarze III linie poślizgu są prostymi równoległymi⁽²⁶⁾, tworzącymi z L kąt α . Na odcinku $A_{10}B$ linii L wektor τ^- działa



Rys. 3.15

równoległe do L , toteż i wektor τ^+ działa równoległe (por. rys. 3.4), a zatem linie poślizgu w obszarze IV są prostopadłe do $A_{10}B$. Z punktu A_{10} propaguje się linie ciągłości, l_3 , będącą dwusieczną kąta, który tworzą ze sobą linie poślizgu z obszarów III, IV. Linie poślizgu l_2 , l_3 przecinają się w pewnym punkcie A_{23} . Ponieważ w obszarze V linie

⁽²⁶⁾ W rozważanym zadaniu występować będą tylko obszary z równoległymi liniami poślizgu, toteż nie będziemy w dalszym ciągu tego zaznaczać. Odpowiednie płyty powierzchni reprezentującej funkcję naprężeń F będą, jak to wynika z (9.6), płaszczyznami.

poślizgu są prostopadłe do brzegu AM , w obszarze zaś IV są one prostopadłe do $A_{10}B$, to z punktu A_{23} wychodzi linia nieciągłości l_4 nachylona do nich pod kątem $\pi/4$. Przecina ona oś symetrii w punkcie A_{45} . Linie nieciągłości l_5, l_6 nie wymagają komentarzy.

Charakterystyczne wymiary i kąty łatwo ustalić w oparciu o powyższą analizę; podane one są na rys. 3.15b.

Powierzchnia reprezentująca funkcję naprężeń F składa się z płatów płaszczyzn, odmiennych w każdym z zaznaczonych obszarów. Linie nieciągłości l_i ($i = 1, \dots, 6$) są odcinkami rzutów prostych, wzdłuż których przecinają się odpowiednie płyty F . Wystarczającą informację o powierzchni F dają rzędne punktów A_{10}, A_{23}, A_{45} :

$$(14.13) \quad F_{10} = K+c\cos\kappa, \quad F_{23} = \frac{1}{2}K+c(1+\sin\kappa+\cos\kappa), \quad F_{45} = K+a$$

oraz zaznaczone na rys. 3.15b linie $F = \text{const}$, tzn. trajektorie naprężeń stycznych. Funkcja F osiąga największą stałą wartość na linii nieciągłości l_5 .

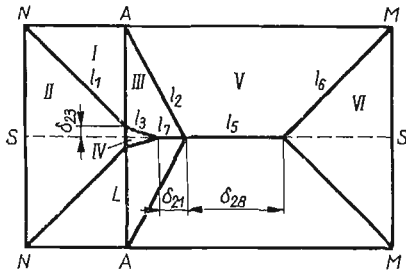
Moment graniczny można znaleźć w oparciu o wzór (6.9).

Gdy c jest małe w porównaniu z a, b , układ linii nieciągłości l_1, l_2, l_3 mieści się w niewielkim otoczeniu naroża N i zakłóca nieznacznie rozwiązanie dla ciała jednorodnego.

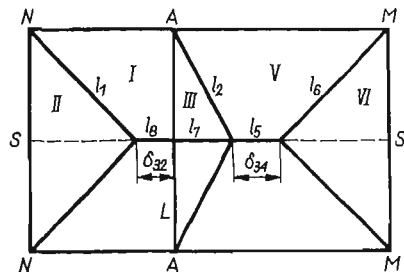
Otrzymane rozwiązanie jest słuszne, gdy punkt A_{23} leży powyżej osi symetrii, a odcinek l_5 nie znika. Obliczając odpowiednie odległości zaznaczone na rys. 3.15b otrzymujemy nierówności

$$(14.14) \quad \begin{cases} \delta_{12} \geq 0_{II}, & \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(1+\sin\kappa+\cos\kappa)\frac{c}{b} \geq 0, \\ \delta_{16} \geq 0_{II}, & 1 - \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(1+\cos\kappa)\frac{c}{b} \geq 0. \end{cases}$$

Rozwiązania 2-9 przedstawione są na rysunkach (3.16)-(3.23). Szczegóły rachunkowe znajdzie Czytelnik w pracy [14].



Rys. 3.16

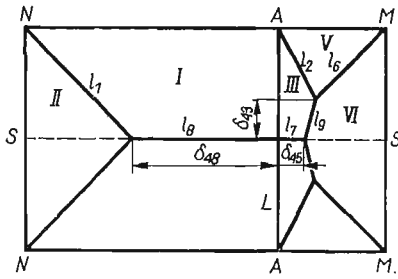


Rys. 3.17

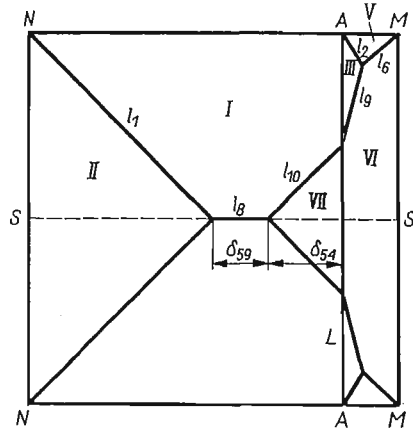
Wielkości $\delta_{\nu\mu}$ ($\nu, \mu = 1, \dots, 9$) dobrano w ten sposób, że zmianie znaku $\delta_{\nu\mu}$ odpowiada przejście od ν -tego do μ -tego rozwiązania. Na ogół $\delta_{\nu\mu} \neq \delta_{\mu\nu}$. Te same obszary i ta sama linia ciągłości zaznaczone są jednakowymi numerami na wszystkich rysunkach. Rzędne

powierzchni F_{kl} w punktach A_{kl} ($k, l = 1, \dots, 9, 10, s$) są takie same we wszystkich rozwiązaniach, w których występuje punkt A_{kl} , i wynoszą:

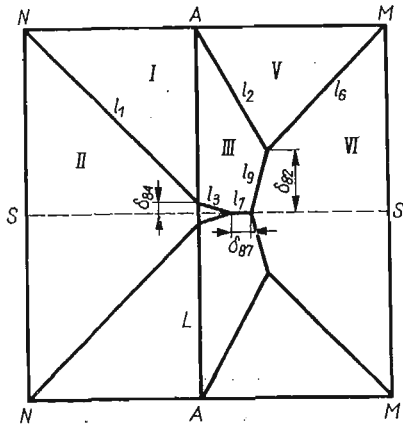
$$(14.15) \quad \begin{aligned} F_{3s} &= K_+ \frac{\cos \kappa}{1 - \sin \kappa} (a - c \sin \kappa), & F_{1s} &= F_B = K_+ a \cos \kappa, \\ F_{9s} &= K_+ \frac{a \cos \kappa + (2b - c) \sin \kappa}{1 + \sin \kappa}, & F_{26} &= K_+ (2b - c) \frac{1 + \cos \kappa}{1 + \sin \kappa + \cos \kappa}, \\ F_{90} &= K_+ (2b - c), & F_{10s} &= K_+ a \cos \kappa, \\ F_{46} &= F_{93} = F_{1,10} = K_+ \left[b - \frac{c}{2} (1 - \cos \kappa) \right]. \end{aligned}$$



