

SKOŃCZONE ODKSZTAŁCENIA WIOTKICH OSIOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK
W ŚWIETLE TEORII PŁYNIĘCIA PLASTYCZNEGO

JANUSZ ORKISZ (KRAKÓW)

1. Przedmiotem naszych rozważań jest stan równowagi wiotkiej osiowo-symetrycznej powłoki zdolnej do przenoszenia jedynie naprężeń rozciągających i mogącej pod wpływem obciążeń w istotny sposób zmieniać swą formę, jak też ulegać znacznym odkształceniom niesprężystym. We wszystkich dotychczasowych pracach poświęconych temu zagadnieniu (por. [11]) związki fizyczne przyjmowano w formie zależności pomiędzy skończonymi wielkościami naprężeń i odkształceń. Najczęściej były to tzw. równania Nádaia-Davisa (por. [2, 3, 9])

$$(1.1) \quad \varepsilon_1 = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \Phi, \quad \varepsilon_2 = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] \Phi, \quad \varepsilon_3 = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \Phi,$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ są odkształceniami głównymi w mierze logarytmicznej Hencky'ego, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rzeczywistymi naprężeniami głównymi, a Φ znaną funkcją odkształceń zależną od przyjętego warunku plastyczności.

Zastosowanie tych równań, wygodne z uwagi na ich względnie prostą postać, powinno jednak podlegać pewnym ograniczeniom, jak bowiem wiadomo już przy małych odkształceniach równania teorii plastyczności, wiążące skończone wielkości naprężeń i odkształceń, tylko wtedy zadawalająco opisują fizyczny stan ciała, gdy realizowany jest przypadek tzw. prostego obciążenia. Natomiast przy odkształceniach skończonych to już nie wystarcza i wymaga się, aby w procesie obciążania składowe stanu naprężenia rosły proporcjonalnie (por. [9]). Warunek ten, choćby z uwagi na znaczne zmiany geometrii powłoki, w naszym przypadku najczęściej nie jest spełniony. Rzutuje to oczywiście na rezultaty otrzymane za pomocą równań (1.1) oraz uzasadnia próby skorzystania z bardziej precyzyjnych związków fizycznych (por. [5]). Związki takie, podobnie jak i równania (1.1), zaproponowali E. A. DAVIS [3] i A. NÁDAI [9] po przeprowadzeniu eksperymentów z cienkościennymi metalowymi rurami w złożonym stanie naprężenia. Stanowią one ekstrapolację równań de Saint-Venanta płynięcia plastycznego na przypadek skończonych odkształceń i mają postać:

$$(1.2) \quad d\varepsilon_1 = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] d\Phi, \quad d\varepsilon_2 = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] d\Phi, \\ d\varepsilon_3 = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] d\Phi,$$

gdzie $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ oznaczają przyrosty logarytmicznych deformacji spowodowane przyrostem obciążenia. Jeśli wprowadzimy pojęcia intensywności rzeczywistych naprężeń

$$(1.3) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

oraz intensywności logarytmicznych odkształceń i odpowiadających im przyrostów deformacji

$$(1.4) \quad \varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2},$$

$$(d\varepsilon)_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2},$$

to jak widać z (1.2)

$$(1.5) \quad d\Phi = \frac{(d\varepsilon)_i}{\sigma_i}.$$

Aby określić funkcję Φ , musimy znać charakterystykę materiału, którą ustalamy na podstawie doświadczeń. Dla materiałów podlegających wzmocnieniu przyjmuje się przy tym bądź to zależność (por. [3, 5, 9, 11]) typu

$$(1.6) \quad \sigma_i = Kg(\varepsilon_i)\varepsilon_i,$$

bądź to związek pomiędzy maksymalnymi spośród głównych odkształceń postaciowych γ a odpowiednim naprężeniem stycznym τ (por. [2, 4, 9, 11])

$$(1.7) \quad \tau = \frac{K}{2} g(|\gamma|)\gamma,$$

gdzie K jest stałą o wymiarze naprężenia.

W przypadku gdy w procesie obciążania naprężenia główne pozostają wzajemnie proporcjonalne, równania (1.1) i (1.2) pokrywają się (por. [9]).

Zastosowanie związków (1.2) w teorii wiotkich powłok napotyka jednak na znaczne trudności natury matematycznej. Dlatego też próby w tym kierunku podjęto jedynie w nielicznych pracach. Jak dotąd ściśle rozwiązany został tylko prosty przypadek plastycznej obróbki rur cienkościennych przez przeciąganie. Rozwiązanie takie dla warunku plastyczności Treski podaje praca [7], a dla warunku Hubera-Misesa i przy uwzględnieniu tarcia [8]. W pracach [6, 13] rozpatrzono problem skończonych odkształceń plastycznych kołowej membrany poddanej równomiernemu ciśnieniu. Uzyskano przybliżone rozwiązania przy aproksymacji kształtu odkształconej membrany powierzchnią kulistą. Analogiczny problem przy założeniu jedynie dużych przemieszczeń omawia praca [12].

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie w oparciu o związki fizyczne teorii płynięcia plastycznego (1.2) podstawowego układu równań, opisującego stan powłoki w procesie obciążenia wywołującego skończone odkształcenia plastyczne. Przyjmuje się przy tym podobnie jak w pracy [11] osiową symetrię powłoki i obciążenia, nieściśliwość i izotropię materiału [o charakterystyce (1.6) lub (1.7)]. Odkształcenia sprężyste jako małe w porównaniu z odkształceniami plastycznymi pomijamy. Ponieważ powłoka jest wiotka

i przynosi tylko rozciąganie, to zajść mogą (por. [4.11]) dwa przypadki: a) oba naprężenia główne są dodatnie ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$), b) naprężenie pierścieniowe zeruje się i powstają fałdy ($\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$). Jeśli przy tym zdarzy się, że [por. (1.4)]:

$$(1.8) \quad \frac{d\varepsilon_i}{dt} < 0,$$

gdzie t jest zmienną charakteryzującą wzrost obciążenia, to zachodzi proces odciążenia i powłokę rozpatruje się jak w pracy [10].

2. Rozważmy przypadek, gdy dla powłoki przedstawionej na rys. 1 $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 > 0$. Podstawowy układ równań różniczkowych określających stan tej powłoki otrzymamy ze związków geometrycznych, fizycznych oraz równań równowagi. Posłużymy się przy tym ustalonym układem współrzędnych X, Y (typu Eulera) związanych z nieruchomymi punktami w przestrzeni i opisującymi formę powłoki odkształconej oraz współrzędnymi r, ζ (typu Lagrange'a) sztywno związanymi z cząstkami powłoki i ich położenie w stanie nieodkształconym. Wprowadzamy przy tym następujące wielkości bezwymiarowe (por. rys. 1):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{X}{R_1}, & y &= \frac{Y}{R_1}, & h &= \frac{H}{H_{10}}, \\ \xi &= \frac{r}{R_1}, & \eta &= \frac{\zeta}{R_1}, & f &= f(\xi) = \frac{H_1}{H_{10}}, & u &= \frac{H}{H_1} = \frac{h}{f}, \\ Q_n &= Q_n(x, y, t) = \frac{R_1}{KH_{10}} q_n(X, Y, t), \\ Q_s &= Q_s(x, y, t) = \frac{R_1}{KH_{10}} q_s(X, Y, t), \\ p_1 &= \frac{\sigma_1}{K}, & p_2 &= \frac{\sigma_2}{K}, & p_t &= \frac{\sigma_t}{K}, \end{aligned}$$

gdzie H_1 i H oznaczają odpowiednio grubość powłoki przed i po odkształceniu, $q_n(X, Y, t)$ i $q_s(X, Y, t)$ — obciążenia przypadające na jednostkę powierzchni w kierunku normalnym i południkowym, stycznym do powłoki odkształconej, R_1 — dowolny rozmiar charakteryzujący powłokę przed odkształceniem; H_{10} — grubość początkową powłoki w pewnym ustalonym punkcie, t — bezwymiarową zmienną charakteryzującą wzrost obciążeń w procesie obciążania. Ponadto, jeśli dane są wymiary powłoki w stanie nieodkształconym, to $f(\xi)$ jest znaną funkcją swego argumentu.