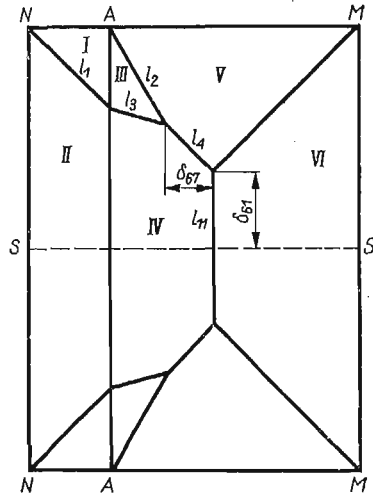
Rys. 3.18



Rys. 3.19



Rys. 3.20



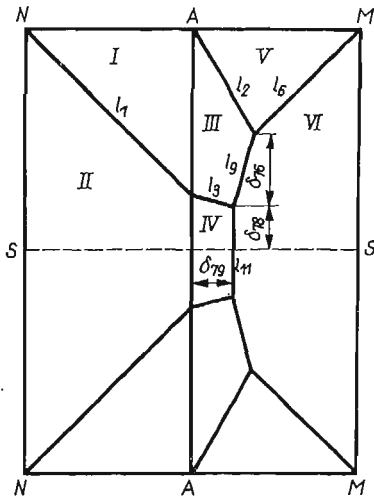
Rys. 3.21

Równania $\delta_{\nu\mu} = 0$ dają proste w płaszczyźnie $\eta = \text{const}$, dzielące obszar parametrów a/b , c/b na dziewięć stref słuszności poszczególnych rozwiązań. (rys. 3.24). Punkty charakterystyczne A_1 , A_2 , A_3 mają współrzędne

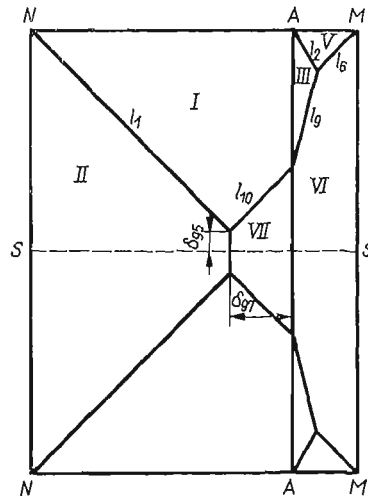
$$(14.16) \quad A_1: \quad \frac{a}{b} = \frac{1 + \sin \kappa + \cos \kappa}{2 + \sin \kappa}, \quad \frac{c}{b} = \frac{2}{2 + \sin \kappa},$$

$$(14.17) \quad A_2: \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{1 + \cos \kappa}{1 + \sin \kappa + \cos \kappa},$$

$$(14.18) \quad A_3: \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{2}{1 + \cos \kappa}.$$



Rys. 3.22



Rys. 3.23

Rozwiązania podstawowe odpowiadające punktom (14.16), (14.17) i (14.18) mają następujące dwie ciekawe własności:

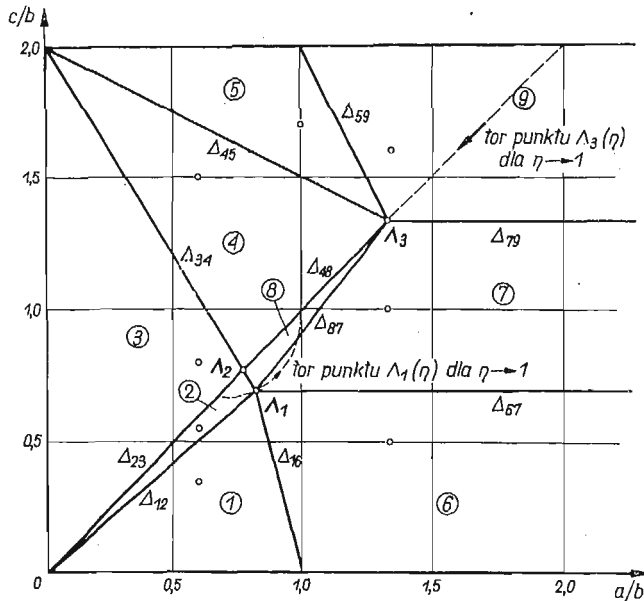
1. Z rozwiązań A_1 , A_2 , A_3 , przedstawionych na rys. 3.25, można otrzymać przez nieznaczne zmiany parametrów a/b , c/b wszystkie dziewięć rozwiązań rozpatrywanego zadania.

2. Podział płaszczyzny $\eta = \text{const}$ na obszary stosowności poszczególnych rozwiązań jest jednocześnie określony przez podanie punktów $A_1(\lambda)$, $A_3(\lambda)$. Łącząc punkt A_1 z punktami $\{0, 0\}$, $\{1, 0\}$, $\{\infty, 1\}$ ⁽²⁷⁾, A_3 , $\{0, 2\}$ otrzymujemy odcinki Δ_{12} , Δ_{16} , Δ_{67} , Δ_{78} , Δ_{23} (Δ_{34}). Łącząc punkt A_3 z punktami $\{0, 0\}$, $\{\infty, 1\}$ ¹⁾, $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$ otrzymujemy odcinki Δ_{23} (Δ_{48}), Δ_{79} , Δ_{59} Δ_{45} oraz położenie punktu A_2 .

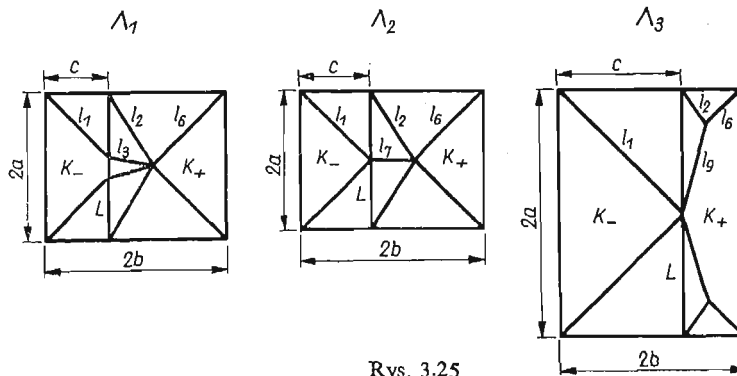
Wpływ wartości η na układ stref 1, ..., 9 w płaszczyźnie $\eta = \text{const}$ sprowadza się więc do ruchu punktów A_1 , A_3 : gdy $\eta = K-/K+$ rośnie od 0 do 1, punkt A_1 porusza się po krzywej o równaniach parametrycznych (14.16) (krzywa przerywana na rys. 3.24) od położenia $\{2/3, 2/3\}$ do $\{1, 1\}$, zaś punkt A_3 porusza się wzdłuż prostej $a = c$ od $\{2, 2\}$ do $\{1, 1\}$ zgodnie z (14.18).

⁽²⁷⁾ Oznaczamy w ten sposób punkt niewłaściwy.

Ostatnia okoliczność ogromnie upraszcza korzystanie z otrzymanych wyników w obliczeniach praktycznych. Mając dany stosunek granic plastyczności materiałów ustalamy położenie punktów Λ_1 , Λ_3 , prowadzimy proste $\Delta_{\nu\mu}$, ustalamy dla danych parametrów a/b , c/b numer rozwiązania i obliczamy moment graniczny opierając się na podanych wartościach F .



Rys. 3.24



Rys. 3.25

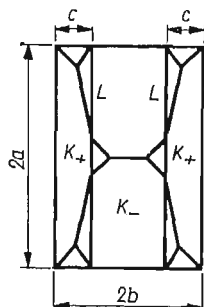
Zauważmy, że występowanie rozwiązań podstawowych typu Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 , jest w ogóle charakterystyczne dla problemów skokowej niejednorodności (por. p. 7).