W powłoce zakładamy płaski stan naprężenia. Jeśli przez 1, 2, 3 oznaczmy odpowiednio kierunki główne — południkowy, równoleżnikowy i normalny do powłoki, to

$$(2.2) \quad \sigma_3 = 0.$$

Wówczas na podstawie równań (1.2) i (1.6), przyjętego warunku nieściśliwości i po uwzględnieniu (2.1) otrzymujemy związki fizyczne w postaci:

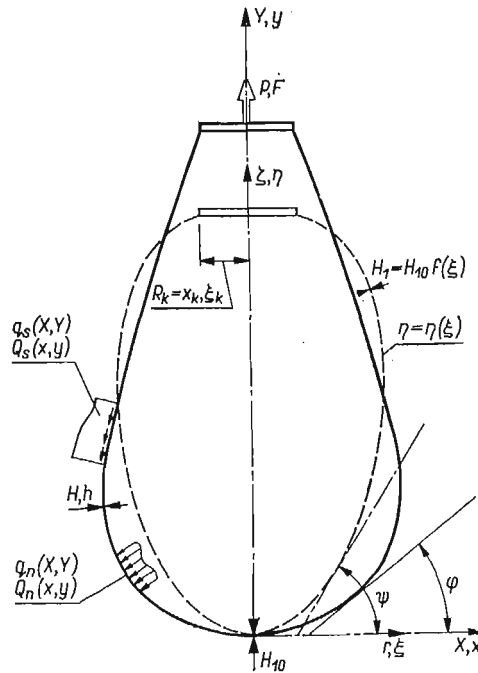
$$(2.3) \quad \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$(2.4) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,$$

$$(2.5) \quad p_i = g(\varepsilon_i)\varepsilon_i,$$

gdzie [por. (1.3), (1.4)] obecnie

$$p_i = \sqrt{p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2}.$$



Rys. 1

Jeśli zamiast zależności (1.3) przyjmiemy (1.6), to zamiast równania (2.5) mamy

$$(2.6) \quad p_1 = (|g\varepsilon_1 - \varepsilon_3|)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \text{przy } p_1 \geq p_2,$$

lub

$$(2.7) \quad p_2 = (|g\varepsilon_2 - \varepsilon_3|)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad \text{przy } p_2 \geq p_1.$$

W konkretnych zastosowaniach zależności (1.6) i (1.7) najczęściej aproksymujemy za pomocą krzywych dwuparametrowych. I tak dla potęgowego wzmocnienia, zakładając odpowiednio

$$(2.8) \quad \sigma_i = K\varepsilon_i^\mu \quad \text{lub} \quad \sigma_j = K|\varepsilon_j - \varepsilon_3|^\mu,$$

mamy stąd

$$(2.9) \quad g(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{\mu-1} \quad \text{lub} \quad g(\varepsilon_j - \varepsilon_3) = |\varepsilon_j - \varepsilon_3|^{\mu-1},$$

dla liniowego zaś wzmocnienia

$$(2.10) \quad \sigma_i = K(1 + A\varepsilon_i) \quad \text{lub} \quad \sigma_j = K[1 + A(\varepsilon_j - \varepsilon_3)]$$

otrzymujemy

$$(2.11) \quad g(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} + A \quad \text{lub} \quad g(\varepsilon_j - \varepsilon_3) = (\varepsilon_j - \varepsilon_3)^{-1} + A,$$

gdzie j oznacza wskaźnik większego z naprężeń p_1 i p_2 . Model ciała idealnie plastycznego otrzymamy przyjmując w tych wzorach $\mu = 0$ lub $A = 0$.

W procesie obciążania zarówno naprężenia jak i odkształcenia będą funkcjami nie tylko położenia, ale także zmiennej t opisującej przebieg tego procesu w czasie. Jako zmienne niezależne przyjmujemy w przypadku współrzędnych Lagrange'a ξ, t , w przypadku zaś współrzędnych Eulera x, t . Ponieważ $x = x(\xi, t)$, a ξ jako sztywno związane z cząstką nie zależy od t , to przy różniczkowaniu pomiędzy tymi zmiennymi zachodzi relacja

$$(2.12) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\partial x / \partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Równania geometryczne powłoki układamy dla dowolnego ustalonego stanu obciążenia (co odpowiada ustalonej wartości t). Przy przyjęciu współrzędnych Eulera x, t mają one postać analogiczną jak w pracy [11]

$$(2.13) \quad \varepsilon_1 = \ln \left(\frac{1}{\partial x / \partial \xi} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right), \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u.$$

Funkcje ψ i φ oznaczają tu (por. rys. 1) kąty zawarte pomiędzy osią x a styczną do powłoki odpowiednio w stanie nieodkształconym i odkształconym.

Na podstawie wzorów (2.13) możemy obecnie obliczyć przyrosty odkształceń $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ i $d\varepsilon_3$ wywołane przyrostem obciążeń odpowiadającym dt . Należy tu zwrócić uwagę, że ponieważ przy skończonych odkształceniach przyrosty te (oznaczane dalej przez δ) dotyczą ustalonej cząstki powłoki, to najczęściej (procesy niestacjonarne) nie są one różniczkami zupełnymi i traktowanie ich jako takich byłoby błędne. Wyjątek stanowi przypadek, gdy współrzędne Eulera opisujące kształt powłoki nie zależą od czasu. Odpowiada to np. niektórym stacjonarnym procesom obróbki plastycznej jak obciskanie lub przeciąganie nieskończenie długich rur cienkościennych, kiedy forma matrycy, a więc i powłoki, nie ulega zmianie z czasem. Stan powłoki opisują wówczas zwyczajne równania różniczkowe, a rozwiązanie problemu jest szczególnie proste (por. [7, 8]). W ogólnym zaś przypadku we współrzędnych Lagrange'a ξ, t mamy:

$$(2.14) \quad \delta\varepsilon_1 = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} dt, \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t} dt, \quad \delta\varepsilon_3 = \frac{\partial\varepsilon_3}{\partial t} dt.$$

Wobec (2.13) otrzymujemy zatem [por. (2.12)]

$$(2.15) \quad \delta\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\partial x / \partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \operatorname{tg} \varphi \right) dt, \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad \delta\varepsilon_3 = \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Fizyczne równanie (2.3) można obecnie [wykorzystując (2.4)] zapisać w postaci

$$(2.16) \quad u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial t} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Równania równowagi układamy dla elementu powłoki w stanie odkształconym przy ustalonej wartości t . Wówczas w układzie współrzędnych (x, t) ich postać (por. [4, 5, 7])

$$(2.17) \quad \frac{\partial}{\partial x} (xhp_1) = hp_2 + \frac{xQ_s}{\cos \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (xhp_1 \sin \varphi) = x(Q_n + Q_s \operatorname{tg} \varphi)$$

jest analogiczna jak w pracy [11], przy czym pochodne d/dx zastąpiono przez $\partial/\partial x$. Również w układzie x, t zapisujemy związek (por. rys. 1)

$$(2.18) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Równania (2.4), (2.13), (2.16), (2.17) i (2.18) można sprowadzić do układu pięciu quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych, które dla zmiennych niezależnych ξ, t mają postać:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{f u \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{p_1 u x \cos \psi} \left(\frac{Q_n}{f u} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right), \\ u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial t} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Jak można wykazać (por. [1]) jest to układ hiperboliczny, a jego charakterystykami są linie $\xi = \text{const}$ i $t = \text{const}$. Niewiadomymi są tu funkcje $x(\xi, t)$, $y(\xi, t)$, $\varphi(\xi, t)$, $u(\xi, t)$, $p_1(\xi, t)$, $p_2(\xi, t)$. Brakujące szóste równanie ma charakter algebraiczny [por. (2.4), (2.13)] i zależnie od przesłanek fizycznych przyjmuje postać (2.5), (2.6) lub (2.7).