Można wysunąć szereg wniosków co do klasyfikacji prętów rozpatrzonej klasy. Wskażemy jedynie, że

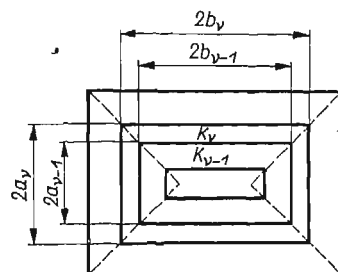
dla $\frac{a}{b} < \frac{2}{3}$ mamy tylko rozwiązania 1, 2, 3, 4, 5,

dla $\frac{a}{b} > 2$ mamy tylko rozwiązania 6, 7, 9.

Przedstawione kompletne rozwiązanie prostego przykładu z rys. 3.13 pozwala na analizę innych zadań dla prętów prostokątnych o skokowej niejednorodności. Dla przykładu na rys. 3.26 podano w oparciu o rozwiązanie 5 przebieg linii nieciągłości w przekroju pręta wzmocnionego dwoma symetrycznymi nakładkami o szerokości $c \ll a$.



Rys. 3.26



Rys. 3.27

Przypadek, gdy przekrój pręta jest podzielony na n części przez prostokąty o pokrywających się dwusiecznych kątów wierzchołkowych, rys. 3.27, ma trywialne rozwiązanie. Moment graniczny wynosi

$$(14.19) \quad M = \frac{4}{3} \sum_{v=1}^n K_v [a_v^2(3b_v - a_v) - a_{v-1}^2(3b_{v-1} - a_{v-1})].$$

Skokowa niejednorodność plastyczna prowadzi do istotnych zmian w układzie linii poślizgu, przy czym nawet najprostsze zadania w rodzaju rozważonego powyżej ulegają niespodziewanie dużym komplikacjom. Podobna okoliczność ma również miejsce, jak widzieliśmy, dla płaskiego stanu odkształcenia ciał o skokowej niejednorodności.

IV. Nośność graniczna płyt kołowych o skokowej niejednorodności⁽²⁸⁾

15. Sformułowanie problemu

W niniejszym rozdziale zreferujemy pokrótce wyniki pracy [15], w której rozważono pewne przykłady z dziedziny nośności granicznej płyt o skokowej niejednorodności. W ramach założeń teorii nośności granicznej [35] własności mechaniczne płyty, zdefiniowane dla pewnego punktu powierzchni środkowej, uważamy za całkowicie określone, jeżeli podany jest kształt tzw. powierzchni granicznej w przestrzeni momentów zginających M_{11} , M_{22} , M_{12} tzn. związek $F(M_{\alpha\beta}, C_v) = 0$. Płytą o skokowej niejednorodności nazwiemy taką płytę, której powierzchnia środkowa podzielona jest na n obszarów G_μ stałych wewnątrz każdego obszaru, lecz różnych dla dwu sąsiadujących obszarów o kształtach powierzchni granicznej, $F_\mu = 0$ ($\mu = 1, \dots, n$). Najczęściej postać funkcji F_μ

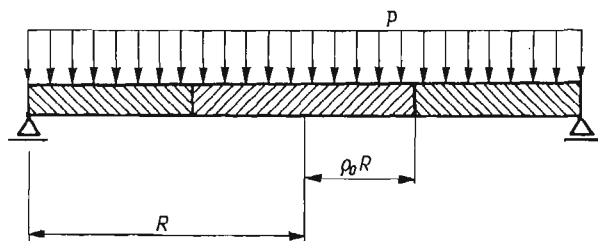
⁽²⁸⁾ W rozdziale tym zreferujemy część wyników uzyskanych wspólnie z J. A. KÖNIGIEM i przedstawionych w pracy [15].

(jako funkcji $M_{\alpha\beta}$) można uznać za jednakową dla całej płyty, natomiast obszary G_μ różnią się wartościami modułów C_ν . W tym przypadku skokowa niejednorodność opisywana jest przez odcinkowo-stałe funkcje $C_\nu(x_1, x_2)$, gdzie x_1, x_2 są współrzędnymi w powierzchni środkowej.

Przyczyny, dla których dwie sąsiadujące części płyty mają różną wytrzymałość, mogą mieć rozmaity charakter. W najprostszym przypadku płyty izotropowej, jednorodnej po grubości, o równaniu powierzchni granicznej $F = M_{11}^2 - M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 3M_{12}^2 - M_0^2 = 0$, mamy $M_0 = \sigma_0 H^2$, gdzie σ_0 jest granicą plastyczności, H grubością płyty. Skok M_0 może być więc spowodowany bądź skokiem σ_0 , bądź skokiem H . Innym przykładem może być rozmaita struktura dwu części płyty wzdłuż grubości. Jako typowy przykład niejednorodności skokowej w płycie ortotropowej może służyć skokowa zmiana ilości zbrojenia w płycie żelbetowej.

Praca jest oparta na podstawowych założeniach teorii nośności granicznej płyt (por. np. [35]). W szczególności nie są w niej analizowane lokalne trójwymiarowe stany naprężenia i deformacji w otoczeniu powierzchni kontaktu części o różnych własnościach mechanicznych.

Rozpatrywać będziemy płytę kołową, złożoną z dwu koncentrycznych części o różnych własnościach mechanicznych. Rozpatrzmy prosty przypadek, gdy płyta jest obciążona równomiernym ciśnieniem p , a jej brzeg jest swobodnie podparty (rys. 4.1).



Rys. 4.1

Zajmiemy się początkowo płytami izotropowymi. Przyjmiemy, że słuszny jest związek graniczny między momentem promieniowym $m_r = M_r/M_0$ i momentem obwodowym $m_\varphi = M_\varphi/M_0$, gdzie M_0 jest momentem granicznym dla części silniejszej, wynikający z warunku plastyczności Treski, tzn.

$$(15.1) \quad F = \max\{|m_r - m_\varphi|, |m_r|, |m_\varphi|\} - f(\varrho) = 0.$$

Stowarzyszone z nim prawo płynięcia ma postać

$$(15.2) \quad \dot{m}_r = -\dot{w}'' = \frac{\partial F}{\partial m_r}, \quad \dot{m}_\varphi = -\frac{\dot{w}'}{\varrho} = \frac{\partial F}{\partial m_\varphi},$$

gdzie $\dot{m}_r, \dot{m}_\varphi$ są prędkościami zmiany krzywizny powierzchni środkowej pomnożonymi przez R^2 , R jest promieniem płyty, ϱ jest promieniem bieżącym odniesionym do R , przecinek oznacza różniczkowanie po ϱ .

Skokową niejednorodność płyty opisuje funkcja $f(\varrho)$. Dla płyty o słabym środku

$$(15.3) \quad f(\varrho) = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1);$$

dla płyty o silniejszym środku

$$(15.4) \quad f(\varrho) = I(0, \varrho_0) + \eta I(\varrho_0, 1),$$

gdzie

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varrho_0 \leq 1,$$

$I(a, \beta)$ zaś jest impulsem prostokątnym.

Impuls prostokątny definiuje się jako funkcję

$$(15.5) \quad I(a, \beta) \equiv H(x-a) - H(x-\beta) \equiv \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x < \beta, \quad a < \beta, \\ 0, & \beta \leq x \end{cases}$$

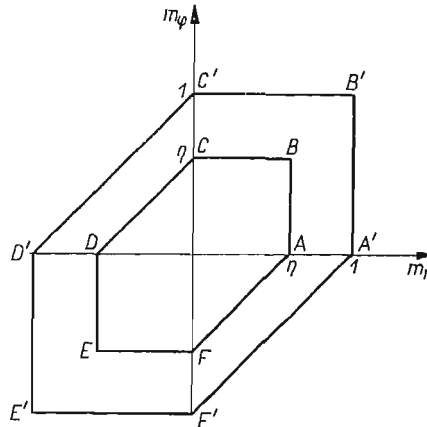
gdzie $H(x)$ jest jednostkową funkcją Heaviside'a (por. p. 7). W tych przypadkach, gdy funkcja $I(a, \beta)$ będzie nie tylko środkiem dla skrócenia i czytelności zapisu, lecz także narzędziem rachunkowym (p. 16,17), wykorzystane będą następujące oczywiste związki:

$$(15.6) \quad I(a, \beta) I(\gamma, \delta) = I(\gamma, \beta), \quad a < \gamma < \beta < \delta,$$

$$(15.7) \quad \int_0^x f(t) I(a, \beta) dt = I(a, \beta) \int_0^x f(t) dt + I(\beta, 1) \int_0^\beta f(t) dt, \quad 0 < a < \beta < 1,$$

$$(15.8) \quad \frac{d}{dx} [f(x) I(a, \beta)] = f'(x) I(a, \beta) + f(a) \delta(x-a) - f(\beta) \delta(x-\beta),$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją Diraca (por. p. 7).



Rys. 4.2

Wielkość ϱ_0 nazywać będziemy w dalszym ciągu *parametrem podziału*, wielkość η , określającą stosunek momentów granicznych, *parametrem niejednorodności* (rys. 4.2).

Równanie równowagi ma postać

$$(15.9) \quad m'_r + \frac{1}{\varrho} (m_r - m_\varphi) = -\frac{1}{2} q \varrho, \quad q \equiv \frac{p R^2}{M_0},$$

a warunki brzegowe

$$(15.10) \quad \varrho = 1: \quad \dot{w} = m_r = 0,$$

$$(15.11) \quad \varrho = 0: \quad m_r = m_\varphi.$$

Celem naszym będzie zbadanie wpływu parametrów ϱ_0 , η na wielkość obciążenia granicznego i na kinematykę początkowego niepowstrzymanego ruchu plastycznego płyty.

16. Płyta izotropowa o słabszym środku

Gdy η jest bliskie 1, to bez względu na wartość ϱ_0 rozwiązanie powinno być bliskie dobrze znanemu rozwiązaniu dla płyty jednorodnej [35].

Rozwiązanie 1. Przyjmujemy, że profil naprężenia $\{m_r(\varrho), m_\varphi(\varrho)\}$ leży na boku BC dla części środkowej i boku $B'C'$ dla części zewnętrznej, tzn.

$$(16.1) \quad m_\varphi = f(\varrho) = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1).$$

Skok m_φ na $\varrho = \varrho_0$ jest statycznie dopuszczalny. Podstawiając (3.1) do (2.9) i korzystając z warunku (2.11) mamy

$$(16.2) \quad m_r = -\frac{q}{6}\varrho^2 + \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho \{\eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1)\} d\varrho = \\ = \left(\eta - \frac{q}{6}\varrho^2 \right) I(0, \varrho_0) + \left[1 - \frac{q}{6}\varrho^2 - \frac{\varrho_0}{\varrho}(1-\eta) \right] I(\varrho_0, 1).$$

Wartość obciążenia granicznego wynika z drugiego warunku (15.10) i wynosi

$$(16.3) \quad q_1 = 6[1 - \varrho_0(1-\eta)].$$

Na podstawie (2.2) i (2.10) otrzymujemy dla całej płyty $\dot{\kappa}_r = 0$ i

$$(16.4) \quad \dot{w} = \dot{w}_0(1-\varrho),$$

a więc kinematyka zniszczenia pokrywa się z kinematyką dla płyty jednorodnej. Dla $\varrho_0 = 0$ i $\eta = 1$ wyrażenia (16.1), (16.2) i (16.3) dają również znane rozwiązanie tego przypadku.

Profil naprężenia wygodnie jest przedstawić w trójwymiarowej przestrzeni m_r , m_φ , ϱ . Zależność graniczna (15.1), (15.3) i (15.4) przyjmuje w tej przestrzeni postać powierzchni przedstawionej na rys. 4.3. Powierzchnię tę będziemy w dalszym ciągu nazywać *powierzchnią własności mechanicznych*.

Przejdźmy do określenia zakresu słuszności podanego rozwiązania. Łatwo stwierdzić, że $m_r(\varrho)$ monotonicznie maleje od wartości η dla $\varrho = 1$ do 0 dla $\varrho = 0$, jeżeli $2\varrho_0^3(1-\eta) - 2\varrho_0^2 + (1-\eta) \leq 0$.

Gdy natomiast $2\varrho_0^3(1-\eta) - 2\varrho_0^2 + (1-\eta) > 0$, wtedy mamy

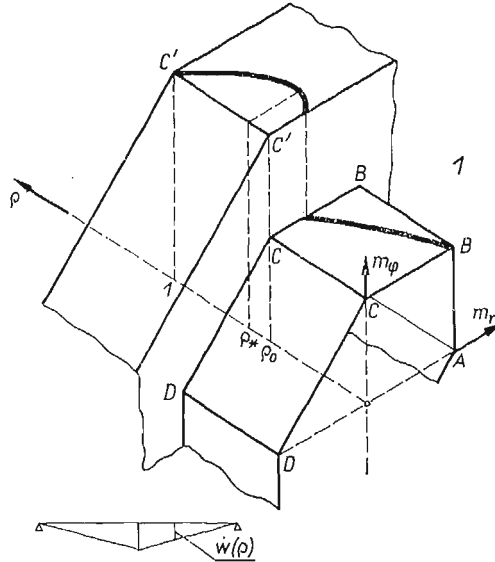
$$(16.5) \quad m'_r = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = \varrho_* \equiv \{\varrho_0(1-\eta)/2[1-\varrho_0(1-\eta)]\}^{1/3} > \varrho_0,$$

a więc m_r osiąga analitycznie maksimum dla $\varrho = \varrho_*$, $\varrho = 0$ i nieanalityczne minimum dla $\varrho = \varrho_0$, rys. 4.3. Oznacza to, że η jest dla danego ϱ_0 na tyle małe, że następuje częściowe

zamocowywanie się strefy słabszej w zewnętrznej części mocniejszej. Rozwiązanie będzie więc słuszne, gdy

$$(16.6) \quad m_r(\varrho_0) \geq 0 \quad f_{12} \equiv \eta - (\varrho_0^2 - \varrho_0^3)/(1 - \varrho_0^3) \geq 0.$$

Można przekonać się ponadto, że warunek $m_r(\varrho_*) \leq 1$ jest spełniony zawsze.