W szczególnym przypadku, gdy $Q_s = 0$ i $Q_n = Q = \text{const}$, czwarte z równań (2.19) daje się rozwiązać efektywnie [por. (2.17)] i zapisać w postaci

$$(2.20) \quad \sin \varphi = \frac{xQ}{2fp_1u} + \frac{F}{2fp_1ux},$$

przy czym

$$(2.21) \quad F = \frac{P}{\pi H_{10} K R_1}$$

jest bezwymiarowym odpowiednikiem wypadkowej P sił zewnętrznych działających bezpośrednio na dno lub krawędź powłoki.

Często wygodniej jest, gdy jako zmienne niezależne obierzemy (por. rys. 1) nie ξ, t , lecz η, t (np. powłoka walcowa). Wówczas odpowiednie równania będą miały postać taką samą jak poprzednio, z tym że pochodne $\partial/\partial \xi$ należy zastąpić przez $\partial/\partial \eta$, a $\cos \psi$ przez $\sin \psi$. Dla powłoki walcowej $\xi = \sin \psi = 1$.

2.1. W przypadku gdy $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, z uwagi na to, że w procesie obciążania naprężenia główne pozostają wzajemnie w stałej proporcji

$$(2.22) \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,$$

układy równań fizycznych (1.2) i (1.3) pokrywają się i rozwiązanie przebiega analogicznie jak w pracy [11].

Zastosowanie równań teorii płynięcia plastycznego wymaga (ze względów fizycznych) istnienia niezerowego stanu wyjściowego, w którym naprężenia osiągają granicę plastyczności. Stan ten (oznaczony $*$) przy $t = 0$ determinuje warunki początkowe dla układu (2.19):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x(\xi, 0) &= x_*(\xi), & y(\xi, 0) &= y_*(\xi), & u(\xi, 0) &= u_*(\xi), \\ \varphi(\xi, 0) &= \varphi_*(\xi), & p_1(\xi, 0) &= p_{1*}(\xi), & p_2(\xi, 0) &= p_{2*}(\xi). \end{aligned}$$

Najbardziej typowe przypadki warunków brzegowych to (por. [11]):

a) Wierzchołek kopuły

$$(3.2) \quad x(0, t) = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad F = 0 \quad \text{oraz} \quad x(\xi_1, t) = \xi_1,$$

gdzie F wyraża się wzorem (2.21). Z warunku równowagi sił działających na brzeg powłoki $\xi = \xi_0$ wynika, że ogólnie

$$(3.3) \quad \varphi(\xi_0, t) = \arcsin \frac{Q_n(\xi_0, t)x^2(\xi_0, t) + F(t)}{2x(\xi_0, t)f(\xi_0)u(\xi_0, t)p_1(\xi_0, t)}.$$

W przypadku wierzchołka kopuły obliczamy stąd $\varphi(0, t) = 0$, a następnie [por. (2.13)] $\varepsilon_1(0, t) = \varepsilon_2(0, t)$ i na tej podstawie [por (2.3)] mamy $p_1(0, t) = p_2(0, t)$.

b) Nieodkształcalne dna ze swobodą przesuwu

$$(3.4) \quad x(\xi_0, t) = \xi_0, \quad y(\xi_0, t) = 0, \quad F = F_0 \quad \text{oraz} \quad x(\xi_1, t) = \xi_1.$$

Z równania (3.4) obliczamy wówczas $\varphi(\xi_0, t)$, a następnie podobnie jak poprzednio $p_1(\xi_0, t) = 2p_2(\xi_0, t)$.

c) Nieprzesuwne nieodkształcalne dna

$$(3.5) \quad x(\xi_0, t) = \xi_0, \quad y(\xi_0, t) = 0 \quad \text{oraz} \quad x(\xi_1, t) = \xi_1, \quad y(\xi_1, t) = \eta_1.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku $p_1(0, t) = 2p_2(0, t)$, nie znamy natomiast siły $F(t)$ i co za tym idzie kąta $\varphi(\xi_0, t)$.