Rys. 4.3

R o z w i ą z a n i e II. Gdy parametry podziału ϱ_0 lub niejednorodności η nie spełniają nierówności (3.6), w obu częściach płyty pojawiają się strefy ujemnych momentów m_r . Stany naprężenia w przedziałach $(0, \xi_1)$, (ξ_1, ϱ_0) , (ϱ_0, ξ_2) , $(\xi_2, 1)$ odpowiadają kolejno bokom BC , CD , $C'D'$, $B'C'$, co przy użyciu funkcji impulsu można zapisać jednym wzorem

$$(16.7) \quad m_\varphi = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1) + m_r I(\xi_1, \xi_2).$$

Podstawiając (16.7) do równania równowagi (15.9), całkując je i spełniając warunki $m_r(0) = \eta$, $m_r(\xi_1) = m_r(\xi_2) = m_r(1) = 0$, otrzymamy

$$(16.8) \quad m_r = \eta \left(1 - \frac{\varrho^2}{\xi_1^2} \right) I(0, \xi_1) - \eta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\varrho^2}{\xi_1^2} - 1 \right) - \ln \frac{\varrho}{\xi_1} \right] I(\xi_1, \varrho_0) - \left[\frac{3\eta}{2\xi_1^2} (\varrho^2 - \xi_2^2) - \ln \frac{\varrho}{\xi_2} \right] I(\varrho_0, \xi_2) + \frac{\eta}{\varrho \xi_1^2} (\varrho - \xi_2) (1 - \varrho) (1 + \varrho + \xi_2) I(\xi_2, 1),$$

przy czym obciążenie graniczne wynosi

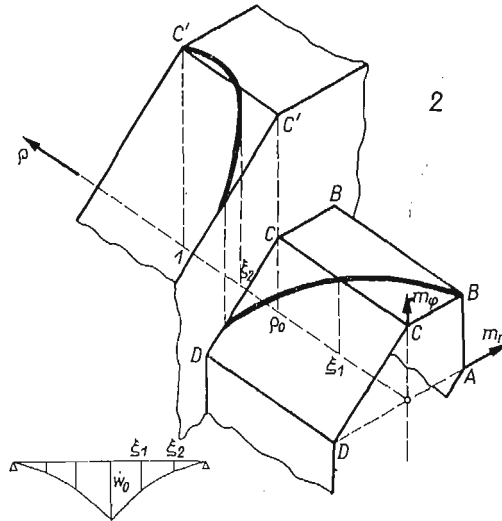
$$(16.9) \quad q_2 = \frac{6\eta}{\xi_1^2},$$

współrzędne zaś ξ_1, ξ_2 wyznaczające zasięg stref ujemnych momentów m_r określone są przez przestępujący układ równań:

$$(16.10) \quad \xi_1^2 = (1 + \xi_2 + \xi_2^2)\eta,$$

$$(16.11) \quad \frac{3}{2}\eta \left(1 - \frac{\xi_2^2}{\xi_1^2}\right) + \ln \frac{\xi_2}{\rho_0} - \eta \ln \frac{\xi_1}{\rho_0} = 0.$$

Położenie profilu momentów na powierzchni własności mechanicznych pokazano na rys. 4.4.



Rys. 4.4

Na podstawie (15.2), (15.7) mamy $\dot{\kappa}_r = 0$ w przedziałach $(0, \xi_1)$, $(\xi_2, 1)$ i $\dot{\kappa}_r + \dot{\kappa}_\varphi = 0$ dla przedziału (ξ_1, ξ_2) . Można to zapisać w postaci równania

$$(16.12) \quad \dot{w}'' + \frac{1}{\rho} I(\xi_1, \xi_2) \dot{w}' = 0.$$

Całkując to równanie mamy

$$(16.13) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 - \dot{w}_0 c \left\{ \frac{\rho}{\xi_1} I(0, \xi_1) + \left(1 + \ln \frac{\rho}{\xi_1}\right) I(\xi_1, \xi_2) + \left(\ln \frac{\xi_2}{\xi_1} + \frac{\rho}{\xi_2}\right) I(\xi_2, 1) \right\},$$

przy czym z warunku brzegowego $\dot{w}(1) = 0$ wynika

$$c = \xi_2 / (1 + \xi_2 \ln \xi_2 / \xi_1).$$

Stosując wzór (15.8) łatwo stwierdzić, że \dot{w}' jest funkcją ciągłą⁽²⁹⁾, \dot{w}'' funkcję skokową, i dopiero \dot{w}''' zawiera δ -funkcje od ξ_1, ξ_2 .

⁽²⁹⁾ Przedział $(0, a)$, $a < 1$ w niniejszej pracy rozumiemy jako przedział $(-\varepsilon, a)$, zaś przedział $(a, 1)$ jako przedział $(a, 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Stąd np. $I'(0, a) = \delta(x) - \delta(x - a) = -\delta(x - a)$ w interesującym nas zakresie zmienności x , $0 \leq x \leq 1$.

Przejdźmy do zbadania zakresu słuszności przedstawionego rozwiązania. Funkcja $m_r(\varrho)$ ma maksimum analityczne w punktach $\varrho = \varrho_* \equiv (\xi_2 + \xi_2^3/2)^{1/3} > \xi_2$, $\varrho = 0$ i nieanalityczne minimum dla $\varrho = \varrho_0$, rys. 4.4. Powinny być spełnione zatem warunki

$$(16.14) \quad m_r(\varrho_0) \leq 1 \quad f_{12} \leq 0,$$

$$(16.15) \quad \xi_2 \leq 0 \quad f_{23} \equiv \ln \varrho_0 - [\eta(3 - \ln 3\eta) - 1]/2(1 - \eta) \geq 0,$$

$$(16.16) \quad m_r(\varrho_0) \geq -\eta \quad \ln \varrho_0^2/\xi_1^2 - 3\varrho_0^2/\xi_1^2 + 5 \geq 0 \text{ tzn.} \\ f_{24} \equiv \xi_1(\eta, \varrho_0) - 0,73\varrho_0 \geq 0,$$

gdzie $\xi_1(\eta, \varrho_0)$ jest określone przez układ (6.10), (6.11). Można stwierdzić, że warunek $m_r(\varrho_*) < 1$ jest zawsze spełniony.

Rozwiązanie III. Gdy parametry η, ϱ_0 nie spełniają nierówności (16.15), obszar ujemnego momentu m_r ogarnia całą część mocniejszą płyty. Wtedy

$$(16.17) \quad m_\varphi = \eta I(0, \varrho_0) + I(\varrho_0, 1) + m_r I(\xi_1, 1).$$

Korzystając z równania równowagi i warunków $m_r(0) = \eta$, $m_r(\xi_1) = m_r(1) = 0$ otrzymujemy

$$(16.18) \quad m_r = \eta \left(1 - \frac{\varrho^2}{\xi_1^2} \right) I(0, \xi_1) - \eta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\varrho^2}{\xi_1^2} - 1 \right) - \ln \frac{\varrho}{\xi_1} \right] I(\xi, \varrho_0) - \\ - \left[\frac{3\eta}{2\xi_1^2} (\varrho^2 - 1) - \ln \varrho \right] I(\varrho_0, 1),$$

przy czym parametr ξ_1 określony jest przez zależność

$$(16.19) \quad \eta \ln \frac{1}{\xi_1} - \frac{3\eta}{2} \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{3\eta}{2} + (\eta - 1) \ln \varrho_0 = 0,$$

obciążenie zaś graniczne wyraża się nadal wzorem (16.9). Łatwo zauważyć, że wyrażenia (16.17), (16.18) i (16.19) otrzymuje się z (16.7), (16.8) i (16.11) przy $\xi_2 = 1$. Analogicznie rozkład prędkości ugięcia wyraża się wzorem:

$$(16.20) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 - \dot{w}_0 c \left\{ \frac{\varrho}{\xi_1} I(0, \xi_1) + \left(1 + \ln \frac{\varrho}{\xi_1} \right) I(\xi_1, 1) \right\}, \quad c = 1/(1 - \ln \xi_1).$$

Zakres słuszności rozwiązania 3 określają warunki

$$(16.21) \quad m'_r(1) \geq 1, \quad f_{23} \leq 0,$$

$$(16.22) \quad m_r(\varrho_0) \geq -\eta, \quad f_{24} \leq 0, \quad \eta \geq \varrho_0^2 \ln \varrho_0 / (1,815\varrho_0^2 - 2,815).$$

W zapisie ostatniego warunku wykorzystaliśmy związek (16.19).

Rozwiązanie IV. Niech w rozwiązaniach II, III parametr podziału ϱ_0 będzie ustalony, parametr zaś niejednorodności η zmniejsza się. Przy pewnej wartości $\eta = \eta^*$ mamy znak równości w zależności (16.16) dla rozwiązania II lub (16.22) dla rozwiązania III. Odpowiada to sytuacji, gdy

$$(16.23) \quad m_r(\varrho_0) = -\eta^*, \quad \xi_1^* = 0,73\varrho_0, \quad \eta = \eta^*(\varrho_0),$$

a więc w punkcie kontaktu obu części płyty realizuje się stan D (por. rys. 4.2). W tym przypadku prędkości $\dot{\kappa}_r, \dot{\kappa}_\varphi$ nie są dla $\varrho = \varrho_0$ jednoznacznie określone ze wzorów (15.2).

Inaczej mówiąc, dla $\eta = \eta^*$ na $\varrho = \varrho_0$ możliwe staje się powstanie przegubu plastycznego. Przegub ten należy rozumieć jako powstający w części słabszej w bezpośredniej bliskości punktu kontaktu.

Dalsze zmniejszenie się η prowadzi do takiego schematu zniszczenia, przy którym uplastycznienie osiągane jest tylko w słabszej części środkowej, która pracuje jako płyta zamocowana w sztywnej części zewnętrznej.

Profil naprężenia $m_r(\varrho)$, $m_\varphi(\varrho)$ dla tego przypadku uzyskujemy z profilu (16.7), (16.8) ustalając $\eta = \eta^*$, $\xi_1 = \xi_1^*$, $\xi_2 = \xi_2^*$ i zmniejszając skalę, tzn.

$$(16.24) \quad m_r(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_r^{\text{II}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*, \xi_2^*), \quad m_\varphi(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_\varphi^{\text{II}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*, \xi_2^*)$$

dla $f_{23} \leq 0$. Człony z $I(0, \xi_1^*)$, $I(\xi_1^*, \varrho_0)$ opisują wówczas znane rozwiązanie dla płyty zamocowanej o promieniu $\varrho_0 R$, natomiast człony z $I(\varrho_0, \xi_2^*)$, $I(\xi_2^*, 1)$ opisują przedłużenie profilu naprężenia w część sztywną, leżącą wewnątrz powierzchni własności mechanicznych.

Analogicznie mamy

$$(16.25) \quad m_r(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_r^{\text{III}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*), \quad m_\varphi(\varrho) = \frac{\eta}{\eta_*} m_\varphi^{\text{III}}(\varrho, \eta^*, \xi_1^*)$$

dla $f_{23} \geq 0$. Profile (16.24) i (16.25) różnią się tylko przedłużeniem w obszar sztywny.

Obciążenie graniczne wynosi

$$(16.26) \quad q_4 = 11,26\eta/\varrho_0^2.$$

Korzystając z (15.2), (16.24) i warunku $\dot{w}(\varrho_0) = 0$ kinematykę początkowego ruchu uzyskamy w postaci

$$(16.27) \quad \dot{w} = w_0 \{ (1 - c\varrho/\xi_1) I(0, \xi_1) + [1 - c(1 + \ln \varrho/\xi_1)] I(\xi_1, \varrho_0) \},$$

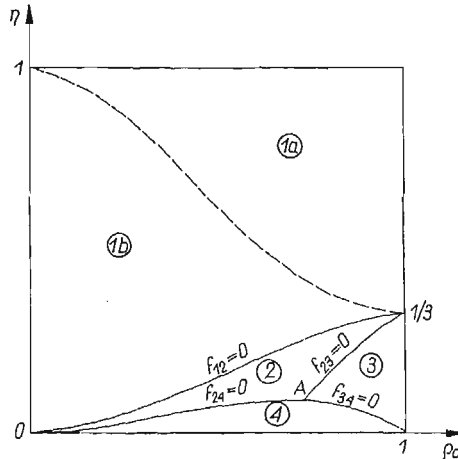
gdzie $c = 1/(1 + \ln \varrho_0/\xi_1)$. Korzystając ze wzoru (15.8) widzimy, że \dot{w}' jest funkcją skokową, natomiast

$$(16.28) \quad \dot{w}'' = \frac{\dot{w}_0 c}{\varrho_0^2} I(\xi_1, \varrho_0) + \frac{\dot{w}_0 c}{\varrho_0} \delta(\varrho - \varrho_0).$$

Występująca w tym wzorze δ -funkcja Diraca stanowi formalne odzwierciedlenie przegubu plastycznego, dając nieskończoną wartość prędkości zmiany krzywizny radialnej $\dot{\kappa}_r$. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że przy operowaniu zapisem tego rodzaju nie zachodzi potrzeba oddzielnego traktowania przegubów plastycznych np. przy obliczeniu mocy dyssypacji.

Zbiorczy obraz zakresów słuszności poszczególnych rozwiązań przedstawiono na rys. 4.5. Można stwierdzić, że w każdym przypadku wszystkie podane wyżej odpowiadające sobie wyrażenia z sąsiadujących stref przechodzą w siebie na liniach podziałowych. Linie $\eta = 1$, $\varrho_0 = 0$ odpowiadają płycie jednorodnej o momencie granicznym równym M_0 , linia $\varrho_0 = 1$ odpowiada płycie jednorodnej o momencie granicznym równym ηM_0 . Linia kreskowana dzieląca obszar 1 odpowiada pojawieniu się ekstremum m_r w części zewnętrznej.

Wynikiem istotnym dla praktyki jest, jak się zdaje, wyznaczenie granicy obszaru 4, $f_{24}(\varrho_0, \eta) = 0$, $f_{34}(\varrho_0, \eta) = 0$. Dla wartości parametru podziału ϱ_0 i parametru niejednorodności η leżących powyżej tej linii, obie części płyty współpracują ze sobą w stanie granicznym; dla wartości ϱ_0, η leżących poniżej tej linii, następuje zniszczenie tylko części środkowej, a więc materiał części mocniejszej nie jest w pełni wykorzystany. Aspekt



Rys. 4.5

inżynierski tego stwierdzenia jest następujący: gdy część mocniejszą projektuje się jako «pierścień» mający stworzyć zamocowanie dla płyty środkowej, to wybór promienia podziału ϱ określa jednoznacznie minimalny konieczny stosunek momentu granicznego «pierścienia» do momentu granicznego płyty $\eta = \eta^*$.

Godne odnotowania są następujące dwie ogólne obserwacje jakościowe, wynikające bezpośrednio z rys. 4.6: przy dowolnej wartości parametru podziału ϱ_0 ,

- 1) dla $\eta \geq 1/3$ w płycie nie występują strefy ujemne momentów radialnych,
- 2) dla $\eta \geq \eta_A \approx 1/11$ obie części płyty współpracują w stanie granicznym.

17. Płyta izotropowa o mocniejszym środku

Opis zachowania się płyty jest w tym przypadku prostszy od przedstawionego w p. 16.