d) Dane odkształcenie na brzegu $x(\xi_0, t) = x_0 = \text{const}$. Pozostałe warunki jak w przypadku b), a więc inaczej niż to wynika z teorii odkształceniowej (por. [11]), gdzie $p_1 = kp_2$, przy czym dla $x_0 \neq \xi_0$ $k \neq 2$.

e) Odkształcalny kontur. Warunki brzegowe dla odkształcalnego konturu mogą być różnie sformułowane zależnie od konkretnego problemu fizycznego, jak np. rozciągliwy pierścień na brzegu, odkształcalne denko, podatne złącze dwóch różnych powłok itp. Wspólną cechą tych warunków jest równość przyrostów odkształceń brzegowych powłoki de'_2 i konturu de''_2 oraz równość odpowiadających im wypadkowych sił F' i F'' oraz promieni $x'(\xi_0, t) = x''(\xi_0, t)$. Ponadto jak poprzednio zakładamy $y(\xi_0, t) = 0$ oraz $x(\xi_1, t) = \xi_1$.

W przypadkach a, b, d, e przyjęto, że na drugim końcu powłoki znajduje się przesuwne nieodkształcalne dno. Zgodność warunków początkowych (3.1) z warunkami brzegowymi a–e w punkcie brzegowym $(0, 0)$ jest zawsze zachowana z wyjątkiem relacji pomiędzy naprężeniami, gdzie zgodność tę należy każdorazowo oddzielnie wykazać.

4. W charakterze przykładu rozważymy przypadek powłoki walcowej o liniowo zmiennej grubości ścianki w stanie nieodkształconym. Wewnątrz tej powłoki znajduje się sztywny rdzeń, którego średnicę stopniowo zwiększamy powodując w ten sposób powstanie w niej skończonych odkształceń plastycznych. Wywołane przy tym tarcie uwzględniamy w obliczeniach. Jako zmienną charakteryzującą rozwój odkształceń przyjmujemy promień powłoki ($x = r$), przy czym $x \geq 1$. W miarę odkształceń wolne końce powłoki przemieszczają się ku jej środkowi, musi zatem istnieć jakiś punkt nieruchomy η_* . Jak się przy tym okazuje dla $\eta < \eta_*$ (I część) i dla $\eta > \eta_*$ (II część) przemieszczenia następują w przeciwnych kierunkach, a więc siły tarcia mają przeciwne zwroty. Prawo tarcia (wg Coulomba), zmianę grubości ścianki przed odkształceniem i warunek plastyczności zakładamy w postaci:

$$(4.1) \quad Q_s = kQ_n, \quad f(\eta) = 1 + \alpha\eta, \quad p_2 = \bar{p},$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają $k \neq 0$ — współczynnik tarcia, $\alpha \neq 0$ — bezwymiarową stałą, $\bar{p} = \text{const}$ — granicę plastyczności. Ponieważ oba końce powłoki ($\eta = 0$, $\eta = \eta_l$) nie są obciążone, to prócz zachowania ciągłości na granicy stref mamy warunki brzegowe

$$(4.2) \quad p_1(0, x) = 0, \quad p_1(\eta_l, x) = 0, \quad y(\eta_*, x) = \eta_*$$

oraz początkowe

$$(4.3) \quad h_0 = h(\eta, 1) = 1 + \alpha\eta, \quad y(\eta, 1) = \eta.$$

Warto przy tym zauważyć, że zerowe warunki początkowe dla naprężeń (powłoka nieobciążona) byłyby sprzeczne z przyjętym warunkiem plastyczności (4.1).