R o z w i ą z a n i e I. Podobnie jak w p. 16 przyjmujemy, że profil naprężenia $m_r(\varrho)$, $m_\varphi(\varrho)$ odpowiada bokom $B'C'$, BC . Wówczas

$$(17.1) \quad m_\varphi = I(0, \varrho_0) + \eta I(\varrho_0, 1).$$

Podstawiając tę zależność do równania równowagi, całkując je i spełniając warunki $m_r(0) = 1$, $m_r(1) = 0$ otrzymamy rozkład momentu

$$(17.2) \quad m_r = \left\{ 1 - \varrho^2 [\eta + \varrho_0(1 - \eta)] \right\} I(0, \varrho_0) + \frac{\eta + \varrho_0(1 - \eta)}{\varrho} (1 - \varrho) \left(\varrho^2 + \varrho + \frac{\varrho_0(1 - \eta)}{n + \varrho_0(1 - \eta)} \right) I(\varrho_0, 1)$$

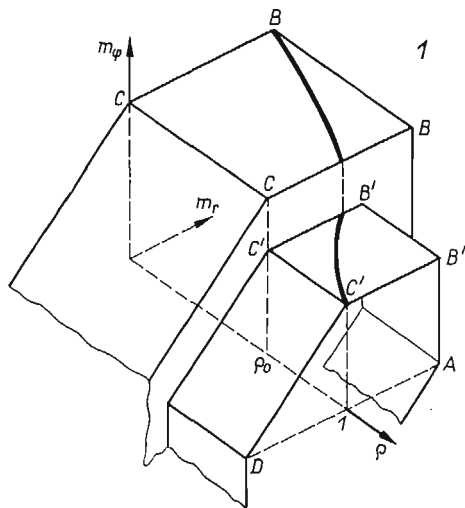
oraz wartość obciążenia granicznego

$$(17.3) \quad q_1 = 6[\eta + \varrho_0(1 - \eta)].$$

Rozkład prędkości określa wzór (16.4). Przy $\eta = 1$ lub $\varrho_0 = 0$ otrzymane zależności określają rozwiązanie dla płyty jednorodnej o momencie granicznym odpowiednio M_0 i $\eta M_0^{(30)}$.

Analiza wyrażenia (17.2) wykazuje, że m_r jest monotonicznie malejącą funkcją ϱ . Zakres słuszności rozwiązania I określa więc jedynie warunek (rys. 4.6)

$$(17.4) \quad m_r(\varrho_0) \leq \eta M_0, \quad \eta \geq \eta^*(\varrho_0) \equiv (1 - \varrho_0^3)/(1 + \varrho_0^2 - \varrho_0^3).$$



Rys. 4.6

Rozwiązanie II. Gdy dla ustalonego ϱ_0 parametr niejednorodności spada do wartości $\eta = \eta^*$ na $\varrho = \varrho_0$ mamy $m_r = \eta M_0$ (punkt B') i możliwe staje się powstanie przegubu plastycznego.

Dla $\eta < \eta^*$ schemat zniszczenia odpowiada ruchowi części mocniejszej jako bryły sztywnej, uplastycznia się natomiast cała zewnętrzna część słabsza, pracująca jako płyta pierścieniowa, zamocowana na pionowo przesuwym brzegu wewnętrznym $\varrho = \varrho_0$ i obciążona poza ciśnieniem prostopadłym p dodatkowo pierścieniem sił skupionych na $\varrho = \varrho_0$ o intensywności $q_r = p\varrho_0^2 R^2/2$. Rozwiązanie ma postać

$$(17.5) \quad m_r = \frac{\eta}{\eta^*} m_r^I(\varrho, \eta^*), \quad m_\varphi = \frac{\eta}{\eta^*} m_\varphi^I(\varrho, \eta^*),$$

gdzie wyrazy z $I(0, \varrho_0)$ reprezentują przedłużenie profilu naprężenia w obszar sztywnej, leżące wewnątrz powierzchni własności mechanicznych.

Obciążenie graniczne wynosi

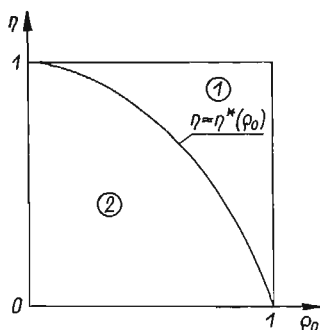
$$(17.6) \quad q_2 = \frac{6\eta M_0}{(1 - \varrho_0^3)},$$

(30) W przypadku $\varrho_0 = 0$ punkt $\varrho = 0$ jest oczywiście punktem osobliwym.

rozkład zaś prędkości określa wzór

$$(17.7) \quad \dot{w} = \dot{w}_0 I(0, \varrho_0) + \dot{w}_0 \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0} I(\varrho_0, 1).$$

Zakresy słuszności przedstawionych rozwiązań obrazuje rys. 4.7; obszar braku współpracy jest tu znacznie większy niż dla przypadku przedstawionego na rys. 4.5. Przebieg linii podziału jest w dobrej zgodności z wyobrażeniami intuicyjnymi.



Rys. 4.7

W pracy [15] zanalizowano w podobny sposób nośność graniczną płyty ortotropowej o skokowej niejednorodności (płyta żelbetowa).

Od autora. W czasie opracowania przedstawionej powyżej problematyki autor spotykał się z życzliwością i konstruktywną krytyką ze strony wielu osób. Autor chciałby podziękować tą drogą za słowa zachęty prof. dr Wacławowi OLSZAKOWI, prof. dr Wojciechowi URBANOWSKIEMU, prof. dr G. S. SZAPIRZE (AN ZSRR), prof. dr Antoniemu SAWCZUKOWI i doc. dr Wojciechowi SZCZEPIŃSKIEMU. Zawsze chętnymi słuchaczami i wnikliwymi dyskutantami byli koledzy z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, przy czym autor jest szczególnie wdzięczny dr inż. Andrzejowi KÖNIGOWI, dr inż. Markowi JANASOWI, mgr Janinie OSTROWSKIEJ, mgr inż. Jerzemu ZAWIDZKIEMU i mgr inż. Jerzemu NAJAROWI.

Literatura cytowana w tekście

1. W. OLSZAK, *Pierścienie i rury o wyrównanych naprężeniach obwodowych*, Czasopismo techniczne, 1, 55 (1937).
2. W. OLSZAK, *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych (I)*, Arch. Mech. Stos., 3, 6 (1954), 492–532; (II) 4, 6 (1954), 439–656.
3. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Plasticity under non-homogeneous conditions*, Advances in Appl. Mech., 7 (1962), 131–214.
4. W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI, W. URBANOWSKI, *Теория пластичности неоднородных тел*, Изд. „Мир”, Москва 1964.
5. М. И. БОЯРШИНОВ, Г. Э. АРКУЛИС, Г. А. БРИЧКО, *Опыт расчета прокатки биметаллических листов*, Инж. методы расчета техн. проц. обр. мет. давлением, Металлургиздат, Москва, 1964, 303–308.
6. М. И. БОЯРШИНОВ, Г. Э. АРКУЛИС, Г. А. БРИЧКО, *К расчету неравномерности деформации при пластическом сжатии биметаллической полосы*, Инж. методы расчета техн. проц. обр. мет. давлением, Металлургиздат, Москва, 1964, 299–303.