Dla rozważanej powłoki mamy następujące związki w wielkościach bezwymiarowych: równania równowagi

$$(4.4) \quad \frac{\partial}{\partial y} (hp_1) = Q_s, \quad p_2 = \frac{x}{h} Q_n;$$

równania geometryczne

$$(4.5) \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \varepsilon_2 = \ln x, \quad \varepsilon_3 = \ln u;$$

równania fizyczne:

$$(4.6) \quad u(p_1 + p_2) \frac{\partial x}{\partial x} + x(2p_2 - p_1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Ze związków (4.1)–(4.6) otrzymujemy układ równań

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (hp_1) = \frac{\pm k\bar{p}}{x^2} (1 + \alpha\eta), \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h}{x} \frac{p_1 + \bar{p}}{p_1 - 2\bar{p}}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1 + \alpha\eta}{hx}.$$

Zajmiemy się naprzód pierwszą częścią powłoki. I tak z (4.7) (znak +) przy uwzględnieniu (4.2) mamy

$$(4.8) \quad p_1 = \frac{\bar{p}}{hx^2} \beta, \quad \beta = k \left(\eta + \frac{\alpha}{2} \eta^2 \right).$$

Wprowadzając nową funkcję $z = hx^2$ z (4.7) i (4.8) dostajemy równanie

$$4.9 \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = 3z \frac{\beta - z}{\beta - 2z},$$

którego rozwiązaniem przy warunku początkowym (4.3) jest funkcja

$$(4.10) \quad z(z-1) = \alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$(4.11) \quad h = \frac{1}{2x^2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}} \right), \quad p_1 = \frac{2\bar{p}\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}}}.$$

Jak widać p_1 monotonicznie wzrasta w sposób nieograniczony wraz z η . Ponieważ z uwagi na warunek plastyczności $p_1 \leq \bar{p}$, to maksymalną długość $\bar{\eta}$ części powłoki opisywanej równaniami (4.11) wyznaczamy z warunku $p_1 = \bar{p}$, który prowadzi do równania przesłanego

$$(4.12) \quad k^2\bar{\eta} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta} \right)^2 - k \left(1 + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta} \right) - \alpha(1+\alpha\bar{\eta})x^{\frac{3}{k\bar{\eta} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\bar{\eta} \right)}} = 0.$$

Założymy, że $\eta = \eta_* \leq \bar{\eta}$ jest punktem nieruchomym i zajmijmy się obecnie drugą częścią powłoki, gdzie $\eta \geq \eta_*$. Warunek ciągłości dla pierwszego z równań (4.7) (znak $-$) ma postać

$$(4.13) \quad (hp_1)|_{\eta=\eta_*} = \frac{\bar{p}}{x^2} \beta_*, \quad \beta_* = k \left(\eta_* + \frac{\alpha}{2} \eta_*^2 \right).$$

Na tej podstawie po scałkowaniu dostajemy

$$(4.14) \quad p_1 = \frac{\bar{p}}{hx^2} (2\beta_* - \beta).$$

Warunek brzegowy (4.2) dla $p_1(\eta_l, x)$ będzie spełniony przy

$$(4.15) \quad \eta_l = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + 4\alpha\eta_* \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta_* \right)} - 1 \right), \text{ czyli}$$

$$\eta_* = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \alpha\eta_l \left(1 + \frac{\alpha}{2} \eta_l \right)} - 1 \right) \leq \bar{\eta},$$

skąd widać, że położenie punktu nieruchomego η_* nie zmienia się w procesie deformacji.

Z drugiego z równań (4.7) oraz na podstawie (4.14) otrzymujemy

$$(4.16) \quad h = \frac{1}{2x^2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{2\beta_* - \beta}}} \right),$$

$$p_1 = \frac{2\bar{p}\beta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1+\alpha\eta)x^{\frac{3}{2\beta_* - \beta}}}}.$$

Całkując trzecie z równań (4.7), przy warunku brzegowym (4.2), mamy więc

$$(4.17) \quad y(\eta, x) = \begin{cases} \eta_* - 2x \int_{\eta}^{\eta_*} \frac{1 + \alpha\eta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1 + \alpha\eta)x^{\frac{3}{\beta}}}} d\eta & \text{dla } 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ \eta_* + 2x \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{1 + \alpha\eta}{1 + \sqrt{1 + 4\alpha\eta(1 + \alpha\eta)x^{\frac{3}{2\beta_* - \beta}}}} d\eta & \text{dla } \eta_* \leq \eta \leq \eta_1. \end{cases}$$

Stąd zaś możemy obliczyć całkowitą długość powłoki po odkształceniu: $y(\eta_1, x) - y(0, x)$.

Literatura cytowana w tekście *

1. И. С. БЕРЕЗИА, Н. П. ЖИДКОВ, *Методы вычислений*, Физматгиз, 2, Москва 1962.
2. E. A. DAVIS, *Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses*, Trans. ASME, **65** (1943). A-187.
3. E. A. DAVIS, *Yielding and fracture of medium carbon steel under combined stress*, J. Appl. Mech., **1**, 12 (1945).
4. А. С. ГРИГОРЬЕВ, *Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях*, Прикл. Мат. Мех., **6**, 21 (1957).
5. A. S. GRIGORIEV, *The Stress State and the Carrying Capacity of Flexible Plates and Shells at Large Deformations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, PWN, Warszawa 1964, repr. Non-classical Shell Problems. Proc. IASS Symp., Warsaw, Sept. 1963.
6. R. HILL, *A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure*, Phil. Mag., Sér. 7, **51**, Novembre 1950, 1133.
7. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*, McGraw-Hill Book Co., 1953.
8. Н. Н. МАЛИНИН, *Волочение труб через конические матрицы*, Изв. АН СССР, Механика, **5**, 1965.
9. A. NÁDAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, New York-Toronto-London 1950.
10. J. ORKISZ, *Problem odciążenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy dużych odkształceniach niesprężystych*, Mech. Teoret. i Stos., **1**, 3 (1965).
11. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., **4**, **13** (1965), streszcz. ang. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **1**, **15** (1967).
12. E. ROSS, W. PRAGER, *On the theory of the bulge test*, Quarterly Appl. Mathem., **1**, **12** (1954).
13. ТРАН ЛУИ-ЧИОНГ, *Жестко-пластической анализ мембран с учетом упрочнения*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Машин., **4**, 1965.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИБКИХ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В статье представляется обобщение результатов работы [11] на случай физических уравнений теории пластического течения с конечными деформациями (предложенных А. НАДАИ [9]). Предметом работы является вывод системы уравнений описывающих состояние оболочки в процессе

нагружения. Исследуемая оболочка воспринимает только растягивающие напряжения, поэтому могут иметь место следующие два случая:

а) оба главные напряжения положительны ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$); получаем гиперболическую систему (2.19) пяти квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (обсуждены краевые и начальные условия);

в) кольцевое напряжение равно нулю ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$); физические уравнения деформационной теории и теории пластического течения совпадают — получается задача уже решенная в работе [11].

В заключение выведенные уравнения применяются для получения точного решения задачи о цилиндрической оболочке с линейно изменяющейся толщиной в недеформированном состоянии. Оболочка распирается изнутри втулкой увеличивающегося радиуса, причем учитывается трение материала.

Summary

FINITE DEFORMATIONS OF FLEXIBLE AXIALLY SYMMETRIC MEMBRANE SHELLS IN THE LIGHT OF THE THEORY OF PLASTIC FLOW

This paper generalizes the previous results [11] to the case of the theory of plastic flow under finite deformations. The physical relations in the form given by A. Nadai [9] are applied throughout the paper. The main aim of the present considerations is to derive the set of equations describing the behaviour of a shell process of loading. Since only tensile stresses are present, the two following cases are possible:

a) both the principal stresses are positive definite ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$); then we have the set (2.19) of five quasi-linear hyperbolic partial differential equations of the first order (boundary conditions are discussed).

b) circumferential stress is equal to zero ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$); then the physical relations for plastic flow are exactly the same as those for the theory of plastic deformations, and we obtain the problem already solved in [11].

In conclusion, the solution of the case of a cylindrical shell with linearly variable thickness expanded inside by a pin of increasing radius (friction has been taken into consideration) is discussed in more detail.

KATEDRA STATYKI BUDOWLI I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1967 r.