7. Л. В. МЕАНДРОВ, В. А. УСТИМЕНКО, А. А. БЫКОВ, *Применение вариационных принципов для исследования деформаций и усилий при прокатке биметаллических листов*, Инж. методы расчета техн. проц. обр. мет. давлением, Металлургиздат, Москва 1964, 308–315.
8. H. S. ORR, F. R. ROMEO, Sandwich rolling, *Iron and Steel Engineer*, 10, 9 (1960).
9. Г. Э. АРКУЛИС, *Совместная пластическая деформация разных металлов*, Металлургия, Москва 1964.
10. J. RYCHLEWSKI, *Plastic jump non-homogeneity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 7, 12, (1964), 341–348.
11. J. RYCHLEWSKI, *Plane plastic strain for jump non-homogeneity*, Int. J. Non-Linear Mech., 1, 1, w druku.
12. J. RYCHLEWSKI, *Plane plastic strain problem of a wedge with jump non-homogeneity*, J. Mecanique, 4, 3 (1964).
13. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a bars with jump non-homogeneity*, Acta Mechanica, 1, 1 (1965).
14. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of a rectangular bar with jump non-homogeneity*, Int. J. Solids and Structures, 1 (1965), 243–255.
15. A. KÖNIG, J. RYCHLEWSKI, *Limit analysis of circular plates with jump non-homogeneity*, Int. J. Solids and Structures, 3, 2 (1966).
16. M. ARCISZ, J. RYCHLEWSKI, *A sandwich strip drawing through straight-sided, perfectly lubricated die*, Biull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1966, w druku.
17. А. С. АХМАТОВ, *Молекулярная физика граничного трения*, Физматгиз, Москва 1964.
18. Е. И. АСТРОВ, *Многослойные стали*, сб. Обработка металлов давлением, вып. 5, Металлургиздат, 1959
19. А. П. СЕМЕНОВ, *Исследование схватания металлов при совместном пластическом деформировании*, Изд. АН СССР, Москва 1953.
20. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod red. W. Olszaka, P. Perzyny, A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1964.
21. О. А. ЛАДЬЖЕНСКАЯ, В. А. СОЛОННИКОВ, *Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*, Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова 59 (1960), 115–173.
22. О. А. ЛАДЬЖЕНСКАЯ, *О решении общей задачи диффракции*, ДАН СССР, 3, 93 (1954), 433–436.
23. E. H. LEE, *On stress discontinuities in plane plastic flow*, Proc. Symp. in Appl. Math., 3 (1958) 213–228.
24. И. М. ГЕЛЬФАНД, Г. Е. ШИЛОВ, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Физматгиз, Москва 1959.
25. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950.
26. Г. С. ШАПИРО, *Упруго-пластические равновесие клина и разрывные решения в теории пластичности*, ПИММ, 1, 16 (1952).
27. P. M. NAGHI, *Stresses and displacements, in an elastic-plastic wedge*, J. Appl. Mech., 1, 24 (1957).
28. J. NAJAR, J. RYCHLEWSKI, G. S. SZAPIRO, *On the elastic-plastic state of an infinite wedge*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1966.
29. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, część II, PWN, Warszawa 1962.
30. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Гостехиздат, Москва 1956.
31. А. И. КУЗНЕЦОВ, *Кручение неоднородных пластических стержней*, Изв. АН СССР, ОТН, 11, 1958.
32. J. RYCHLEWSKI, *Plastic torsion of non-homogeneous bars analyzed in curvilinear coordinates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn. 7, 12, (1964), 335–340.
33. A. NÁDAI, *Theory of flow and fracture of solids*, vol. 1, Mc Graw-Hill, New York 1950.
34. F. A. MC CLINTOCK, *The growth of fatigue cracks under plastic torsion*, Proc. Int. Conf. Fatigue of Metals, London-New York.
35. A. SAWCZUK, TH. JÄGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.
36. A. SAWCZUK, *Some problems of load carrying capacities of orthotropic and non-homogeneous plates*, Arch. Mech. Stos., 8 (1956), 549–563, and IX-e Congres Int. de Mécanique Appliquée Actes 8, Université de Bruxelles 1957, 93–102.

Резюме

ПЛАСТИЧНОСТЬ ТЕЛ С РАЗРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Вопросы совместной пластической деформации разных металлов и некоторые вопросы прочности составных конструкций вызывают необходимость рассмотрения пластичности тел с поверхностями разрыва прочностных свойств. Такие тела названы телами с разрывной пластической неоднородностью.

В настоящей работе излагаются результаты полученные в [10]–[16]. Сделана попытка описания пластичности тел с разрывной неоднородностью на основе математической теории жестко-пластического неупрочняющегося тела.

В первой части дается некоторая упрощенная модель стыка двух частей тела с различными пределами текучести, непротиворечащая основным представлениям теории идеальной пластичности. Приведены некоторые опытные данные.

Вторая часть работы, составляющая половину её объема, посвящена математической теории плоского деформированного состояния. С формальной точки зрения вопрос сводится к решению квазилинейной гиперболической системы уравнений первого порядка, с разрывными коэффициентами. Исследованы свойства поля напряжений и поля скоростей в окрестности линии контакта. Рассмотрена локальная картина характеристик. Приведен полный анализ напряжений и скоростей в задаче о начальном пластическом течении клина нагруженного равномерной боковой нагрузкой на части грани. Для описания разрывных полей скоростей использованы простейшие обобщенные функции. Это дало возможность провести анализ согласованности данных решений с критерием неотрицательности мощности диссипации энергии.

Дано решение задачи о начальном пластическом течении полупространства с некоторым видом разрывной неоднородности, под действием жесткого штампа. Описано полученное совместно с М. Арциш, [16], решение задачи о волочении трехслойной полосы через гладкую матрицу.

В третьей части рассмотрена несущая способность скручиваемых стержней с составным сечением. Стержни многосвязного сечения являются частным случаем рассматриваемого класса стержней. Приведены некоторые качественные результаты и даны примеры решений для стержней круглого и прямоугольного сечения.

В четвертой части дано полученное совместно с А. Кёнигом [15] решение задачи о несущей способности круглой пластины, состоящей из двух концентрических частей с различными предельными моментами.

Summary

PLASTICITY OF THE BODIES WITH JUMP NONHOMOGENEITY

Problems concerning joint plastic treatment of different metals and some problems of strength of constructions composed of different materials involve consideration of the plastic deformation of the bodies possessing surfaces on which the moduli describing plastic properties undergo jumps. Such bodies are called bodies with jump plastic nonhomogeneity.

The work includes joint presentation of the paper [10]–[16], in which an attempt of describing some aspects of the plasticity of the bodies with the jump nonhomogeneity has been made on the basis of the mathematical theory of the rigid/perfectly plastic body.

The paper starts with the formulation of a simplified theoretical model of the joint of two parts, each of them with different yield point. The model is built on the assumption of ideal plasticity. Some experimental data are also presented.

The second chapter, which is a half of the entire contents of the paper, deals with the mathematical plane plastic flow theory. Formally, a quasilinear hyperbolic system of the first order with discontinuous

coefficients is here encountered. The properties of the field of stresses and of velocities in the neighbourhood of contact surfaces are examined. The local picture of the characteristics is discussed. The full analysis of stresses and velocities in the problem of initial plastic flow of the wedge with uniform lateral pressure acting on a part of its edge is presented. The description of the discontinuous velocity fields is carried out by the simplest distribution. This enables to analyse the agreement of the solutions with the postulate of non-negative power of energy dissipation. The solution to the problem of initial plastic flow in the half-space containing some kind of the jump nonhomogeneity is presented when a rigid punch acts on the bounding plane. The solution to the steady drawing process of some sandwich strip through smooth dies, obtained by M. ARCISZ and the author [16] is discussed.

The third chapter deals with the limit analysis of twisted bars containing a transversal jump discontinuity. The bars of multiconnected cross-section can be considered a particular case of the discussed class. Some quantitative results are found and examples of solutions for bars of both circular and rectangular cross-sections are shown.

In the fourth chapter, the solution to the problem of the limit analysis of the circular plate consisting of two concentric parts with different strength is considered. This solution has been obtained by A. König and the author [15].

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1965 r.